6. Интегральное исчисление

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Занимаясь дифференцированием функций, мы по данной функции находили ее производную. Сейчас перейдем к обратной задаче: найти функцию, зная ее производную.

Первообразная

Функция $F(x)$ является *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве E, если $F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in E$.

В качестве множества E можно рассматривать конечный или бесконечный интервал (a,b) , отрезок $[a,b]$, а также конечный или бесконечный полуинтервал.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ первообразной является функция $F(x) = \sqrt{x}$, т. к. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Нетрудно заметить, что функция $F_2(x) = \sqrt{x} + 5$ также является первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Очевидно, что если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то для любой константы c функция $F(x)+c$ также является первообразной для функции $f(x)$, так как $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in E$. Таким образом, если функция $F(x)$ есть первообразная для некоторой функции $f(x)$, то любая первообразная для этой функции имеет вид $F(x) + c$, где c – некоторая константа..

Свойства первообразной

1) Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а функция $G(x)$ является первообразной для функции $g(x)$, то функция $F(x)+G(x)$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$.

2) Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $\alpha \cdot F(x)$ является первообразной для функции $\alpha \cdot f(x)$.

3) Пусть определены функции $f(y(t))$, $y'(t)$ и $F(y(t))$. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $F(y(t))$ является первообразной для функции $f(y(t)) \cdot y'(t)$.

Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором множестве E называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначают символом

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом, если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ где } c = \text{const}.$$

Знак $\int$ называется знаком интеграла, функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а переменная x- переменной интегрирования. Подынтегральное выражение можно записать в виде $f(x)dx=dF(x)$. Нахождение функции по ее производной называется интегрированием функции. Интегрирование- действие обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить, продифференцировав функцию $f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$.
2. $\int dF(x) = F(x) + c$
3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c \neq 0$.
4. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$ и функция $u = \varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + c$.

6. $\int dx = x + c$.

7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$.

2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

3. $\int e^x dx = e^x + c$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$.

5. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0)$.

6. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \quad (a \neq 0)$.

7. $\int \frac{d}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c \quad (a \neq 0)$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0)$.

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

10. $\int \cos x dx = \sin x + c$.

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$.

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$.

15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$.

16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$.

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$.

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$.

Нахождение первообразной или вычисление неопределенного интеграла в основном состоит в преобразовании подынтегрального выражения так, чтобы получить интегралы из этой таблицы.

Пример 6.1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$1)\quad \int (3x^2+4x+5)dx; \quad 2)\ \int \frac{4-x^3}{\sqrt{x}}dx;$$

$$3)\ \int \sin^2 x dx; \qquad 4)\ \int (5x+4^x)dx;$$

$$5)\int \left(2\cdot\sqrt[5]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x}\right)dx.$$

Решение:

1) $$\int (3x^2+4x+5)dx = 3\int x^2 dx + 4\int x dx + 5\int dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + c = x^3 + 2x^2 + 5x + c.$$

2) $$\int \frac{4-x^3}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(4\cdot x^{-\frac{1}{2}} - x^{3-\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$== 4\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \int x^{\frac{5}{2}}dx = 8\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c = 8\sqrt{x} - \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c.$$

3) $\int sin^2 xdx = \int \frac{1-cos\,2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{cos\,2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx -$

$-\frac{1}{2}\int cos\,2xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin\,2x + c$.

4) $\int (5x + 4^x)dx = 5\int xdx + \int 4^x dx = 5\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{4^x}{ln\,4} + c.$

5) $\int (2\cdot\sqrt[5]{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x})dx = 2\int \sqrt[5]{x}dx + 4\int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int \frac{1}{x}dx =$

$= 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + 4\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + ln\,|\,x\,| + c = \frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}} + 12x^{\frac{1}{3}} + ln\,|\,x\,| + c.$

6.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве E. Тогда справедливо равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt\,.$$

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Если удалось найти дифференцируемые функции $t = \varphi(x)$ и $g(t)$ такие, что подынтегральное выражение удалось записать в виде $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(t)dt$, и интеграл от выражения справа известен и равен $\int g(t)dt = G(t) + c$, то исходный интеграл равен $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + c$.

Функция $\varphi(x)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более простой для интегрирования вид. Основную трудность как раз и представляет преобразование подынтегрального выражения, так как не всегда бывает заранее известно к чему нужно прийти и какой должна быть функция $\varphi(x)$.

Например, вычислим интеграл $\int \frac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

Заметим, что производная от функции $\varphi(x)=\sqrt{x}$ равна $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Сделаем замену переменной: $\sqrt{x}=t$, тогда $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx$. Следовательно,

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt\end{array}\right|=2\int 5^t\,dt=\frac{2\cdot 5^t}{ln\,5}+c=\frac{2\cdot 5^{\sqrt{x}}}{ln\,5}+c.$$

Не всегда удается сразу подобрать такую замену, что в результате получится табличный интеграл. В более сложных случаях рекомендуется сначала выбрать ту подстановку, которая представляется удачной, и лишь после преобразования подынтегрального выражения смотреть, добились ли мы своей цели – упрощения интеграла. Может оказаться так, что получившийся интеграл еще не является табличным, но приводится к такому проще, чем исходный.

Например, интеграл $\int \frac{sin\,2x}{1+sin^4 x}dx$ заменой $sin\,x=t$ приводиться к следующему интегралу:

$$\int \frac{sin\,2x}{1+sin^4 x}dx=\int \frac{2\,sin\,x\,cos\,x}{1+sin^4 x}dx=\left|\begin{array}{l}sin\,x=t\\ cos\,xdx=dt\end{array}\right|=\int \frac{2t\cdot dt}{1+t^4}.$$

Сделаем еще одну подстановку $u=t^2$. Тогда имеем

$$\int \frac{2t \cdot dt}{1+t^4} = \begin{vmatrix} t^2 = u \\ 2tdt = du \end{vmatrix} = \int \frac{du}{1+u^2}.$$

В результате получили табличный интеграл:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + c = arctgt^2 + c = arctg\, sin^2 x + c.$$

Разновидностью замены переменного является операция внесения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Пусть $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$ тогда имеем $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x)$.

Заметим, что для того чтобы внести функцию под знак дифференциала необходимо найти первообразную этой функции.

Отметим некоторые часто применяемые преобразования дифференциалов:

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

$$x^n dx = \frac{dx^{n+1}}{n+1} \quad \left(xdx = \frac{1}{2} dx^2 \right),$$

$$\sin x\, dx = -d \cos x,$$

$$\cos x\, dx = d \sin x,$$

$$\frac{dx}{x} = d \ln x = \frac{d \log_a x}{x \log_a e},$$

$$a^x dx = \frac{da^x}{\ln a} \quad (e^x\, dx = d\, e^x),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\, \mathrm{tg} x,$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\, \mathrm{ctg} x.$$

Например, вычислим интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^4}$, с помощью внесения функции $\phi(x)=x$ под знак дифференциала. Первообразная от этой функции равна $\frac{x^2}{2}$. Тогда имеем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ dx^2 = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctgt + c = \frac{1}{2} arctgx^2 + c.$$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла $\int f(x)dx$ произвести замену, выражая не функцию t через *x, а* наоборот, *x* через t. В этом случае полагаем

$$x=\varphi(t), \quad \text{тогда } dx=\varphi'(t)dt.$$

Обозначим $u(t)= f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тогда $\int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t)+c$.

Затем возвращаемся к переменной *x*, выразив ее из уравнения $x=\varphi(t)$, то есть, находим обратную функцию к функции $x=\varphi(t)$ и подставляем ее вместо t в выражение найденного интеграла.

Например, вычислим интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$, сделав замену $x=\sin u$. Тогда $dx=\cos u du$. Подставив в интеграл x и dx, а затем, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 u+\cos^2 u=1$, получим:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u du = \int \cos^2 u du = \int \frac{1+\cos 2u}{2} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \cos 2u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2u \cdot d(2u)}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + c.$$

Вернемся к переменной *x*. Мы делали замену $x = \sin u$, выразим функцию u через *x* с помощью обратной функции. Тогда имеем $u = \arcsin x$. Заметим, что $\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u} = 2x\sqrt{1-x^2}$.
Следовательно,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

Пример 6.2. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \cos 2x dx;$ 2) $\int \sin x \cos x dx;$

3) $\int ctg(2x)dx;$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+2}};$

5) $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{2-5x^6}dx;$ 6) $\int x \cdot (1+3x)^9 dx;$

7) $\int \frac{3x - \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$ 8) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+4e^{2x}}}dx$

Решение:

$$1) \int \cos 2x dx = \begin{vmatrix} 2x = t \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2}\cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + c.$$

$$2) \int \sin x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c =$$

$$=\frac{sin^2 x}{2}+c.$$

3) $$\int ctg(2x)dx=\left|\begin{matrix}2x=t\\ 2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int ctgtdt=\frac{1}{2}\int\frac{cos\,t}{sin\,t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}sin\,t=u\\ cos\,tdt=du\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}ln|u|+c=\frac{1}{2}ln|sin\,2x|+c.$$

4) $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x+2}}=\left|\begin{matrix}4x+2=t\\ 4dx=dt\\ dx=\dfrac{1}{4}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t}+c=\frac{1}{2}\sqrt{4x+2}+c$$

5) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{2-5x^6}dx.$

Заметим, что производная от функции $(2-5x^6)'=-30x^5$. Значит, можем сделать замену $t=2-5x^6$. Тогда

$$\int x^5\cdot\sqrt[3]{2-5x^6}dx=\left|\begin{matrix}t=2-5x^6\\ dt=-30x^5dx\\ x^5dx=\dfrac{dt}{-30}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{30}\int\sqrt[3]{t}dt=-\frac{1}{30}\int t^{\frac{1}{3}}dt=$$

$$=-\frac{1}{30}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=-\frac{3}{4\cdot 30}t^{\frac{4}{3}}+c=-\frac{1}{40}\sqrt[3]{(2-5x^6)^4}+c.$$

6) $\int x\cdot(1+3x)^9\,dx$

В данном примере нет необходимости возводить в девятую степень. Здесь необходимо воспользоваться заменой переменной $t=1+3x$, а затем выразить переменную x из этой замены.

$$\int x\cdot(1+3x)^9\,dx=\left|\begin{array}{l}1+3x=t;\\ 3dx=dt;\\ dx=\dfrac{dt}{3};\\ x=\dfrac{t-1}{3}\end{array}\right|=\int\frac{t-1}{3}\cdot t^9\,\frac{dt}{3}=\frac{1}{9}\int(t-1)\cdot t^9dt=$$

$$=\frac{1}{9}\int(t^{10}-t^9)dt=\frac{1}{9}\int t^{10}dt-\frac{1}{9}\int t^9dt=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^{11}}{11}-\frac{1}{9}\frac{t^{10}}{10}+c=$$

$$=\frac{1}{99}(1+3x)^{11}-\frac{1}{90}(1+3x)^{10}+c.$$

7) $\int\frac{3x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Разложим на разность двух интегралов и сделаем в каждом из получившихся интегралов замену переменных.

$$\int\frac{3x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=3\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx-\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,.$$

В первом интеграле сделаем замену $1-4x^2=t$.

