

Домашнее задание №1

Для получения варианта домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 3.1, заполнить первую строку табл. 3.2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 3.1. Например, Ваш вариант 9.15. Тогда по табл. 3.1 имеем:

9	b	d	k	c	a	f	m
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 3.1 и выбираем строку, соответствующую пятнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты						
	b	d	k	c	a	f	m
15	-4	2	-2	7	4	3	-8

Таблица 3.1

Порядок следования коэффициентов

Группа*	Коэффициенты						
1	a	b	c	d	k	f	m
2	c	d	b	a	k	f	m
3	b	a	k	d	c	f	m
4	c	a	b	k	d	f	m
5	a	c	d	b	k	f	m
6	a	k	b	d	c	f	m
7	b	k	a	c	d	f	m
8	c	k	d	a	b	f	m
9	b	d	k	c	a	f	m
10	d	k	a	c	b	f	m
11	d	c	k	b	a	f	m
12	k	c	a	d	b	f	m
13	d	a	b	k	c	f	m
14	k	b	c	d	a	f	m
15	k	a	c	b	d	f	m
16	k	c	d	a	b	f	m

Таблица 3.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
						f	m
1	1	2	-1	3	6	4	27
2	2	-1	4	-2	-1	3	8
3	-2	4	10	2	3	3	81
4	3	6	-3	-2	4	5	64
5	1	5	2	-3	-4	2	-8
6	4	3	11	-1	-4	3	-81
7	2	5	-2	4	10	3	-64
8	5	3	-1	4	9	3	27
9	-2	5	6	2	-3	4	8
10	-4	10	2	-1	4	2	-1
11	2	3	-2	3	1	3	8
12	-6	5	-1	4	1	2	-64
13	3	2	9	-2	-3	4	27
14	4	5	2	-4	3	6	81
15	-4	2	-2	7	4	3	-8
16	2	5	-1	-2	1	3	-1
17	1	-1	2	3	5	4	64
18	10	-2	6	-4	3	5	-64
19	4	5	-3	6	-4	2	8
20	2	1	3	5	4	6	-8
21	3	5	-2	4	1	4	27
22	-3	2	-2	3	4	5	-27
23	1	3	2	4	5	2	1
24	3	-5	6	1	2	2	-1
25	1	-2	4	2	5	3	-64
26	2	1	6	4	-3	5	81
27	1	4	-3	2	6	8	64
28	4	5	-9	7	3	2	-1
29	3	2	-3	9	5	6	-8
30	-2	3	4	1	-2	4	27

Условие домашнего задания

Задача 1. Вычислить пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{cx + d}{bx + k};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow f} \frac{x^2 - f^2}{x^3 - f^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + dx + b}{cx^2 + kx + f};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx + k};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax)^2 - (1 + bx)^2}{cx^2 + dx};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+b} - \sqrt[3]{mx^6 + bx^2}}{\sqrt{4x^4 - c} - \sqrt[3]{ax}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^3\sqrt{ax} - \sqrt[4]{81x^8 - c}}{(bx + k\sqrt{x})\sqrt{x^2 - d}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+b} - \sqrt{x+c});$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x-f});$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+m} - \sqrt{x-m});$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+d} \right)^{dx+k};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow f+0} \frac{\sqrt{x-f}}{\sqrt[3]{x^2 - f^2}};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{f+x} - \sqrt[3]{f-x}}{c^7\sqrt{x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(b(x-a))}{c(x-a)};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} cx}{dx};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{cx};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(fx) - \cos x}{1 - \cos(dx)};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^x - e^{3x}}{\operatorname{tg} dx};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(a\pi x)}{\sin(c\pi x)}.$$

Задача 2. Найти асимптоты и построить эскизы графиков функций:

$$1) y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$2) y = \frac{bx^2 + cx + d}{kx + a};$$

$$3) y = \frac{|bx+a|}{dx+c};$$

$$4) y = \frac{ax^2 + b}{\sqrt{c^2x^2 - d^2}}.$$

Задача 3. Найти точки разрыва следующих ниже функций, определить характер разрыва:

$$1) f(x) = \frac{|ax-b|}{ax-b};$$

$$2) f(x) = \frac{cx+d}{(kx+f)^2(ax+b)}.$$

Пример выполнения домашнего задания №1

Номер по п/п	Коэффициенты						
	b	c	k	d	a	f	m
*	1	2	-1	3	-1	2	8

Задача 1. Вычислить пределы функций:

