Домашнее задание № 5

Определенные интегралы (геометрические приложения определенного интеграла, кратные интегралы)

Для выполнения домашнего задания необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие вашему номеру варианта данные из табл. 1. Например, Вы учитесь в группе 5, Ваш номер в списке 14. Тогда по табл. 1 имеем:

5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициент						
	A	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
14	4	5	2	-6	-3	7	8

Таблица 1

Значения коэффициентов для разных групп

Группа	Коэффициент						
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*
2	*C*	*D*	*B*	*A*	*K*	*F*	*M*
3	*B*	*A*	*K*	*D*	*C*	*F*	*M*
4	*C*	*A*	*B*	*K*	*D*	*F*	*M*
5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
6	*A*	*K*	*B*	*D*	*C*	*F*	*M*
7	*B*	*K*	*A*	*C*	*D*	*F*	*M*
8	*C*	*K*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*
9	*B*	*D*	*K*	*C*	*A*	*F*	*M*
10	*D*	*K*	*A*	*C*	*B*	*F*	*M*
11	*D*	*C*	*K*	*B*	*A*	*F*	*M*
12	*K*	*C*	*A*	*D*	*B*	*F*	*M*
13	*D*	*A*	*B*	*K*	*C*	*F*	*M*
14	*K*	*B*	*C*	*D*	*A*	*F*	*M*
15	*K*	*A*	*C*	*B*	*D*	*F*	*M*
16	*K*	*C*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*

Таблица 2.

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
1	2	3	–1	5	7	4	14
2	–5	–9	2	1	–4	3	8
3	6	4	1	2	–7	3	12
4	2	–1	6	–9	8	5	13
5	1	5	–4	–3	6	2	–8
6	4	3	11	–1	–4	3	9
7	2	5	1	4	10	3	24
8	5	–2	9	3	–1	4	7
9	–2	7	6	11	–1	4	8
10	–4	10	5	–3	7	2	13
11	–3	2	–4	7	1	4	12
12	–6	5	–1	8	11	2	–6
13	3	–2	9	–5	1	4	17
14	4	5	2	–6	–3	7	8
15	9	3	–5	7	4	3	–12
16	2	5	–1	–3	4	6	–10
17	1	–6	2	3	–5	4	14
18	10	–2	6	–4	3	5	21
19	–4	7	–3	9	6	2	–17
20	2	1	7	12	4	6	–8
21	8	5	–2	4	1	3	17
22	–3	2	–4	6	–7	5	14
23	–1	7	2	5	4	6	3
24	3	–5	6	–4	1	2	8
25	10	–2	4	7	5	3	–27
26	2	11	6	4	–3	5	16
27	1	4	–3	2	9	6	–17
28	4	5	–9	7	3	2	–12
29	3	2	–5	4	7	6	13
30	–2	10	–4	1	–3	4	37

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = Ax^2 + Bx + C \qquad x = B, x = K, y = 0$;

2) $\begin{cases} x = A^2\cos t, \\ y = B^2\sin t, \end{cases} \; y \ge \dfrac{|B|}{2}$;;

Задача 2. Вычислить длину дуги кривой;

1) $y = A\sqrt{x} + B, \;\; C^2 \le x \le C^2 + 3$;

2) $\begin{cases} x = B^2(t - \sin t) \\ y = B^2(1 - \cos t) \end{cases}, \; 0 \le t \le \dfrac{\pi}{F}$;

Задача 3. Вычислить объем тела вращения вокруг оси OX и вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=Ae^{Bx}$ и прямыми $x = K^2$, $x = K^2 + 2$, $y = 0$.

Задача 4. Вычислить двойной интеграл:

1) $\iint\limits_D F^{Ax+By} dxdy,$ где $D: \begin{cases} C \le x \le C+2, \\ D \le y \le D+1; \end{cases}$

2) $\iint\limits_D (Fx+By) dxdy,$ где $D: \begin{cases} x=0, y=0, \\ Ax+Dy=M; \end{cases}$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = A^2$, $y = B^2x$, $y = C^2x$, $x \ge 0$.