Тогда

$$3\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \left| \begin{matrix} 1-4x^2 = t \\ -8xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{-8} \end{matrix} \right| = 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{3}{8}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{3}{8}\cdot 2\cdot\sqrt{t} + c = -\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} + c.$$

Во втором интеграле сделаем замену $arcsin\,2x = t$. Тогда

$$\int \frac{arcsin\,2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \left| \begin{matrix} arcsin\,2x = t \\ \dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + c = \frac{arcsin^2\,2x}{4} + c$$

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{3x - arcsin\,2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} - \frac{arcsin^2\,2x}{4} + c$

8) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+4e^{2x}}}dx$

Сделаем замену $e^x = t$. Тогда

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+4e^{2x}}}dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1/4 + t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}ln(t + \sqrt{1/4 + t^2}) + c = \frac{1}{2}ln(e^x + \sqrt{1/4 + e^{2x}}) + c.$$

Пример 6.3. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\displaystyle\int (2x-5)^8 dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-3x)^8}$;

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}dx;$ 4) $\displaystyle\int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}-5}dx;$

5) $\displaystyle\int \frac{8x^2 - 5ln^6 x}{x}dx;$ 6) $\displaystyle\int 6^{2x-5}dx;$

7) $\int \frac{tg(x-3)}{sin^2(x-3)}dx;$ 8) $\int e^{-4x^2+5}xdx;$

9) $\int 6^x\sqrt{5\cdot 6^x-2}dx;$ 10) $\int \frac{-5arctgx+4x}{1+x^2}dx;$

11) $\int \frac{sin(log_6(5x))}{x}dx$.

Решение:

1) $$\int(2x-5)^8dx=\left|\begin{matrix} t=2x-5 \\ dt=2dx \\ dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int t^8\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int t^8dt=$$

$$=\frac{t^9}{18}+c=\frac{(2x-5)^9}{18}+c\ .$$

2)

$$\int\frac{dx}{(5-3x)^8}=\left|\begin{matrix} 5-3x=t \\ -3dx=dt \\ dx=-\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=\int t^{-8}\left(-\frac{1}{3}dt\right)=-\frac{1}{3}\int t^{-8}dt=$$

$$=\frac{t^{-7}}{21}+c=\frac{1}{21(5-3x)^7}+c\ .$$

3)

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}dx=\int(x-3)^{-4/3}dx=\int(x-3)^{-4/3}d(x-3)=\frac{(x-3)^{-4/3+1}}{-4/3+1}+c=$$

$$=\frac{(x-3)^{-1/3}}{-1/3}+c=-\frac{\mathbf{3}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}}+\boldsymbol{c}\ .$$

4) $$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}-5}dx = \left| \begin{array}{l} e^{-2x}-5=t \\ -2e^{-2x}dx = dt \\ e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2}ln|t| + C = -\mathbf{\frac{1}{2}ln}\left|\boldsymbol{e^{-2x}}-\mathbf{5}\right| + \boldsymbol{c}.$$

5) $$\int \frac{8x^2-5ln^6 x}{x}dx = \int 8xdx - \int \frac{5ln^6 x}{x}dx = \frac{8x^2}{2} - 5\int \frac{ln^6 x}{x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = 4x^2 - 5\int t^6 dt = 4x^2 - \frac{5}{7}t^7 + c = \boldsymbol{4x^2} - \mathbf{\frac{5}{7}ln^7}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

6) $$\int 6^{2x-5}dx = \left| \begin{array}{l} 2x-5=t \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int 6^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int 6^t dt = \frac{1}{2}\frac{6^t}{ln6} + c =$$

$$= \frac{\mathbf{6}^{\boldsymbol{2x-5}}}{\mathbf{2ln6}} + \boldsymbol{c}.$$

7) $$\int \frac{tg(x-3)}{sin^2(x-3)}dx = \int tg(x-3)\frac{dx}{sin^2(x-3)} =$$

$$= \int tg(x-3)\left(-d\left(ctg\left(x-3\right)\right)\right) = -\int \frac{d\left(ctg\left(x-3\right)\right)}{ctg(x-3)} =$$

$$= \left|\mathrm{ctg}(x-3)=t\right| = -\int \frac{dt}{t} = -ln\,|\,t\,| + c = -ln\,|\,ctg(x-3)\,| + c.$$

8) $$\int e^{-4x^2+5}xdx = \left| \begin{array}{l} -4x^2+5=t \\ -8xdx=dt \\ xdx=-\dfrac{1}{8}dt \end{array} \right| = \int e^t\left(-\frac{1}{8}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\int e^t dt = -\frac{1}{8}e^t + c = \mathbf{-\frac{1}{8}e^{-4x^2+5}} + c.$$

9) $$\int 6^x\sqrt{5\cdot 6^x-2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 5\cdot 6^x-2=t \\ 5\cdot 6^x\ ln\,6dx=dt \\ 6^x dx=\dfrac{dt}{5\,ln\,6} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{ln\,6} =$$

$$= \frac{1}{5\,ln\,6}\int\sqrt{t}dt = \frac{1}{5\,ln\,6}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{15\,ln\,6}\cdot\sqrt{u^3} + c =$$

$$= \frac{2}{15\,ln\,6}\cdot\sqrt{(5t-2)^3} + c = \mathbf{\frac{2}{15ln6}}\cdot\sqrt{\mathbf{(5\cdot 6^x-2)^3}} + c$$

10) $$\int\frac{-5\text{arctg}x+4x}{1+x^2}dx = -5\int\frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx + 4\int\frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1)\displaystyle\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} atctgx=t \\ \dfrac{dx}{1+x^2}=dt \end{array} \right| = \int tdt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{arctg^2x}{2}+c \\ \\ 2)\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln\,|\,t\,| = \frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|+c \end{array} \right| =$$

$$= -\mathbf{\frac{5}{2}arctg^2x + 2ln\left|x^2+1\right|} + \boldsymbol{c}.$$

11) $\int \frac{sin(log_6(5x))}{x}dx = \left| \begin{array}{l} log_6(5x) = t \\ \frac{5}{5x\,ln 6}dx = dt \\ \frac{dx}{x} = ln 6 \cdot dt \end{array} \right| = ln 6 \int sin\, tdt =$

$= ln 6(-cos\,t) + c = \mathbf{-\,ln 6 \cdot cos(log_6(5}\boldsymbol{x}\mathbf{))} + c$.

6.3. Интегрирование по частям.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на множестве *E*. Тогда справедлива следующая формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)dx,$$

или данное равенство можно записать короче:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Метод интегрирования по частям применяется в том случае, когда интеграл $\int vdu$ вычисляется проще, чем интеграл $\int udv$. Выбирать *u* и *dv* следует так, чтобы интегрирование дифференциала *dv* не представляло трудностей, и чтобы замена *u* на *du* и *dv* на *v* в совокупности приводили к упрощению подынтегрального выражения.

Например, вычислим интеграл $\int x \cdot ln\,xdx$.

$$\int x \cdot ln\, xdx = \left| \begin{array}{ll} u = ln\, x; & du = \dfrac{dx}{x}; \\ dv = xdx; & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot ln\, x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot ln\, x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \cdot ln\, x - \frac{x^2}{4} + c\,.$$

Заметим, что попытка взять $u = x$, а $dv = ln\, xdx$ неудачна, так как найти функцию v в этом случае возможно, только применив еще раз интегрирование по частям. В результате интеграл $\int vdu$ будет еще сложнее, чем интеграл $\int udv$.

Иногда для получения результата необходимо несколько раз применить интегрирование по частям.

Например, для вычисления интеграла $\int x^2 e^x dx$ формулу интегрирования по частям необходимо применить два раза. Тогда имеем:

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & du = 2xdx; \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx; \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx \right) =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c\,.$$

Заметим, что попытка взять $u = e^x$, а $dv = x^2 dx$ неудачна, так как при этом мы получили бы более сложный, чем исходный интеграл $\int vdu = \int e^x \dfrac{x^3}{3} dx$.

При интегрировании по частям за функцию u необходимо брать тот множитель, который упрощается при дифференцировании. Так, например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена степени n на показательную или тригонометрическую функции, то в этом случае за u надо обозначить многочлен, так как производная понизит степень многочлена и, применив интегрирование по частям n раз, мы в конце концов получим интеграл от показательной или тригонометрической функций, которые являются табличными. Если же под знаком интеграла стоит произведение многочлена на обратные тригонометрические функции или на логарифмическую функцию, то в этом случае за u необходимо обозначить эти функции. Тогда при нахождении первообразной от многочлена степень его повысится, но в результате дифференцирования обратных тригонометрических функций или логарифмической функции эти функции упростятся, соответственно упростится и искомый интеграл.

В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл.

Например, для того, чтобы вычислить интеграл $\int e^{2x}\cos xdx$ необходимо два раза проинтегрировать по частям. В результате в правой части мы получим выражение, содержащее первоначальный интеграл:

$$\int e^{2x}\cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx;\ v = \sin x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x -$$

$$-\int \sin x \cdot 2e^{2x}dx = e^{2x}\sin x - 2\int \sin x \cdot e^{2x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx;\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x - 2(e^{2x}(-\cos x) +$$

$$+2\int \cos x \cdot e^{2x}dx) = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x \cdot e^{2x}dx\,.$$

Получили уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного. Решим это уравнение.

$$\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x \cdot e^{2x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$$

Следовательно, $\int e^{2x}\cos xdx = \frac{1}{5}(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x) + c.$

Пример 6.4. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int (x-3)\cos 2xdx;$ 2) $\int \cos(\ln x)dx;$

3) $\int x\ln^2 xdx;$ 4) $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x};$

5) $\int arctgxdx;$ 6) $\int x^2 \cdot arcsin\, xdx$;

7) $\int (3x-4)e^{-6x}dx$; 8) $\int (2x^2+5x-1)sin\, 4xdx.$

Решение:

$$1)\int (x-3)cos\, 2xdx = \begin{vmatrix} u = x-3;\ du = dx; \\ dv = cos\, 2xdx;\ v = \frac{1}{2}sin\, 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(x-3)sin\, 2x - \frac{1}{2}\int sin\, 2xdx = \frac{1}{2}(x-3)sin\, 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}cos\, 2x\right) + c = \frac{1}{2}(x-3)sin\, 2x + \frac{1}{4}cos\, 2x + c\, .$$

$$2)\ \int cos(ln\, x)dx = \begin{vmatrix} u = cos(ln\, x);\ \ du = -sin(ln\, x)\frac{1}{x}dx; \\ dv = dx; \qquad v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\, cos(ln\, x) + \int x \cdot sin(ln\, x)\frac{1}{x}dx = x\, cos(ln\, x) +$$

$$+\int sin(ln\, x)dx = = \begin{vmatrix} u = sin(ln\, x);\ \ du = cos(ln\, x)\frac{1}{x}dx; \\ dv = dx; \qquad v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\, cos(ln\, x) + x\, sin(ln\, x) - \int x \cdot cos(ln\, x)\frac{1}{x}dx = x\, cos(ln\, x) +$$

$$x\, sin(ln\, x) - \int cos(ln\, x)dx\, .$$

В результате в правой части мы получили выражение, содержащее первоначальный интеграл, то есть, имеем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного. Решим это уравнение.