Решение

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(-1)+3}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2^2}{x^3-2^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \\ &= \frac{2+2}{4+4+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3x+1}{2x^2-x+2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+x+2}{3x-1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \left(\frac{-1}{0} \right) = \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^2 - (1+x)^2}{2x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x+x^2 - (1+2x+x^2)}{2x^2 + 3x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x+x^2 - 1-2x-x^2}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x(2x+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{2x+3} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8x^6 + x^2}}{\sqrt{4x^2 - 2} - \sqrt[3]{-x}} &= \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \\ \text{в наибольшей степени,} \\ \text{т.е. на } x^2 \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{8x^6 + x^2}}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{-x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4}} - \frac{\sqrt[3]{8x^6 + x^2}}{\sqrt[3]{x^6}}}{\frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{x^4} - \frac{\sqrt[3]{-x}}{\sqrt[3]{x^6}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^4}}}{\sqrt{4 - \frac{2}{x^4}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{x^3}}} = \frac{0 - \sqrt[3]{8}}{\sqrt{4} - 0} = \frac{-2}{2} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ж) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-x} - \sqrt[4]{81x^2 - 2}}{(x - \sqrt{x})\sqrt{x^2 - 3}} &= \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{-x}}{x^2} - \frac{\sqrt[4]{81x^2 - 2}}{x^2}}{\frac{(x - \sqrt{x})\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{x^5}} - \sqrt[4]{81 - \frac{2}{x^8}}}{\frac{x - \sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{x^5}} - \sqrt[4]{81 - \frac{2}{x^8}}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} = \frac{0 - \sqrt[4]{81}}{(1-0)\sqrt{1-0}} = \frac{-\sqrt[3]{81}}{1} = -3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{з) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) &= (\infty - \infty) = \left| \begin{array}{l} \text{Домножим числитель и} \\ \text{знаменатель на} \\ \text{сопряженное к числителю} \\ \text{выражение } (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}) \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - (x+2)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{и) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) &= (\infty - \infty) = \left| \begin{array}{l} \text{Домножим числитель и} \\ \text{знаменатель на сопряженное} \\ \text{к числителю выражение} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x+2 - x+2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель и} \\ \text{знаменатель на } \sqrt{x} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \\
 &= \frac{4}{1+1} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{к) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8}) &= (\infty - \infty) = \left| \begin{array}{l} \text{Домножим числитель и} \\ \text{знаменатель на сопряженное} \\ \text{к числителю выражение} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8})(\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8})}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+8 - (x-8))}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+8-x+8)}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{8}{x^2}}} = \left(\frac{16}{0} \right) = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{л) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x+1}{-x+3} \right)^{3x-1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x+3-2}{-x+3} \right)^{3x-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3-x} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-3} \right)^{(3x-1) \left(\frac{2}{x-3} \right) \left(\frac{x-3}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(3x-1)2}{x-3}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{x-3} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}} = e^6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{м) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-4}} &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x+2}^{\frac{1}{3}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{x+2}} = \left(\frac{0}{\sqrt[3]{4}} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{н) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}}{2\sqrt[7]{x}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{домножим числитель и знаменатель на} \\ \text{сопряженное к числителю выражение} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} \right) \left(\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2 \right)}{2\sqrt[7]{x} \left(\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^3 - \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^3}{2\sqrt[7]{x} \left(\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) - (2-x)}{2\sqrt[7]{x} \left(\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2\sqrt[7]{x} \left(\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{7}}}{\left(\sqrt[3]{x+2} \right)^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{2-x} + \left(\sqrt[3]{2-x} \right)^2} = \frac{0}{3\sqrt[3]{4}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{о) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{x} = -1.$$