Задача 6. Найти объем тела:

1) $V: \begin{cases} Ax+Cy+Dz=M, \\ x=0,\ y=0,\ z=0; \end{cases}$

Пример выполнения домашнего задания №5

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -2x^2 - 5x + 1$; $x = -5$, $x = -4$, $y = 0$.

Решение

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 2.1).

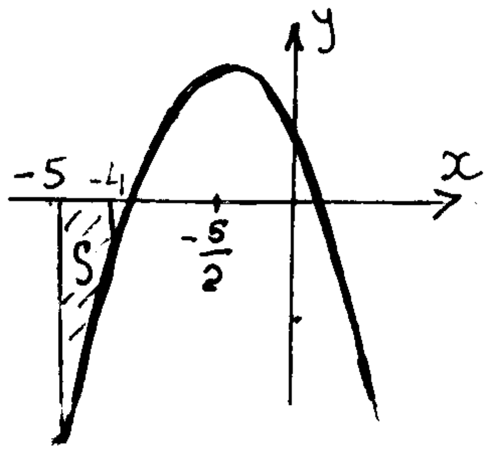

Рис. 2.1

$y = -2x^2 - 5x + 1$ – парабола, ветви которой направлены вниз.

$x_b = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{4}$,

$y_b = -2\dfrac{25}{16} + \dfrac{25}{4} + 1 = \dfrac{33}{8}$.

$A\left(\dfrac{-5}{4}; \dfrac{33}{8}\right)$ – вершина параболы,

$y(-4) = -2\cdot16 - 5(-4) + 1 = -32 + 20 + 1 = -12$.

$y(-5) = -2\cdot(-5)^2 - 5(-5) + 1 = -50 + 25 + 1 = -25 + 1 = -24$.

Так как наша функция на $[-5, -4]$ отрицательная, то $S = \int\limits_a^b \left(-f(x)\right)dx$.

Тогда $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{-5}^{-4} \left(2x^2 + 5x - 1\right)dx =$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-5}^{-4} = \left(\frac{2(-4)^3}{3} + \frac{5(-4)^2}{2} - (-4)\right) - \left(\frac{2(-5)^3}{3} + \frac{5(-5)^2}{2} - (-5)\right) =$$

$$= -\frac{128}{3} + 40 + 4 + \frac{250}{3} - \frac{125}{2} - 5 = 39 + \frac{122}{3} - \frac{125}{2} = 39 + \frac{244 - 375}{6} =$$

$$= 39 - \frac{131}{6} = \frac{234 - 131}{6} = \frac{103}{6};$$

2) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 25\sin t \end{cases}$ => $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{625} = 1$ – эллипс, $y \geq \dfrac{25}{2}$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 2.2)

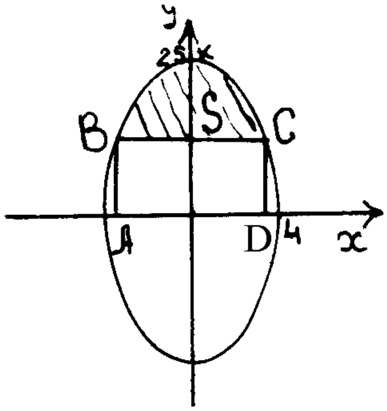

Рис. 2.2

Найдем значение параметра t, соответствующее координатам точек B и C:

$$\frac{25}{2} = 25\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2}. \text{Так как } \quad 0 \le t \le \pi, \text{ то}$$

$$t_c = \frac{\pi}{6},\ t_b = \frac{5\pi}{6}.$$

Тогда $\quad x_c = 4\cos\frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\ x_b = 4\cos\frac{5\pi}{6} = -2\sqrt{3}.$

$$C\left(2\sqrt{3}, \frac{25}{2}\right), \quad B\left(-2\sqrt{3}, \frac{25}{2}\right),$$