$$\int cos(ln\, x)dx = x\, cos(ln\, x) + x\, sin(ln\, x) - \int cos(ln\, x)dx\, .$$

$$2\int cos(ln\, x)dx = x\, cos(ln\, x) + x\, sin(ln\, x)\, .$$

Следовательно, $\int cos(ln\,x)dx = \frac{x}{2}(cos(ln\,x) + sin(ln\,x)) + c.$

3) $$\int x\,ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = ln^2 x; & du = 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} dx; \\ dv = xdx; & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} ln^2 x - \int x \cdot ln\,x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = ln\,x; & du = \frac{1}{x} dx; \\ dv = xdx; & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} ln\,x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} ln^2 x - \frac{x^2}{2} ln\,x + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} (ln^2 x - ln\,x) + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} (ln^2 x - ln\,x + \frac{1}{2}) + c\,.$$

4) $$\int \frac{x\cos x dx}{sin^3 x} = \begin{vmatrix} u = x; \quad du = dx; & dv = \frac{cos\,x}{sin^3 x} dx; \\ v = \int \frac{cos x dx}{sin^3 x} = \int \frac{d\,sin\,x}{sin^3 x} = -\frac{1}{2\,sin^2 x} & \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x}{2\,sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{sin^2 x} = -\frac{x}{2\,sin^2 x} - \frac{1}{2} ctgx + c\,.$$

5) $$\int arctgx dx = \begin{vmatrix} u = arctgx; & du = \frac{1}{x^2 + 1} dx; \\ dv = dx; & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot arctgx - \int \frac{xdx}{x^2+1} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2} ln\,|\,t\,| + c =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2} ln\,|\,x^2+1\,| + c\,.$$

$$6)\ \int x^2\cdot arcsin\,x dx = \left| \begin{array}{ll} u = arcsin\,x; & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; \\ dv = x^2dx; & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3} arcsin\,x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{3} arcsin\,x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2(2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3} arcsin\,x + \frac{1}{6}\int \frac{x^2d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\ t = 1-x^2\ \right| = \frac{x^3}{3} arcsin\,x +$$

$$+ \frac{1}{6}\int \frac{(1-t)dt}{\sqrt{t}} = \frac{x^3}{3} arcsin\,x + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{6}\int \sqrt{t}dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} arcsin\,x + \frac{1}{3}\sqrt{t} - \frac{\sqrt{t^3}}{9} =$$

$$= \frac{x^3}{3} arcsin\,x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + c\,.$$

$$7)\int (3x-4)e^{-6x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x-4; & dv = e^{-6x}dx; \\ du = 3dx; & v = \int e^{-6x}dx = \dfrac{e^{-6x}}{-6} \end{array} \right| =$$

$$= (3x-4)\left(-\frac{e^{-6x}}{6}\right) - \int \frac{e^{-6x}}{-6}(3dx) =$$

$$=-\frac{(3x-4)}{6}e^{-6x}+\frac{1}{2}\int e^{-6x}dx=$$

$$=-\frac{(3x-4)}{6}e^{-6x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-6x}}{-6}+c=-\frac{\mathbf{(3x-4)}}{\mathbf{6}}\mathbf{e}^{-6x}-\frac{\mathbf{e}^{-6x}}{\mathbf{12}}+c\,.$$

8) $\int(2x^2+5x-1)\sin 4xdx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=2x^2+5x-1; & dv=\sin 4xdx; \\ du=(4x+5)dx; & v=\int\sin 4xdx=-\frac{\cos 4x}{4}\end{matrix}\right|=$$

$$=\left(2x^2+5x-1\right)\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)-\int\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)(4x+5)dx=$$

$$=-\frac{2x^2+5x-1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}\int(4x+5)\cos 4xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} 4x+5=u; & dv=\cos 4xdx; \\ 4dx=du; & v=\int\cos 4xdx=\frac{\sin 4x}{4}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2x^2+5x-1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}\left((4x+5)\frac{\sin 4x}{4}-\int\frac{\sin 4x}{4}4dx\right)=$$

$$=-\frac{2x^2+5x-1}{4}\cos 4x+\frac{(4x+5)}{16}\sin 4x-\frac{1}{4}\int\sin 4xdx=$$

$$=-\frac{\mathbf{2x^2+5x-1}}{\mathbf{4}}\mathbf{\cos 4x}+\frac{\mathbf{(4x+5)}}{\mathbf{16}}\mathbf{\sin 4x}+\frac{\mathbf{\cos 4x}}{\mathbf{16}}+\boldsymbol{c}\,.$$

6. 4. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим интегралы вида $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$,

где $P_m(x)$ – многочлен степени m от переменной x,
$Q_n(x)$ – многочлен степени n от переменной x.

Рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то есть $m < n$.

Если $m \geq n$, то дробь называется неправильной. В этом случае необходимо, разделив многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ по правилу деления многочленов, представить ее в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}.$$

где $M_{m-n}(x)$ – целая часть, многочлен степени $m - n$;

$R_r(x)$ – многочлен степени $r < n$.

Интегрирование многочлена $M_{m-n}(x)$ не доставляет никаких затруднений.

Для нахождения интеграла $\int \dfrac{R_r(x)dx}{Q_n(x)}$ разложим дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов. Это разложение осуществляется следующим образом. Сначала разложим знаменатель на множители. Многочлен $Q_n(x)$ может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами:

$$Q_n(x) = (x-a)^k \ldots (x^2+px+q)^t \ldots,$$

где a – k- кратный действительный корень уравнения $Q_n(x)=0$, а квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ действительных корней не имеет. Тогда дробь вида $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде суммы так называемых простейших дробей следующим образом:

- каждому множителю вида $(x-a)$ в разложении $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей соответствует простейшая дробь вида $\dfrac{A}{x-a}$;

- каждому множителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма k простейших дробей вида $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$;

- каждому множителю вида (x^2+px+q) соответствует простейшая дробь вида $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$;

- каждому множителю вида $(x^2+px+q)^t$ соответствует сумма t простейших дробей вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+px+q)^t}.$$

Таким образом, мы получим, что

$$\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+px+q)^t}+\ldots$$

Для нахождения коэффициентов $A_1,A_2,\ldots A_k,\ldots,B_1,C_1,B_2,C_2,\ldots,B_t,C_t\ldots$ приводим дроби к общему знаменателю и приравниваем числитель получившейся дроби к многочлену $R_r(x)$. Затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, мы получим систему линейных уравнений, из которой и найдем неопределенные коэффициенты. Можно также неопределенные коэффициенты найти, подставляя вместо x подходящим образом подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя рациональной дроби).

В результате нахождение $\int\dfrac{R_r(x)dx}{Q_n(x)}$ сведется к нахождению интегралов следующего вида:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\ln|x-\alpha|+c,$$

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}+c,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx, \text{ где } p^2-4q<0.$$

При вычислении интеграла $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$ сделаем замену $t=\frac{p}{2}+x$. В результате получим интеграл вида $\int \frac{Ct+D}{(t^2+a^2)^k}dt$.

В числителе выделим производную знаменателя $\left(t^2+a\right)'=2t$:

$$\int \frac{Ct+D}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{C}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^k}+D\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{C}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}+$$

$$+D\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{C}{2}\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+D\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Если $k=1$, то $\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+c$.

Если $k>1$, то, применяя интегрирование по частям, понижаем степень k:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t, \quad du=dt, \quad dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k}, \\ v=\displaystyle\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Если $k-1=1$, то получим табличный интеграл, если $k-1>1$, то снова интегрируем по частям.

Пример 6.5. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{2x-5}{x-3}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x+2)(4x-5)}$;

3) $\int \frac{4x-3}{2x^2+6x-1}dx$; 4) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;

5) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

7) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; 8) $\int \frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$;

9) $\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx$; 10) $\int \frac{2x^3+5x^2-x+3}{4x^2-6x+8}dx$;

11) $\int ln(3x^2-4x+6)dx$.

Решение:

1) $\int \frac{2x-5}{x-3}dx$.

Дробь, стоящая под знаком интеграла неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Приведем дробь к правильному виду. Выделим целую часть и получим в результате два табличных интеграла:

$$\int \frac{2x-5}{x-3}dx = \int \frac{2(x-3)+6-5}{x-3}dx = \int\left(\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int 2dx + \int \frac{dx}{x-3} = 2\int dx + \int \frac{dx}{x-3} = 2x + \int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$= 2x + ln|x-3| + c$.

2) $\int \frac{dx}{(x+2)(4x-5)}$.

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.
Разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(x+2)(4x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{4x-5} = \frac{A(4x-5)+B(x+2)}{(x+2)(4x-5)};$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A и B:

$$1 = A(4x-5)+B(x+2).$$

Подставим $x=-2$, тогда получим

$$1 = A(-8-5)+B\cdot 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{13},$$

подставим $x=\frac{5}{4}$, тогда получим $1 = A\cdot 0 + B(\frac{5}{4}+2) \Rightarrow B = \frac{4}{13}$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+2)(4x-5)} = \frac{1}{13}\int\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{4x-5}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{13}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{4}{13}\int\frac{dx}{4x-5} = -\frac{1}{13}\int\frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{4}{13}\int\frac{{}^{1}\!/\!{}_{4}\, d(4x-5)}{4x-5} =$$

$$= -\frac{1}{13}ln|x+2| + \frac{1}{13}ln|4x-5| + c = \mathbf{\frac{1}{13}ln\left|\frac{4x-5}{x+2}\right|} + c\,.$$

3) $\int \frac{4x-3}{2x^2+6x-1}dx$.

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя. Выделим в числителе производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе:

$$\int \frac{4x-3}{2x^2+6x-1}dx = \left| \begin{matrix} \left(2x^2+6x-1\right)' = 4x+6 \Rightarrow \\ d\left(2x^2+6x-1\right) = (4x+6)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{(4x+6)-6-3}{2x^2+6x-1}dx = \int \frac{4x+6}{2x^2+6x-1}dx - 9\int \frac{dx}{2x^2+6x-1} =$$

| Во втором интеграле в знаменателе выделим полный квадрат |

$$= \int \frac{d\left(2x^2+6x-1\right)}{2x^2+6x-1} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x-\frac{1}{2}} = ln\left|2x^2+5x-1\right| -$$

$$-\frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}} = ln\left|2x^2+5x-1\right| - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{4}} =$$

$$= ln\left|2x^2+5x-1\right| - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{11}{4}}}\cdot ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{11}{4}}}{x+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{11}{4}}}\right| + c =$$

$$= \mathbf{ln}\left|\mathbf{2x^2+5x-1}\right| - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2\sqrt{11}}}\cdot \mathbf{ln}\left|\frac{\mathbf{2x}+3-\sqrt{\mathbf{11}}}{\mathbf{2x+3}+\sqrt{\mathbf{11}}}\right| + \boldsymbol{c}\,.$$

4) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Дробь, стоящая под знаком интеграла неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Приведем дробь к правильному виду. Выделим целую часть:

$$\frac{x^3-1}{4x^3-x} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3-1}{x^3-x/4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3-x/4+x/4-1}{x^3-x/4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^3-x/4}{x^3-x/4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x/4-1}{x^3-x/4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x-4}{4x^3-x}\right).$$

Тогда

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{x-4}{4x^3-x}\right)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}x +$$
$$+\frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}dx.$$

Вычислим интеграл $\int \frac{x-4}{4x^3-x}dx$, разложив дробь, стоящую под знаком интеграла, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Разложим знаменатель на множители:

$$4x^3-x = x(4x^2-1) = x(2x-1)(2x+1).$$

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)}{x(2x-1)(2x+1)}$$

и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$x-4 = A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)$$

Подставляя $x = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, найдем коэффициенты A, B, C.

При $x = 0$ имеем $-4 = A(-1) \Rightarrow A = 4$;

при $x = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{1}{2}-4 = B\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \Rightarrow B = -\frac{7}{2}$;

при $x = -\frac{1}{2}$ имеем $-\frac{1}{2}-4 = C\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2) \Rightarrow B = -\frac{9}{2}$.

Тогда

$$\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{4}{x}+\frac{-7/2}{2x-1}+\frac{-9/2}{2x+1}.$$

Следовательно, искомый интеграл можно также разложить на сумму трех интегралов:

$$\int \frac{x-4}{4x^3-x}dx = 4\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$= 4\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{4}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1} - \frac{9}{4}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} =$$

$$= 4\ln|x| - \frac{7}{4}\ln|2x-1| - \frac{9}{4}\ln|2x+1| + c.$$

Тогда имеем:

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\left(4\ln|x| - \frac{7}{4}\ln|2x-1| - \right.$$

$$\left. -\frac{9}{4}\ln|2x+1| \right) + c = \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + c$$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Вычислим интеграл, разложив дробь, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Разложим знаменатель на множители:

$x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$.

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$\displaystyle\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$ и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$x^2 - 3x + 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$.

Подставляя $x = 0, -1, 1$, найдем коэффициенты A, B, C.

При $x = 0$ имеем $2 = A \Rightarrow A = 2$;

при $x = -1$ имеем $1 + 3 + 2 = -C \Rightarrow C = -6$;

при $x = 1$ имеем

$$1-3+2=4A+2B+C \Rightarrow 0=8+2B-6 \Rightarrow B=-1$$

Тогда

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл можно разложить на сумму трех интегралов:

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-6\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}-6\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=$$

$$=2ln|x|-ln|x+1|+6(x+1)^{-1}+c=$$

$$=2ln|x|-ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+c.$$

6) $\int\frac{dx}{x^3+1}$

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Вычислим интеграл, разложив дробь, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$ и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

Подставляя $x=0,-1,1$, найдем коэффициенты A,B,C.

При $x=0$ имеем $\quad 1=A+C$;

при $x=-1$ имеем $\quad 1=3A \Rightarrow A=\frac{1}{3}$;

при $x=1$ имеем $\quad 1=A+2B+2C$.

Получили следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A=\frac{1}{3} \\ A+2B+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}+C=1 \\ A=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}+2B+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\frac{2}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ B+C=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=\frac{2}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Следовательно, искомый интеграл можно разложить на сумму двух интегралов:

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x-2)dx}{x^2-x+1}=$$

Для вычисления второго интеграла в числителе выделим производную знаменателя.

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}ln\,|\,x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

В третьем слагаемом в знаменателе выделим полный квадрат

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1}=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3/4}}arctg\frac{x-1/2}{\sqrt{3/4}}+c=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c\ .$$

7) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Вычислим интеграл, разложив дробь, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Разложим знаменатель на множители:

$(x^2+1)(x^2+x)=x(x+1)(x^2+1)$.

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1)}{x(x+1)(x^2+1)}$$

и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$1=A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1)$$

Подставляя $x=0,-1,1,2$, найдем коэффициенты A,B,C,D.

При $x=0$ имеем $1=A$;

при $x=-1$ имеем $1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$;

при $x=1$ имеем $1=4A+2B+2C+2D$;.

при $x=2$ имеем $1=15A+10B+12C+6D$.

Получили следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ 4A+2B+2C+2D=1 \\ 15A+10B+12C+6D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ 4-1+2C+2D=1 \\ 15-5+12C+6D=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ 2C+2D=-2 \\ 12C+6D=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ D=-1-C \\ 4C+2D=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ D=-1-C \\ 2C=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ D=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Следовательно, искомый интеграл можно разложить на сумму трех интегралов:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+1}=$$

$$= ln\,|\,x\,| - \frac{1}{2} ln\,|\,x+1\,| - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= ln\,|\,x\,| - \frac{1}{2} ln\,|\,x+1\,| - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2} arctgx =$$

$$= ln\,|\,x\,| - \frac{1}{2} ln\,|\,x+1\,| - \frac{1}{4} ln\,|\,x^2+1\,| - \frac{1}{2} arctgx + c\,.$$

8) $\int \frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Вычислим интеграл, разложив дробь, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Знаменатель уже разложен на множители, так как дискриминант квадратного трехчлена x^2+4x+5 меньше нуля.

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}\,.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+4x+5) + B(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$$

и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$4x^3+8x^2+10x+8 = A(x-1)(x^2+4x+5) +$$

$$+ B(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x-1)^2$$

Подставляя $x = 0, 1, -1, -2$, найдем коэффициенты A, B, C и D.

При $x=0$ имеем $8 = -5A + 5B + D$;

при $x=-1$ имеем

$$-4+8-10+8=-4A+2B-4C+4D;$$

при $x=1$ имеем $4+8+10+8=10B \Rightarrow B=3$;

при $x=-2$ имеем $-32+32-20+8=-3A+B-18C+9D$.

Получили следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5A+5B+D=8 \\ -4A+2B-4C+4D=2 \\ B=3 \\ -3A+B-18C+9D=-12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5A+15+D=8 \\ -4A+6-4C+4D=2 \\ B=3 \\ -3A+3-18C+9D=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=5A-7 \\ A+C-D=1 \\ B=3 \\ A+6C-3D=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D=5A-7 \\ A+C-5A+7=1 \\ B=3 \\ A+6C-15A+21=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=5A-7 \\ C=4A-6 \\ B=3 \\ -14A+6(4A-6)=-16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D=3 \\ C=2 \\ B=3 \\ A=2 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+3}{x^2+4x+5}$$

Следовательно, искомый интеграл можно разложить на сумму трех интегралов:

$$\int \frac{4x^3+8x^2+10x+8}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx=\int \frac{2dx}{x-1}+\int \frac{3dx}{(x-1)^2}+$$

$$+\int \frac{2x+3}{x^2+4x+5}dx=$$

Для вычисления третьего интеграла в числителе выделим производную знаменателя.

$$=2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+3\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\int\frac{(2x+4)-4+3}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=2ln\,|\,x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5}-\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

В четвертом слагаемом в знаменателе выделим полный квадрат

$$=2ln\,|\,x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}-\int\frac{dx}{(x+2)^2-4+5}=$$

$$=2ln\,|\,x-1|-\frac{3}{x-1}+ln\,|\,x^2+4x+5|-\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=$$

$$=2ln\,|\,x-1|-\frac{3}{x-1}+ln\,|\,x^2+4x+5|-arctg(x+2)+c\,.$$

9) $\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx$

Дробь, стоящая под знаком интеграла правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Вычислим интеграл, разложив дробь, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Знаменатель уже разложен на множители.

Тогда разложение на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\,.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}==\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$$

и приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$x^2+x-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$$

Здесь проще приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой правой частях.

$$x^2+x-1=A(x^4+2x^2+1)+Bx^4+Cx^3+Bx^2+Cx+Dx^2+Ex$$

Тогда

$$\begin{array}{lll} x^4: & A+B=0; & A=-1; \\ x^3: & C=0; & B=1; \\ x^2: & 2A+B+D=1; \quad \Rightarrow & C=0; \\ x: & C+E=1; & E=1; \\ x^0 & A=-1 & D=2. \end{array}$$

Тогда

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл можно разложить на сумму трех интегралов:

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

Найдем каждый из трех получившихся интегралов.

$$-\int\frac{dx}{x}=-ln|x|+c;$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c;$$

$$\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+$$

$$+\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=$$

Последний интеграл интегрируем по частям.

$$=\left|\begin{array}{l} u=x; \quad du=dx; \quad dv=\dfrac{xdx}{(x^2+1)^2}; \\ v=\int\dfrac{xdx}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+arctgx-\left(-\frac{x}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{2(x^2+1)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+arctgx+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}arctgx+c=$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}arctgx+\frac{x}{2(x^2+1)}+c.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx=-ln\,|\,x\,|+\frac{1}{2}ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}arctgx+\frac{x}{2(x^2+1)}+c.$$

10) $\displaystyle\int\frac{2x^3+5x^2-x+3}{4x^2-6x+8}dx$.

Дробь неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Приведем дробь к правильному виду. Для этого поделим многочлен, стоящий в числителе на многочлен, стоящий в знаменателе:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2-x+3 & 4x^2-6x+8 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-3x^2+4x} & \dfrac{1}{2}x+2 \\ 8x^2-5x+3 & \\ \underline{8x^2-12x+16} & \\ 7x-13, & \end{array}$$

В результате получили

$$\frac{2x^3+5x^2-x+3}{4x^2-6x+8}=\frac{1}{2}x+2+\frac{7x-13}{4x^2-6x+8}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^3+5x^2-x+3}{4x^2-6x+8}dx=\int\left(\frac{1}{2}x+2+\frac{7x-13}{4x^2-6x+8}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int xdx+2\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{7x-13}{2x^2-3x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int xdx+2\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{7x-13}{2x^2-3x+4}dx=J.$$

В третьем интеграле выделим в числителе производную от многочлена, стоящего в знаменателе.