$S_{BKC} = S_{ABKCD} - S_{ABCD}$,

$$S_{ABKCD} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (25\sin t)(-4\sin t)dt = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 100\sin^2 t dt =$$

$$= -100\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 50\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 50\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 50\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 50\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{100\pi}{3} + \frac{50\sqrt{3}}{2} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3},$$

$$S_{ABCD} = |AD||AB| = 4\sqrt{3}\frac{25}{2} = 50\sqrt{3},$$

$$S_{BKC} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 50\sqrt{3} = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}.$$

Задача 2. Вычислить длину дуги кривой.

1) $y = -2\sqrt{x} - 5, \qquad 1 \le x \le 4,$

Решение

$$y' = -\frac{2}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}1+\dfrac{1}{x}=t^2,\ \dfrac{1}{x}=t^2-1,\ x=\dfrac{1}{t^2-1}\\ dx=-\dfrac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt\\ t_1^2=1+1=2\Rightarrow\ t_1=\sqrt{2}\\ t_2^2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow t_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{array}\right|=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}t\left(-\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\right)dt=-2\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Интегрируем по частям: } U=t,\qquad dV=\dfrac{t}{\left(t^2-1\right)^2}dt,\\ dU=dt,\ V=\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-1}\end{array}\right|=$$

$$=-2\left(-\frac{t}{2\left(t^2-1\right)}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{dt}{t^2-1}\right)=\frac{t}{\left(t^2-1\right)}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{4}-1}-\frac{\sqrt{2}}{2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\frac{\sqrt{5}\cdot4}{2\cdot1}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|==\mathbf{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|}.$$

2) $\begin{cases}x=25(t-\sin t)\\ y=25(1-\cos t)\end{cases},\qquad 0\le t\le\dfrac{\pi}{6},$

$$\begin{cases}x'(t)=25(1-\cos t),\\ y'(t)=25\sin t\end{cases}$$

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(y'(t)\right)^2+\left(x'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{25^2(1-\cos t)^2+25^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=25\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-2\cos t+\cos t^2+\sin^2 t}\,dt=25\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=25\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\cos t}\,dt=25\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=50\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=50\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=50\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=100\left(-\cos\frac{\pi}{12}+\cos0\right)=100\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\right).$$

Задача 3. Найти объем тела вращения вокруг оси OX и OY трапеции, ограниченной кривой $y=-2e^{-5x}$ и прямыми $x=16$, $x=18$, $y=0$.

Решение

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 2.4).

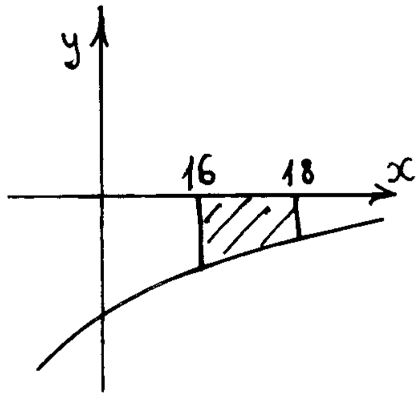

Рис. 2.4

$$V_{OX}=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_{16}^{18}4e^{-10x}dx=4\pi\int_{16}^{18}e^{-10x}dx=\frac{4\pi}{-10}e^{-10x}\Big|_{16}^{18}=$$

$$=-\frac{2\pi}{5}\left(e^{-180}-e^{-160}\right)=\frac{2\pi}{5}\left(e^{-160}-e^{-180}\right),$$

$$V_{OY}=2\pi\int_a^b x\cdot|f(x)|dx=2\pi\int_{16}^{18}x\cdot 2e^{-5x}dx=4\pi\int_{16}^{18}x\cdot e^{-5x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} U=x, & dV=e^{-5x}dx \\ dU=dx, & V=\dfrac{e^{-5x}}{-5} \end{vmatrix}=4\pi\left(-\frac{xe^{-5x}}{5}\Big|_{16}^{18}+\frac{1}{5}\int_{16}^{18}e^{-5x}dx\right)=$$