Так как $(2x^2-3x+4)'=4x-3$, то $d(2x^2-3x+4)=(4x-3)dx$. Тогда

$$J=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{7}{4}(4x-3)+\frac{21}{4}-13}{2x^2-3x+4}dx=\frac{x^2}{4}+2x+$$

$$+\frac{7}{8}\int\frac{d\left(2x^2-3x+4\right)}{2x^2-3x+4}dx-\frac{31}{8}\int\frac{dx}{2x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{x^2}{4}+2x+\frac{7}{8}\int\frac{d\left(2x^2-3x+4\right)}{2x^2-3x+4}dx-\frac{31}{16}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+2}=$$

В последнем интеграле выделим полный квадрат по переменной x.

$$=\frac{x^2}{4}+2x+\frac{7}{8}ln\left|2x^2-3x+4\right|-\frac{31}{16}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2}=$$

$$=\frac{x^2}{4}+2x+\frac{7}{8}\ln\left|2x^2-3x+4\right|-\frac{31}{16}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}=\frac{x^2}{4}+2x+$$

$$+\frac{7}{8}\ln\left|2x^2-3x+4\right|-\frac{31}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{23}{16}}}\cdot arctg\frac{x-\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{23}{16}}}+c=$$

$$=\frac{x^2}{4}+2x+\frac{7}{8}ln\left|2x^2-3x+4\right|--\frac{31}{16}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}}\cdot arctg\,\frac{4x-3}{\sqrt{23}}+c=$$

$$=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\mathbf{ln}\left|\mathbf{2}\boldsymbol{x^2}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\right|-\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{23}}}\cdot\mathbf{arctg}\,\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{23}}}+\boldsymbol{c}\,.$$

$$11)\int ln(3x^2-4x+6)dx=\left|\begin{matrix} u=ln\left(3x^2-4x+6\right); & dv=dx; \\ du=\dfrac{6x-4}{3x^2-4x+6}dx; & v=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\,ln\left(3x^2-4x+6\right)-\int x\cdot\frac{6x-4}{3x^2-4x+6}dx=$$

$$=x\,ln\left(3x^2-4x+6\right)-\int\frac{6x^2-4x}{3x^2-4x+6}dx=I.$$

Дробь, стоящая под знаком интеграла, неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Приведем дробь к правильному виду. Для этого выделим целую часть, поделив многочлен, стоящий в числителе, на многочлен, стоящий в знаменателе столбиком с остатком:

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-4x & \underline{3x^2-4x+6} \\ \underline{6x^2-8x+12} & 2 \\ \qquad 4x-12 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{6x^2-4x}{3x^2-4x+6}=2+\frac{4x-12}{3x^2-4x+6}$$

Тогда

$$I=x\,ln\left(3x^2-4x+6\right)-\int\left(2+\frac{4x-12}{3x^2-4x+6}\right)dx=$$

$$=x\,ln(3x^2-4x+6)-2\int dx-4\int\frac{x-3}{3x^2-4x+6}dx\,.$$

Для нахождения второго интеграла выделим в числителе производную знаменателя $\left(3x^2-4x+6\right)'$ = 6x -4. Тогда

$$\int\frac{x-3}{3x^2-4x+6}dx=\int\frac{\frac{1}{6}(6x-4)+\frac{4}{6}-3}{3x^2-4x+6}dx=\frac{1}{6}\int\frac{6x-4}{3x^2-4x+6}dx-$$

$$-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{3x^2-4x+6}=\frac{1}{6}\int\frac{d\left(3x^2-4x+6\right)}{3x^2-4x+6}dx-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{3\left(x^2-\frac{4}{3}x+2\right)}=$$

Во втором интеграле в знаменателе выделим полный квадрат по переменной *x:*

$$=\frac{1}{6}ln\left|3x^2-4x+6\right|-\frac{7}{9}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+2}=\frac{1}{6}ln\left|3x^2-4x+6\right|-$$

$$-\frac{7}{9}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{14}{9}}=\frac{1}{6}ln\left|3x^2-4x+6\right|-\frac{7}{9}\cdot\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{14}}arctg\,\frac{x-2/3}{\sqrt{14/9}}+c=$$

$$=\frac{1}{6}ln\left|3x^2-4x+6\right|-\frac{7}{3\sqrt{14}}arctg\,\frac{3x-2}{\sqrt{14}}+c\,.$$

Тогда:

$$I=x\,ln\left(3x^2-4x+6\right)-2x+\frac{2}{3}ln\left|3x^2-4x+6\right|+$$

$$+\frac{28}{3\sqrt{14}}arctg\,\frac{3x-2}{\sqrt{14}}+c\,.$$

6.5. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы от выражений, содержащих только тригонометрические функции, то есть интегралы вида

$$\int R(sin\,x, cos\,x)dx$$

1) Пусть дан интеграл вида $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ где $m, n \in Z$.

а) Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное положительное, то подстановка $\cos x = t$ или $sin x = t$ сразу приводит интеграл к сумме интегралов от степенных функций

Например, если $m = 2k + 1$ – положительное нечетное число ($k \in N$), то делаем замену $\cos x = t$.
Тогда

$$\int \cos^n x \sin^{2k+1} x dx = -\int \cos^n x \sin^{2k} x \, d\cos x =$$
$$= -\int \cos^n x (1-\cos^2 x)^k d\cos = -\int t^n (1-t)^k dt.$$

Если $n = 2k + 1 (k \in N),$ – то возможна аналогичная замена $\sin x = t.$

б) Если m и n – четные и положительные, то применяем формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

в) Если сумма $m + n = -2k$ ($k \in N$) – целое отрицательное четное число, то делаем замену $\operatorname{tg} x = t$ и пользуемся формулами

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\operatorname{tg} x = dt.$$

В остальных случаях интегралы такого вида вычисляются интегрированием по частям.

2) Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\, dx, \int \operatorname{ctg}^m x\, dx,$ где m – четное число можно вычислить, применяя следующие формулы:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \ \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

3) Для вычисления интегралов вида $\int cos(ax)\,sin(bx)\,dx,$ $\int sin(ax)\,sin(bx)\,dx$, $\int cos(ax)\,cos(bx)dx$ пользуемся формулами:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

4) Интегралы вида $\int R(sin\,x, cos\,x)dx$, где R – рациональная функция от функций $\sin x$ и $\cos x$, с помощью подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$x = 2\mathrm{arctg}\,t.$$

Если $\cos x$ и $\sin x$ содержатся в интеграле только в четных степенях, то можно сделать замену $\mathrm{tg}\,x = t$.

Тогда

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$x = \mathrm{arctg}\,t.$$

Интегрирование гиперболических функций производится точно также как и интегрирование тригонометрических функций. Напомним основные формулы для гиперболических функций.

$$ch^2x - sh^2x = 1; \qquad ch^2x = \frac{ch2x+1}{2};$$

$$sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}; \qquad sh2x = 2shxchx;$$

$$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}; \qquad cth^2x - 1 = \frac{1}{sh^2x}.$$

Пример 6.6. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int(5sin8x - 4cos6x)dx$; 2) $\int sin^3 x cos^4 xdx;$

3) $\int \frac{cos^3 xdx}{sin^5 x};$ 4) $\int sin^2 x cos^4 xdx;$

5) $\int \frac{dx}{sin x cos^3 x};$ 6) $\int \frac{dx}{sin^3 x};$

7) $\int \frac{dx}{3+5cos x};$ 8) $\int \frac{dx}{sin^2 x - 3cos^2 x};$

9) $\int \frac{dx}{1+2tgx}.$

Решение:

1) $\int(5sin8x - 4cos6x)dx = 5\int sin8xdx - 4\int cos6xdx =$

$$= \frac{5}{8}\int sin8xd(8x) - \frac{4}{6}\int cos6xd(6x) =$$

$$= -\frac{5}{8}\mathbf{cos8}\boldsymbol{x} - \frac{2}{3}\mathbf{sin6}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}.$$

2)

$$\int sin^3 x cos^4 xdx = \int(1-cos^2 x)cos^4 x sin xdx = \begin{vmatrix} cos x = t \\ -sin xdx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int(1-t^2)t^4dt = \int(t^6 - t^4)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + c =$$

$$=\frac{cos^7 x}{7}-\frac{cos^5 x}{5}+c\ .$$

$$3)\int\frac{cos^3 xdx}{sin^5 x}=\int\frac{(1-sin^2 x)cos\,xdx}{sin^5 x}=\begin{vmatrix}sin\,x=t\\ cos\,xdx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{(1-t^2)dt}{t^5}=\int\frac{dt}{t^5}-\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2t^2}+c=$$

$$=-\frac{1}{4\,sin^4 x}+\frac{1}{2\,sin^2 x}+c.$$

$$4)\int sin^2 x\,cos^4 xdx$$

Понизим степень по формулам понижения степени:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Тогда

$$\int sin^2 x\,cos^4 xdx=\int\frac{1-cos\,2x}{2}\cdot\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-cos\,2x)\cdot(1+2\,cos\,2x+cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+2\,cos\,2x+cos^2 2x-cos\,2x-2\,cos^2 2x-cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+cos\,2x-cos^2 2x-cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int cos\,2xdx-$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{1+cos\,4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int(1-sin^2 2x)cos\,2xdx=\frac{x}{8}+\frac{sin\,2x}{16}-\frac{1}{16}\int dx-$$

$$-\frac{1}{16}\int cos\,4xdx-\frac{1}{16}\int(1-sin^2 2x)cos\,2xd(2x)=\frac{x}{8}+\frac{sin\,2x}{16}-\frac{x}{16}-$$

$$-\frac{sin\,4x}{64}-\frac{1}{16}\int(1-sin^2 2x)d\,sin\,2x=\frac{x}{16}+\frac{sin\,2x}{16}-\frac{sin\,4x}{64}-$$

$$-\frac{sin\,2x}{16}+\frac{sin^3 2x}{48}+c=\frac{x}{16}+\frac{sin^3 2x}{48}-\frac{sin\,4x}{64}+c\ .$$

5) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

Заметим, что сумма показателей степеней у функций $\sin x$ и $\cos x$, четная отрицательная, следовательно, можно сделать замену $t = tgx$. Тогда выделим в интеграле производную от функции tgx:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{1}{\sin x \cos x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

Помножим числитель и знаменатель на $\cos x$ и воспользуемся формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$:

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{tgx \cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{1}{tgx}\left(1 + tg^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1+t^2}{t} dt = \int \frac{dt}{t} + \int tdt = ln\,|\,t\,| + \frac{t^2}{2} + c =$$

$$= ln\,|\,tgx\,| + \frac{tg^2 x}{2} + c\,.$$

6) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

Сделаем замену: $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$

Тогда
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \int \frac{2(1+t^2)^3 dt}{(1+t^2)\cdot 8t^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int tdt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} ln\,|\,t\,| + \frac{t^2}{8} + c =$$

$$= -\frac{1}{8tg^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} ln\,|\,tg^2 \frac{x}{2}\,| + \frac{1}{8} tg^2 \frac{x}{2} + c\,.$$

Данный интеграл можно вычислить и с помощью интегрирования по частям. Для этого в числителе запишем вместо единицы основное тригонометрическое тождество: $1 = sin^2 x + cos^2 x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \int \frac{(sin^2 x + cos^2 x)dx}{sin^3 x} = \int \frac{dx}{sin\,x} + \int \frac{cos^2 xdx}{sin^3 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = cos\,x; \;\; du = -sin\,xdx; \\ dv = \dfrac{cos\,x}{sin^3 x}dx;\; v = \displaystyle\int \frac{cos\,x}{sin^3 x}dx = \int \frac{d\,sin\,x}{sin^3 x} = -\frac{1}{2\,sin^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{sin\,x} - \frac{cos\,x}{2\,sin^2 x} - \int \frac{sin\,xdx}{2\,sin^2 x} = \int \frac{dx}{sin\,x} - \frac{cos\,x}{2\,sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin\,x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin\,x} - \frac{cos\,x}{2\,sin^2 x} = \frac{1}{2} ln\,|\,tg \frac{x}{2}\,| - \frac{cos\,x}{2\,sin^2 x} + c$$

Заметим, что ответы, полученные первым и вторым способом, совпадают, так как

$$-\frac{1}{8tg^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} ln\,|\,tg^2 \frac{x}{2}\,| + \frac{1}{8} tg^2 \frac{x}{2} + c = \frac{1}{2} ln\,|\,tg \frac{x}{2}\,| +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(tg^2 \frac{x}{2} - ctg^2 \frac{x}{2} \right) + c = \frac{1}{2} ln\,|\,tg \frac{x}{2}\,| + \frac{1}{8}\left(\frac{sin^2 \frac{x}{2}}{cos^2 \frac{x}{2}} - \frac{cos^2 \frac{x}{2}}{sin^2 \frac{x}{2}} \right) + c =$$

$$=\frac{1}{2}ln\,|\,tg\,\frac{x}{2}\,|+\frac{1}{8}\left(\frac{sin^4\frac{x}{2}-cos^4\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}sin^2\frac{x}{2}}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2}ln\,|\,tg\,\frac{x}{2}\,|+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(sin^2\frac{x}{2}-cos^2\frac{x}{2}\right)\left(sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2 x}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2}ln\,|\,tg\,\frac{x}{2}\,|+\frac{1}{2}\left(\frac{-cos\,x}{sin^2 x}\right)+c=\frac{1}{2}ln\,|\,tg\,\frac{x}{2}\,|-\frac{1}{2}\frac{cos\,x}{sin^2 x}+c\,.$$

7) $\int\frac{dx}{3+5cos\,x}$.

Сделаем замену $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда:

$$cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{dx}{3+5cos\,x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{2(1+t^2)dt}{(1+t^2)\left(3+3t^2+5-5t^2\right)}=2\int\frac{dt}{\left(8-2t^2\right)}=\int\frac{dt}{4-t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=-\frac{1}{4}ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+c=-\frac{1}{4}ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}-1}{tg\,\frac{x}{2}+1}\right|+c\,.$$

8) $\int\frac{dx}{sin^2 x-3cos^2 x}$.

Функции $\cos x$ и $\sin x$ входят в выражение подынтегральной функции только в четных степенях, тогда можно сделать замену

$\operatorname{tg} x = t.$

$$sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x - 3cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{3}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx-\sqrt{3}}\right| + c.$$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2tgx}.$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}.$

$$\int \frac{dx}{1+2tgx} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t)}.$$

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла на сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{2t+1}.$$

Приведем дроби, стоящие справа к общему знаменателю и приравняем числители получившейся дроби и дроби, стоящей слева.

$$1 = (At+B)(2t+1) + C(t^2+1).$$

Для нахождения коэффициентов A,B,C подставим вместо переменной t числа 0, -1/2 и 1.

При $t = -\dfrac{1}{2}$ имеем $\quad 1 = C \cdot \dfrac{5}{4} \Rightarrow C = \dfrac{4}{5};$

при $t = 0$ имеем $\quad 1 = B + C \Rightarrow B = \dfrac{1}{5};$

при $t = 1$ имеем $\quad 1 = 3A + 3B + 2C \Rightarrow A = -\dfrac{2}{5}.$

Следовательно, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+2t)} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{-2t+1}{t^2+1} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{2t+1}.$

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+2tgx} = \frac{1}{5}\int \frac{1-2t}{t^2+1}dt + \frac{4}{5}\int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{5}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} +$$

$$+\frac{4}{10}\int \frac{d(2t+1)}{2t+1} = \frac{1}{5}arctgt - \frac{1}{5}ln\left(t^2+1\right) + \frac{2}{5}ln\,|\,2t+1\,| + c =$$

$$= \frac{1}{5}arctg(tgx) - \frac{1}{5}ln\left(tg^2x+1\right) + \frac{2}{5}ln\,|\,2tgx+1\,| + c =$$

$$= \frac{1}{5}tgx - \frac{1}{5}ln\left(tg^2x+1\right) + \frac{2}{5}ln\,|\,2tgx+1\,| + c\,.$$

Пример 6.7. Вычислить неопределенные интегралы:

$$1)\ \int cos^6(2x+3)dx\,; \quad 2)\int sin\,x\cdot cos\,5x\cdot sin\,4xdx\,;$$

$$3)\int\left(tg\,2x-ctg\,5x\right)dx\,; \quad 4)\int\frac{\sin 6xdx}{1-3\sin 6x}\,;$$

$$5)\int\frac{dx}{5cos\,6x-4\,sin\,6x-2}\,.$$

Решение

$$1)\quad \int cos^6(2x+3)dx = \left|\begin{array}{l} t=2x+3 \\ dt=2dx \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int cos^6\,tdt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)^3 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int\left(1+3cos(2t)+3cos^2(2t)+cos^3(2t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int dt + 3\int cos\,2tdt + 3\int cos^2\,2tdt + \int cos^3\,2tdt\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(t + 3\int cos\,2t\frac{d(2t)}{2} + 3\int\frac{(1+cos\,4t)}{2}dt + \int cos^3\,2t\frac{d(2t)}{2}\right) =$$

$$=\frac{1}{16}\left(t+\frac{3}{2}sin\,2t+\frac{3}{2}\int dt+\frac{3}{2}\int cos\,4t\,\frac{d(4t)}{4}+\int cos^2 2t\,\frac{d\,sin\,2t}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(t+\frac{3}{2}sin\,2t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{8}sin\,4t+\frac{1}{2}\int\left(1-sin^2 2t\right)d\,sin(2t)\right)=$$

$$=|\sin 2t=u|=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}t+\frac{3}{2}sin\,2t+\frac{3}{8}sin\,4t+\frac{1}{2}\int\left(1-u^2\right)du\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}t+\frac{3}{2}sin\,2t+\frac{3}{8}sin\,4t+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+c\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}(2x+3)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}sin(4x+6)+\frac{3}{8}sin(8x+12)+\frac{sin\,2t}{2}-\frac{1}{2}\frac{sin^3 2t}{3}+c\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(5x+\frac{15}{2}+\frac{3}{2}sin(4x+6)+\frac{3}{8}sin(8x+12)+\frac{sin(4x+6)}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{sin^3(4x+6)}{6}+c\right)=\boldsymbol{\frac{1}{16}\left(5x+7{,}5+2\sin(4x+6)+\frac{3}{8}\sin(8x+12)+\right.}$$

$$\boldsymbol{\left.-\frac{\sin^3(4x+6)}{6}+c\right)}.$$

2) $\int sin\,x\cdot cos\,5x\cdot sin\,4x dx=$

$$=\int\frac{1}{2}\left(sin(x-5x)+sin(x+5x)\right)\cdot sin\,4xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(sin\,6x\,sin\,4x-sin^2 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(cos\,2x-cos\,10x\right)dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-cos\,8x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int cos\,2xdx-\frac{1}{4}\int cos\,10xdx-\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int cos\,8xdx=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{40}\sin 10x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{32}\sin 8x+c}.$$

3)

$$\int\left(tg\,2x-ctg\,5x\right)dx=\int\frac{sin\,2x}{cos\,2x}dx-\int\frac{cos\,5x}{sin\,5x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{sin\,2x}{cos\,2x}d(2x)-\frac{1}{5}\int\frac{cos\,5x}{sin\,5x}d(5x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(cos\,2x)}{cos\,2x}-\frac{1}{5}\int\frac{d(sin\,5x)}{sin\,5x}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}\left|\mathbf{cos2}\boldsymbol{x}\right|-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{ln}\left|\mathbf{sin5}\boldsymbol{x}\right|+\boldsymbol{c}$$

4) $$\int\frac{sin\,6x\,dx}{1-3sin\,6x}=\frac{1}{6}\int\frac{sin\,6x\,d(6x)}{1-3sin\,6x}=|u=6x|=\frac{1}{6}\int\frac{sin\,u\,du}{1-3sin\,u}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} tg\,\dfrac{u}{2}=t \\ sin\,u=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ du=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|=\frac{1}{6}\int\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1-\dfrac{6t}{1+t^2}}=\frac{1}{6}\int\frac{4tdt}{(1+t^2)(1+t^2-6t)}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{tdt}{(1+t^2)(1+t^2-6t)}.$$

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла на сумму простейших дробей.

$$\frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-6t+1\right)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2-6t+1}.$$

Приведем дроби, стоящие справа к общему знаменателю и приравняем числители получившейся дроби и дроби, стоящей слева.

$$t=(At+B)(t^2-6t+1)+(Ct+D)(t^2+1)\Rightarrow$$

$$t=At^3+Bt^2-6At^2-6Bt+At+B+Ct^3+Dt^2+Ct+D.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A,B,C и D приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях переменной t.

$$t^3:\ A+C=0;$$

$$t^2:\ B-6A+D=0;$$

$$t:\ -6B+A+C=1;$$

$$t^0:\ B+D=0.$$

А затем, решим получившуюся систему уравнений.

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-6A+D=0 \\ A-6B+C=1 \\ B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ B=-D \\ -6B=1 \\ -6A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ B=-\dfrac{1}{6} \\ D=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-6t+1\right)}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{t^2-6t+1}-\frac{1}{t^2+1}\right).$$

Вычислим интеграл:

$$\frac{2}{3}\int\frac{tdt}{(1+t^2)(1+t^2-6t)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\left(\int\frac{dt}{\left(t^2-6t+1\right)}-\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\int\frac{dt}{\left((t-3)^2-9+1\right)}-atctg\,t\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\int\frac{dt}{\left((t-3)^2-8\right)}-atctg\,t\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\,ln\left|\frac{t-3-\sqrt{8}}{t-3+\sqrt{8}}\right|-atctg\,t\right)+c=$$

$$=\left|t=tg\,\frac{u}{2}=tg\,3x\right|=\mathbf{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\,ln\left|\frac{tg3x-3-\sqrt{8}}{tg3x-3+\sqrt{8}}\right|-3x\right)}+\boldsymbol{c}\;.$$

5) $$\int\frac{dx}{5cos\,6x-4\,sin\,6x-2}=\begin{vmatrix} 6x=u \\ 6dx=du \\ dx=\dfrac{1}{6}du \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{du}{5cos\,u-4\,sin\,u-2}=\begin{vmatrix} tg\,\dfrac{u}{2}=t; \;\; sin\,u=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ cos\,u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,; \;\; du=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5\frac{1-t^2}{1+t^2}-4\frac{2t}{1+t^2}-2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{5-5t^2-8t-2-2t^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{-7t^2-8t+3}=-\frac{1}{21}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{7}t-\frac{3}{7}}=-\frac{1}{21}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{7}\right)^2-\frac{16}{49}-\frac{3}{7}}=$$

$$=-\frac{1}{21}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{7}\right)^2-\frac{37}{49}}=-\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{37}{49}}}ln\left|\frac{t+\frac{4}{7}-\sqrt{\frac{37}{49}}}{t+\frac{4}{7}+\sqrt{\frac{37}{49}}}\right|+c=$$

$$=-\frac{1}{6\sqrt{37}}ln\left|\frac{7t+4-\sqrt{37}}{7t+4+\sqrt{37}}\right|+c=\left|t=tg\frac{u}{2}=tg3x\right|=$$

$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6\sqrt{37}}}\mathbf{ln}\left|\frac{\mathbf{7tg3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}-\sqrt{\mathbf{37}}}{\mathbf{7tg3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}+\sqrt{\mathbf{37}}}\right|+\boldsymbol{c}\,.$$

6.6. Интегрирование иррациональных функций

1) Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots\right)dx$, где R – рациональная функция.