$$=4\pi\left(-\frac{18e^{-90}}{5}+\frac{16e^{-80}}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-5x}}{-5}\Big|_{16}^{18}\right)=4\pi\left(\frac{16e^{-80}}{5}-\frac{18e^{-90}}{5}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{25}\cdot\left(e^{-90}-e^{-80}\right)\right)=\frac{4\pi}{5}\left(16e^{-80}-18e^{-90}+\frac{e^{-80}}{5}-\frac{e^{-90}}{5}\right)=$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\pi}{25}\left(81e^{-80}-91e^{-90}\right)}.$$

Задача 4. Вычислить:

1) $\iint\limits_D 6^{-2x-5y}dxdy$, $\quad D$: $1\le x\le 3$; $-3\le y\le -2$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.8):

$$\iint\limits_D 6^{-2x-5y}dxdy=\int_1^3 dx\int_{-3}^{-2}6^{-2x-5y}dy=\int_1^3 dx\int_{-3}^{-2}6^{-2x-5y}\left(\frac{d(-2x-5y)}{-5}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\int_1^3\left(\frac{6^{-2x-5y}}{\ln 6}\Big|_{-3}^{-2}\right)dx=-\frac{1}{5\ln 6}\int_1^3\left(6^{-2x+10}-6^{-2x+15}\right)dx=-\frac{1}{5\ln 6}\left(\int_1^3 6^{-2x+10}dx-\right.$$

$$\left.-\int_1^3 6^{-2x+15}dx\right)=-\frac{1}{5\ln 6}\left(\int_1^3 6^{-2x+10}\frac{d(-2x+10)}{-2}-\int_1^3 6^{-2x+15}\frac{d(-2x+15)}{-2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5\ln 6}\left(-\frac{1}{2}\frac{6^{-2x+10}}{\ln 6}\Big|_1^3+\frac{1}{2}\frac{6^{-2x+15}}{\ln 6}\Big|_1^3\right)=\frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^{-6+10}-6^{-2+10}-6^{-6+15}+6^{-2+15}\right)=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^4-6^8-6^9+6^{13}\right)}.$$

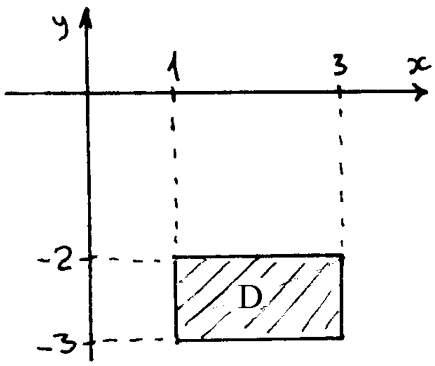

Рис. 2.8

2) $\iint\limits_D (6x-5y)dxdy$, D: $x = 0$, $y = 0$, $-2x - 3y = -8$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.9)

$2x + 3y = 8$.