Заменой $t^S=\frac{ax+b}{cx+d}$, где S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}$ … , данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

2) При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ за знак интеграла выносим константу $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, а затем в знаменателе под корнем выделяем полный квадрат. Тогда, сделав замену $t = x + \frac{b}{2a}$, получим табличный интеграл.

3) При вычислении интегралов вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ предварительно выделим в числителе производную подкоренного выражения, а затем разложим интеграл на сумму двух интегралов.

4) В интегралах вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ делаем замену $\frac{1}{mx+n} = t$.

5) В остальных случаях интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R – рациональная функция, можно найти с помощью тригонометрических подстановок или подстановок Эйлера.

При вычислении интеграла с помощью тригонометрических подстановок сначала, выделив в квадратном трехчлене полный квадрат, сделаем замену $t = x + \frac{b}{2a}$. В результате получим интеграл одного из следующих трех видов и сделаем соответствующую замену:

$\int R\left(t, \sqrt{l^2-t^2}\right)dt$, замена $t = l \cdot \sin u$ или $t = l \cdot tht$,

$\int R\left(t, \sqrt{l^2+t^2}\right)dt$ замена $t = l \cdot \operatorname{tg} u$ или $t = l \cdot sht$,

$\int R\left(t, \sqrt{t^2-l^2}\right)dt$ замена на $t = \frac{l}{\cos u}$ или $t = l \cdot cht$.

Подстановки Эйлера

Также интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где

$a \neq 0; b^2 - 4ac \neq 0$ с помощью подстановок Эйлера сводятся к интегралам от рациональной функции.

1) $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1)t$, где x_1-корень квадратного трехчлена $ax^2+dx+c=0$.

Пример 6.8. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\int \frac{2\sqrt[6]{x}-5}{4\sqrt{x}+8\sqrt[3]{x}}dx$

3) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

5) $\int \frac{8dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$; 6) $\int \frac{x-3}{\sqrt{6x^2+4x+8}}dx$;

7) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

9) $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$; 10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

11) $\int \sqrt{x^2+x}\,dx$; 12) $\int arctg\sqrt{8x-4}\,dx$.

Решение

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1=t^6; \\ dx = 6t^5dt; \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1}$$

Дробь неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Выделим целую часть.

$$6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{t^3+t^2-t^2}{t+1}dt=6\int\frac{t^2(t+1)dt}{t+1}-6\int\frac{t^2dt}{t+1}=$$

$$=6\int t^2dt-6\int\frac{t^2+t-t}{t+1}dt=2t^3-6\int tdt+6\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2t^3-3t^2+6\int dt-6\int\frac{dt}{t+1}=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c=$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln|\sqrt[6]{x+1}+1|+c.$$

$$2)\int\frac{2\sqrt[6]{x}-5}{4\sqrt{x}+8\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[6]{x}=t\\ x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{2t-5}{4t^3+8t^2}6t^5dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{t^5(2t-5)}{t^2(t+2)}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^3(2t-5)}{t+2}dt=\frac{3}{2}\int\frac{2t^4-5t^3}{t+2}dt=\boldsymbol{J}.$$

Дробь неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Приведем дробь к правильному виду.

$$\begin{array}{r|l}
2t^4-5t^3 & t+2\\ \cline{2-2}
\underline{2t^4+4t^3} & 2t^3-9t^2+18t-36\\
-9t^3 & \\
\underline{-9t^3-18t^2} & \\
18t^2 & \\
\underline{18t^2+36t} & \\
-36t & \\
\underline{-36t-72} & \\
72 &
\end{array}$$

Тогда $\dfrac{2t^4-5t^3}{t+2}=2t^3-9t^2+18t-36+\dfrac{72}{t+2}$.

Следовательно,

$$J=\frac{3}{2}\int\left(2t^3-9t^2+18t-36+\frac{72}{t+2}\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{2t^4}{4}-\frac{9t^3}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{18t^2}{2}-36t+72\ln|t+2|\right)+c=$$

$$=\frac{3t^4}{4}-\frac{9t^3}{2}+\frac{27t^2}{2}-54t+108\,ln|t+2|+c=$$

$$=\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{27}{2}x^{\frac{1}{3}}-54x^{\frac{1}{6}}+108\,ln\left|x^{\frac{1}{6}}+2\right|+c=$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}-\frac{9}{2}\sqrt{x}+\frac{27}{2}\sqrt[3]{x}-54\sqrt[6]{x}+108\ln\left|\sqrt[6]{x}+2\right|+c}\,.$$

$$3)\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}\frac{1-x}{1+x}=t^2;1-x=t^2+xt^2\Rightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\\ dx=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=\int\frac{t}{1-t^2}\cdot\left(\frac{-4t}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=4\int\frac{t^2}{(t^2-1)(1+t^2)}dt\,.$$

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на сумму простейших дробей.

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\,.$$

Приведем дроби, стоящие справа к общему знаменателю и приравняем числители получившейся дроби и дроби, стоящей слева.

$$t^2=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)\,.$$

Для нахождения коэффициентов A,B,C и D подставим вместо переменной t числа 0, -1, 1 и 2.

При $t=-1$ имеем $\quad 1=-4B\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$;

при $t=1$ имеем $\quad 1=4A\Rightarrow A=\frac{1}{4}$;

при $t=0$ имеем $\qquad 0=A-B-D \Rightarrow D=\frac{1}{2}$;

при $t=2$ имеем $\qquad 4=15A+5B+3(2C+D)\Rightarrow$

$\Rightarrow 4=\frac{15}{4}-\frac{5}{4}+6C+\frac{3}{2}\Rightarrow C=0$

Следовательно,

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}.$$

Вычислим интеграл, разложив его на сумму трех интегралов

$$4\int\frac{t^2}{(t^2-1)(1+t^2)}dt=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=ln\,|t-1|-ln\,|t+1|+2arctgt+c=$$

$$=ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|-ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c.$$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене.

$4x-x^2=-(x-2)^2+4$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\left|\begin{matrix}x-2=t;\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dx}{\sqrt{4-t^2}}=$$

$$=arcsin\frac{t}{2}+c=\ arcsin\frac{x-2}{2}+c.$$

5) $\int\frac{8dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}=8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}=8\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6}}=$

$$=8\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=8\,ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c=$$

$$=\mathbf{8ln}\left|\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}+\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}\right|+c\ .$$

$$6)\int\frac{x-3}{\sqrt{6x^2+4x+8}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{Выделим в числителе}\\ \text{производную знаменателя}\\ \left(6x^2+4x+8\right)'=12x+4\\ d\left(6x^2+4x+8\right)=(12x+4)dx\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{12}(12x+4)-\frac{4}{12}-3}{\sqrt{6x^2+4x+8}}dx=\frac{1}{12}\int\frac{d\left(6x^2+4x+8\right)}{\sqrt{6x^2+4x+8}}-\frac{10}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{6x^2+4x+8}}=$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\left(6x^2+4x+8\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{10}{3\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2/3\,x+4/3}}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{6x^2+4x+8}-\frac{10}{3\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+1/3\right)^2-1/9+4/3}}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{6x^2+4x+8}-\frac{10}{3\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+1/3\right)^2+11/9}}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{6x^2+4x+8}-\frac{10}{3\sqrt{6}}\,ln\left|x+1/3+\sqrt{\left(x+1/3\right)^2+11/9}\right|+c=$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\sqrt{\mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{8}}-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{6}}}\,\mathbf{ln}\left|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}/\mathbf{3}+\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}/\mathbf{3}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{4}/\mathbf{3}}\right|+\boldsymbol{c}\ .$$

$$7)\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}\ .$$

В числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе.

$$\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{-4(-2x+2)+8-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=$$

$$=-4\int\frac{(-2x+2)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}==-4\int\frac{d(5+2x-x^2)}{\sqrt{5+2x-x^2}}-$$

$$-3\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-2x)}}=\left|t=5+2x-x^2\right|=-4\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-$$

$$-3\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=-4\cdot2\sqrt{t}-3arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+c=-8\sqrt{5+2x-x^2}-$$

$$-3arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+c.$$

8)

$$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}=\left|\begin{array}{l}2x-3=\frac{1}{t};\\ dx=-\frac{dt}{2t^2};\\ x=\frac{3t+1}{2t}\end{array}\right|=\int\frac{(-dt)}{2t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{4\frac{3t+1}{2t}-\left(\frac{3t+1}{2t}\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{2t\sqrt{\frac{24t^2++8t-9t^2-6t-1}{4t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{15t^2+2t-1}}$$

В квадратном трехчлене выделим полный квадрат:

$$-\frac{1}{\sqrt{15}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2t}{15}-\frac{1}{15}}}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{15}\right)^2-\frac{1}{125}-\frac{1}{15}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{15}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{15}\right)^2-\frac{28}{375}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{15}}ln\left|t+\frac{1}{15}+\sqrt{t^2+\frac{2}{15}t-\frac{1}{15}}\right|+c=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{15}}ln\left|\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{15}+\sqrt{\left(\frac{1}{2x-3}\right)^2+\frac{2}{15(2x-3)}-\frac{1}{15}}\right|+c$$

9) $\int\sqrt{1-4x-x^2}dx$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене.

$$1-4x-x^2=-(x^2+4x)+1=-((x+2)^2-4)+1=-(x+2)^2+5$$

Тогда

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}dx=\int\sqrt{5-(x+2)^2}dx=\begin{vmatrix}x+2=t;\\ dx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\sqrt{5-t^2}dt=\begin{vmatrix}t=\sqrt{5}\sin u;\\ dt=\sqrt{5}\cos u du;\\ u=\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}\end{vmatrix}=\int\sqrt{5-5\sin^2 u}\cdot\sqrt{5}\cos u du=$$

$$=\sqrt{5}\int\sqrt{5(1-\sin^2 u)}\cdot\cos u du=5\int\cos^2 u du=5\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=$$

$$=\frac{5}{2}\int du+\frac{5}{2}\int\cos 2u du=\frac{5}{2}u+\frac{5}{2}\frac{\sin 2u}{2}+c$$

Так как $\sin u=\frac{t}{\sqrt{5}}$, то

$$cos\,u = \sqrt{1 - sin^2 u} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5 - t^2}\ ;$$

тогда $sin\,2u = 2\,sin\,u\,cos\,u = \dfrac{2t\sqrt{5-t^2}}{5}$.

Следовательно,

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}\,dx = \frac{5}{2}arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}t\sqrt{5-t^2} + c = \left|x+2=t\right| =$$

$$= \frac{5}{2}arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + c\,.$$

$$10)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left|\begin{array}{l} x = 3tgt\,; \\ dx = \dfrac{3dt}{cos^2 t}\end{array}\right| = \int\frac{9tg^2t\cdot 3dt}{cos^2 t\sqrt{9tg^2t+9}} =$$

$$= 9\int\frac{tg^2t\cdot dt}{cos^2 t\sqrt{tg^2t+1}} = 9\int\frac{tg^2t\cdot dt}{cos^2 t\sqrt{\dfrac{1}{cos^2 t}}} = 9\int\frac{tg^2t\cdot dt}{cos\,t} =$$

$$= 9\int\frac{sin^2 t\cdot dt}{cos^3 t} = 9\int\frac{sin^2 t\cdot cos\,tdt}{cos^4 t} = 9\int\frac{sin^2 td\,sin\,t}{(1-sin^2 t)^2} = \left|sin\,t = y\right|$$

$$= 9\int\frac{y^2dy}{(1-y^2)^2} = 9\int\frac{y^2dy}{(y^2-1)^2} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = y;\quad du = dy; \\ dv = \dfrac{ydy}{(y^2-1)^2}\,;\ v = \displaystyle\int\frac{ydy}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(y^2-1)}{(y^2-1)^2} = -\frac{1}{2(y^2-1)}\end{array}\right| =$$

$$= 9\left(-\frac{y}{2(y^2-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2-1}\right) + c =$$

$$= 9\left(-\frac{y}{2(y^2-1)} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) + c =$$

$$= 9\left(-\frac{sin\,t}{2(sin^2 t-1)} + \frac{1}{4}ln\left|\frac{sin\,t-1}{sin\,t+1}\right|\right) + c =$$

Вернемся к переменной *x*.

$$x = 3tgt \Rightarrow tgt = \frac{x}{3} \Rightarrow ctgx = \frac{3}{x}.$$

Из основного тригонометрического тождества легко выводится формула: $1 + ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} \Rightarrow \ sin^2 x = \frac{1}{1 + ctg^2 x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow sin^2 x = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^2} \Rightarrow \Rightarrow sin^2 x = \frac{x^2}{x^2 + 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sin\, x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = 9\left(- \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 9}\left(\frac{x^2}{x^2 + 9} - 1\right)} + \frac{1}{4} ln \left| \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 1}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1} \right| \right) + c =$$

$$= 9\left(- \frac{x(x^2 + 9)}{2\sqrt{x^2 + 9}\left(x^2 - x^2 - 9\right)} + \frac{1}{4} ln \left| \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \right| \right) + c =$$

$$= 9\left(\frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{18} + \frac{1}{4} ln \left| \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \right| \right) + c =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{9}{4} ln \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \right| + c.$$

Данный интеграл можно вычислить с помощью подстановки Эйлера.

У нас $a = 1 > 0$, следовательно, можно применить первую подстановку Эйлера.

Сделаем замену $t=\sqrt{x^2+9}+x$ и выразим переменную x:

$$t-x=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow (t-x)^2=x^2+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2+9\Rightarrow t^2=9+2tx\Rightarrow x=\frac{t^2-9}{2t}.$$

Найдем производную от функции x:

$$x'=\frac{2t\cdot t-(t^2-9)}{2t^2}=\frac{t^2+9}{2t^2}.$$

Тогда $dx=\dfrac{t^2+9}{2t^2}dt$.

Выразим подынтегральное выражение через переменную t:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\dfrac{(t^2-9)^2}{4t^2}}{t-\dfrac{t^2-9}{2t}}=\frac{(t^2-9)^2\cdot 2t}{4t^2(t^2+9)}=\frac{(t^2-9)^2}{2t(t^2+9)}.$$

Тогда имеем:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{(t^2-9)^2}{2t(t^2+9)}\cdot\frac{t^2+9}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^4-18t^2+81}{t^3}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t-\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}\right)dt=\frac{t^2}{8}-\frac{9}{2}ln\,|\,t\,|-\frac{81}{8t^2}+c=$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+9}+x)^2}{8}-\frac{9}{2}ln\,|\sqrt{x^2+9}+x\,|-\frac{81}{8(\sqrt{x^2+9}+x)^2}+c=$$

$$=\frac{(x^2+9+2x\sqrt{x^2+9}+x^2)}{8}-\frac{9}{2}ln\,|\sqrt{x^2+9}+x\,|-$$

$$-\frac{81(\sqrt{x^2+9}-x)^2}{8(\sqrt{x^2+9}+x)^2(\sqrt{x^2+9}-x)^2}+c=\frac{2x^2+9+2x\sqrt{x^2+9}}{8}-$$

$$-\frac{9}{2}ln|\sqrt{x^2+9}+x|-\frac{81(x^2+9-2x\sqrt{x^2+9}+x^2)}{8(x^2+9-x^2)^2}+c=$$

$$=\frac{2x^2+9+2x\sqrt{x^2+9}}{8}-\frac{9}{2}ln|\sqrt{x^2+9}+x|-\frac{2x^2+9-2x\sqrt{x^2+9}}{8}+c=$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2}-\frac{9}{2}ln|\sqrt{x^2+9}+x|+c.$$

11) $\int\sqrt{x^2+x}dx$

Вычислим данный интеграл с помощью подстановки Эйлера.

У нас $a=1>0$, следовательно, можно применить первую подстановку Эйлера.

Сделаем замену $t=\sqrt{x^2+x}+x$ и выразим переменную *x*:

$$t-x=\sqrt{x^2+x}\Rightarrow(t-x)^2=x^2+x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2+x\Rightarrow t^2=x+2tx\Rightarrow x=\frac{t^2}{2t+1}.$$

Найдем производную от функции *x*:

$$x'=\frac{2t(2t+1)-2t^2}{(2t+1)^2}=\frac{2t^2+2t}{(2t+1)^2}.$$

Тогда $dx=\frac{2t^2+2t}{(2t+1)^2}dt$.

Выразим подынтегральное выражение через переменную *t:*

$$\sqrt{x^2+x}=t-x=t-\frac{t^2}{2t+1}=\frac{2t^2+t-t^2}{2t+1}=\frac{t^2+t}{2t+1}.$$

Тогда имеем:

$$\int\sqrt{x^2+x}dx=\int\frac{t^2+t}{2t+1}\cdot\frac{2t^2+2t}{(2t+1)^2}dt=2\int\frac{t^2(t+1)^2}{(2t+1)^3}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}2t+1=u;\ t=\dfrac{u-1}{2}\\ 2dt=du;\ dt=\dfrac{du}{2}\end{array}\right|=2\int\frac{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2\left(\frac{u-1}{2}+1\right)^2}{u^3}\frac{du}{2}=$$

$$=\int\frac{(u-1)^2(u+1)^2}{16u^3}du=\frac{1}{16}\int\frac{u^4-2u^2+1}{u^3}du=$$

$$=\frac{1}{16}\int udu-\frac{1}{8}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{16}\int\frac{du}{u^3}=\frac{u^2}{32}-\frac{1}{8}ln|u|-\frac{1}{32u^2}+c=$$

$$=\frac{1}{32}\left((2t+1)^2-\frac{1}{(2t+1)^2}\right)-\frac{1}{8}ln|2t+1|+c=$$

$$=\frac{1}{32}\left((2\sqrt{x^2+x}+2x+1)^2-\frac{1}{(2\sqrt{x^2+x}+2x+1)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{8}ln|2\sqrt{x^2+x}+2x+1|+c=$$

$$=\frac{1}{32}\left((2\sqrt{x^2+x}+2x+1)^2-\frac{(2x+1-2\sqrt{x^2+x})^2}{((2x+1)^2-(2\sqrt{x^2+x})^2)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{8}ln|2\sqrt{x^2+x}+2x+1|+c=$$

$$=\frac{1}{32}\left((2\sqrt{x^2+x}+2x+1)^2-\frac{(2x+1-2\sqrt{x^2+x})^2}{(4x^2+4x+1-4x^2-4x)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{8}ln|2\sqrt{x^2+x}+2x+1|+c=$$

$$=\frac{1}{32}\left((2\sqrt{x^2+x}+2x+1)^2-(2x+1-2\sqrt{x^2+x})^2\right)-$$

$$-\frac{1}{8}ln|2\sqrt{x^2+x}+2x+1|+c=\frac{1}{32}(4(x^2+x)+(2x+1)^2+$$

$$+4(2x+1)\sqrt{x^2+x}-(2x+1)^2-4(x^2+x)+4(2x+1)\sqrt{x^2+x})-$$

$$-\frac{1}{8}ln\,|\,2\sqrt{x^2+x}+2x+1\,|+c=\frac{8(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{32}-$$

$$-\frac{1}{8}ln\,|\,2\sqrt{x^2+x}+2x+1\,|+c=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{4}-$$

$$-\frac{1}{8}ln\,|\,2\sqrt{x^2+x}+2x+1\,|+c\,.$$

12) $\int arctg\sqrt{8x-4}dx=$

$$=\left|\begin{array}{lr} u=arctg\sqrt{8x-4}; & dv=dx \\ du=\dfrac{8}{1+\left(\sqrt{8x-4}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{8x-4}}dx=\dfrac{4dx}{(8x-3)\sqrt{8x-4}}; & v=x \end{array}\right|=$$

$$=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-\int x\left(\frac{4dx}{(8x-3)\sqrt{8x-4}}\right)dx=$$

$$=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-4\int\frac{xdx}{(8x-3)\sqrt{8x-4}}=\left|\begin{array}{l} \sqrt{8x-4}=t; \\ 8x-4=t^2; \\ x=\dfrac{4+t^2}{8}; \\ dx=\dfrac{2tdt}{8}=\dfrac{tdt}{4} \end{array}\right|=$$

$$=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-4\int\frac{\dfrac{4+t^2}{8}\left(\dfrac{tdt}{4}\right)}{(t^2+4-3)t}=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-$$

$$-\int\frac{\left(4+t^2\right)dt}{8(t^2+1)}=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-\frac{1}{8}\int\frac{t^2+1+3}{t^2+1}dt=$$

$$=x\cdot arctg\sqrt{8x-4}-\frac{1}{8}\int\left(1+\frac{3}{t^2+1}\right)dt=$$

$$= x \cdot arctg\sqrt{8x-4} - \frac{1}{8}\int dt - \frac{3}{8}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= x \cdot arctg\sqrt{8x-4} - \frac{1}{8}t - \frac{3}{8}arctgt + c =$$

$$= \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{arctg}\sqrt{\mathbf{8}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\sqrt{\mathbf{8}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\mathbf{arctg}\sqrt{\mathbf{8}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}} + \boldsymbol{c}\,.$$