x	y
0	$\frac{8}{3}$
4	0

$y = \dfrac{8-2x}{3}$,

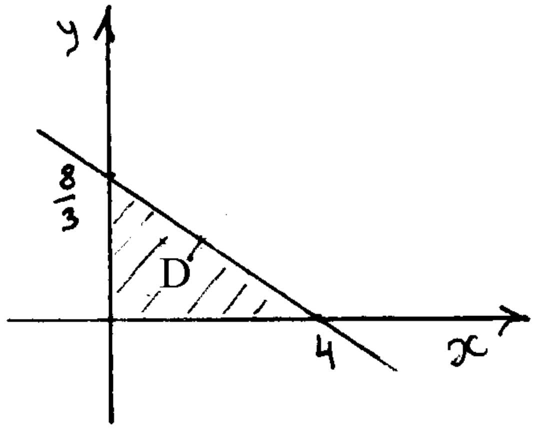

Рис. 2.9

$$\iint\limits_D (6x-5y)dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{8-2x}{3}} (6x-5y)dy = \int_0^4 \left(6xy - 5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{8-2x}{3}} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(2x(8-2x) - \frac{5}{2}\left(\frac{8-2x}{3}\right)^2\right)dx = \int_0^4 \left(16x - 4x^2 - \frac{5}{18}\left(64 - 32x + 4x^2\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^4 \left(16x - 4x^2 - \frac{160}{9} + \frac{80}{9}x - \frac{10}{9}x^2\right)dx = \int_0^4 \left(-\frac{160}{9} + \frac{224}{9}x - \frac{46}{9}x^2\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{160}{9}x + \frac{224}{9}\frac{x^2}{2} - \frac{46}{9}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \left(-\frac{160}{9}x + \frac{112}{9}x^2 - \frac{46}{27}x^3\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= -\frac{640}{9} + \frac{1792}{9} - \frac{2944}{27} = \frac{5376 - 1920 - 2944}{27} = \mathbf{\frac{512}{27}}.$$

3) $\iint\limits_D x(y-3)dxdy,\ D{:}\ y = x^2, x = -4y.$

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.10).

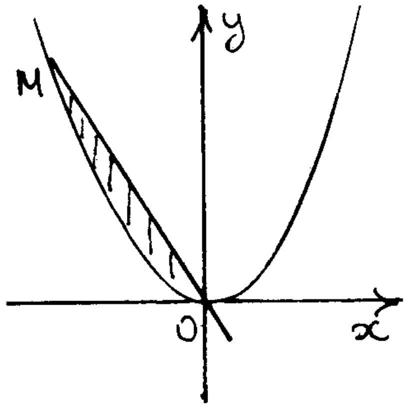

Рис. 2.10

Найдем точки пересечения кривых:

$y = x^2$ и $x = -4y$ => $y = -\dfrac{1}{4}x$ => $-\dfrac{1}{4}x = x^2$ => $x = 0$ или $x = -\dfrac{1}{4}$.

Тогда $M\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}\right)$, $O(0, 0)$,

$$\iint\limits_D x(y-3)dxdy = \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} x(y-3)dy = \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} (xy-3x)dy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{xy^2}{2} - 3xy\right)\Bigg|_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} dx = \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}x\right)^2 - 3x\left(-\frac{1}{4}x\right) - \frac{x}{2}\left(x^2\right)^2 + 3x\left(x^2\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{x^3}{32} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^5}{2} + 3x^3\right)dx = \left(\frac{x^4}{4\cdot 32} + \frac{3}{4\cdot 3}x^3 - \frac{x^6}{12} + \frac{3x^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{4^4\cdot 4\cdot 32} + \frac{3}{4^3\cdot 4\cdot 3} + \frac{1}{12\cdot 4^6} - \frac{3}{4\cdot 4^4} = \frac{1}{4^5}\left(-\frac{1}{32} + 4 + \frac{1}{48} - 3\right) =$$

$$= \frac{1}{4^5}\cdot\frac{95}{96} = \mathbf{\frac{95}{98304}}.$$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$D{:}\ xy = A^2,\ y = B^2x,\ y = C^2x,\ x \geq 0,\ xy = 4,\ y = 25x,\ y = x,\ x \geq 0.$

Изобразим область интегрирования на координатной области (рис. 2.17):

$$S = \iint\limits_S dxdy.$$

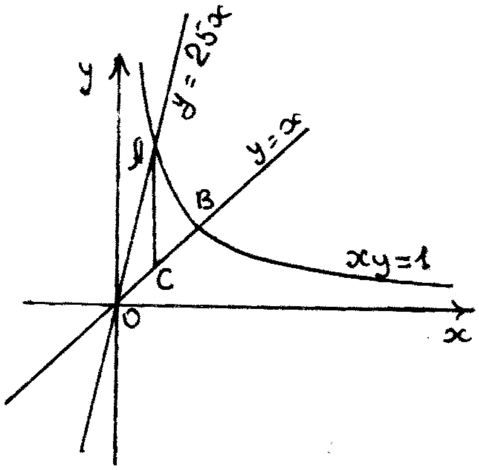

Рис. 2.17

Разобьем область на 2 элементарные области. Для этого из точки A проведем прямую, параллельную оси OY. Получим две элементарные области: OAC и ACB.

Найдем координаты точек B и A:

$$A:\ \begin{cases} y = 25x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 25x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x} = 25x,$

$x^2 = \dfrac{1}{25},$

$x = \pm\dfrac{1}{5}$, так как у нас $x \geq 0$ => $x = \dfrac{1}{5}$, $y = 5$,

$A\left(\dfrac{1}{5}, 5\right);$

$$B:\ \begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1,1),$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_0^{\frac{1}{5}} dx \int_x^{25x} dy + \int_{\frac{1}{5}}^{1} dx \int_x^{\frac{1}{x}} dy = \int_0^{\frac{1}{5}} y\Big|_x^{25x} dx + \int_{\frac{1}{5}}^{1} y\Big|_x^{\frac{1}{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{5}} (25x - x) dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{5}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = \frac{24x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{5}} + \left(\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{5}}^{1} = \frac{12}{25} + \ln 1 - \ln\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = -\ln\frac{1}{5} =$$

$= \mathbf{ln5}$.

Задача 6. Найти объем V тела, ограниченного поверхностями:

1) $-2x + y - 3z = -8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

Решение

$\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{8} + \dfrac{3z}{8} = 1$ – плоскость, отсекающая от координатных осей отрезки 4, –8, 8/3 (рис. 2.19).

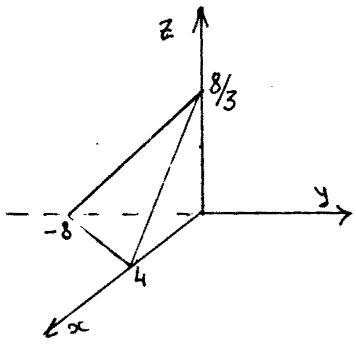

Рис. 2.19

Изобразим проекцию на плоскость *XOY* (рис. 2.20).

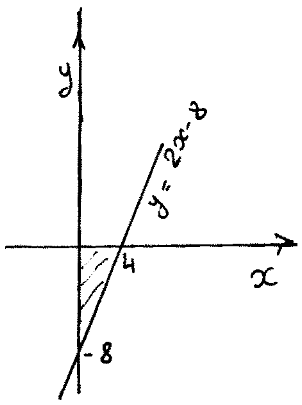

Рис. 2.20

$$z = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = 1 \;\Rightarrow\; -2x + y = -8 \;\Rightarrow\; y = 2x - 8,$$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^4 dx \int_{2x-8}^0 dy \int_0^{\frac{8-2x+y}{3}} dz = \int_0^4 dx \int_{2x-8}^0 \left(z\Big|_0^{\frac{8-2x+y}{3}} \right) dy =$$

$$= \int_0^4 dx \int_{2x-8}^0 \frac{8-2x+y}{3} dy = \int_0^4 dx \int_{2x-8}^0 \left(\frac{8}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{y}{3} \right) dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{8}{3} y - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{3 \cdot 2} \right)\Bigg|_{2x-8}^0 dx = \int_0^4 \left(-\frac{8}{3}(2x-8) + \frac{2x(2x-8)}{3} - \frac{(2x-8)^2}{6} \right) dx =$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{16}{3}x + \frac{64}{3} + \frac{4x^2}{3} - \frac{16}{3}x - \frac{4x^2}{6} + \frac{32}{6}x - \frac{64}{6} \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3 \cdot 3} - \frac{16}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{32}{3}x \right)\Bigg|_0^4 = \frac{2 \cdot 64}{9} - \frac{8}{3} \cdot 16 + \frac{32}{3} \cdot 4 = \mathbf{\frac{128}{9}}.$$