$$\text{п) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{2(x+1)} = \left| \frac{x+1=t}{t \rightarrow 0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{р) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{3x} = \left| \operatorname{tg}(2x) \approx 2x \text{ при } x \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{с) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{2x} = \left| e^{-x} - 1 \approx -x \text{ при } x \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{т) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(8x) - \cos(x)}{1 - \cos(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - (1 - \cos(8x))}{1 - \cos(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(3x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(8x)}{1 - \cos(3x)} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos(8x) \approx \frac{(8x)^2}{2}; 1 - \cos(x) \approx \frac{(x)^2}{2} \\ 1 - \cos(3x) \approx \frac{(3x)^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{64x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}} = \frac{1}{9} - \frac{64}{9} = \frac{1-64}{9} = -\frac{63}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{у) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - e^{3x}}{\operatorname{tg}(3x)} &= \left| \operatorname{tg}(3x) \approx 3x \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - e^{3x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 + 1 - e^{3x}}{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \left| \begin{array}{l} 2^x - 1 \approx x \ln 2 \\ e^{3x} - 1 \approx 3x \\ \text{при } x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 2}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{3x} = \\ &= \frac{\ln 2}{3} - 1 = \ln \sqrt[3]{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{ф) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(-\pi x)}{\sin(2\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\operatorname{tg}(\pi x)}{\sin(2\pi x)} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{Внимание! Заменить эквивалентной величиной} \\ \text{сейчас нельзя, так как при } x \rightarrow 2, \pi x \rightarrow 2\pi, \text{ а не к } 0. \\ \text{Сделаем замену } x - 2 = t, x = 2 + t, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg}(\pi(2+t))}{\sin(2\pi(2+t))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg}(2\pi + \pi t)}{\sin(4\pi + 2\pi t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg}(\pi t)}{\sin(2\pi t)} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\pi t) \approx \pi t \\ \sin(2\pi t) \approx 2\pi t \\ \text{при } t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\pi t}{2\pi t} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 2. Найти асимптоты и построить эскизы графиков функций:

$$\text{а) } y = \frac{-x+1}{2x+3}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+2x+3}{-x-1}; \quad \text{в) } y = \frac{|x-1|}{3x+2};$$

$$\text{г) } y = \frac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}}.$$

Решение

$$\text{а) } y = \frac{-x+1}{2x+3}.$$

$$1) \text{ ОД.З.: } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \infty\right).$$

2) Найдем точки пересечения с осями координат:

$$\text{при } x = 0 \quad y = \frac{1}{3};$$

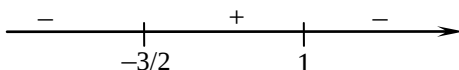
$$\left(0, \frac{1}{3}\right) - \text{получили точку пересечения с осью } OY.$$

$$\text{При } y = 0 \quad x = 1;$$

$(1, 0)$ – получили точку пересечения с осью OX .

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{-x+1}{2x+3} = \infty \Rightarrow x = -\frac{3}{2} - \text{уравнение вертикальной}$$

асимптоты.

Наклонную асимптоту находим по формуле

$$y = kx + b,$$

где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{x(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x^2+3x} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x+3} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{array} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2};$$

$$y = -\frac{1}{2} - \text{уравнение горизонтальной асимптоты.}$$

5) Строим эскиз графика (рис. 2.9).

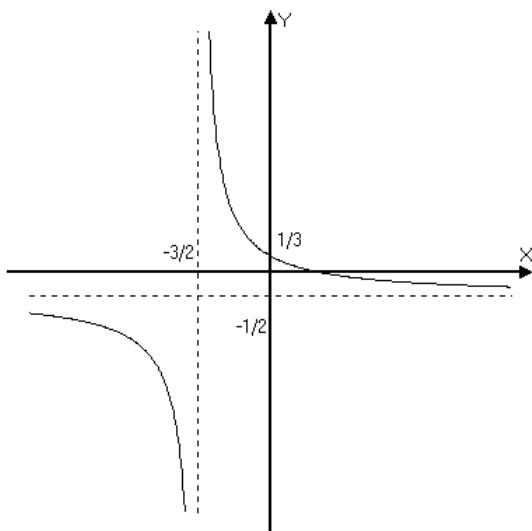


Рис. 2.9

$$б) y = \frac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1}.$$

1) О.Д.З.: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $y = -3$,

$(0, -3)$ – получили точку пересечения с осью OY ;

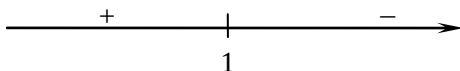
При $y = 0$ $x^2 + 2x + 3 = 0$;

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0 \text{ – корней нет } \Rightarrow$$

график функции ось OX не пересекает

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1} = \infty \Rightarrow x = -1 \text{ – уравнение вертикальной}$$

асимптоты.

Наклонную асимптоту находим по формуле:

$$y = kx + b,$$

где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x(-x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{-x^2 - x} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right|$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{-1 - \frac{1}{x}} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1} - (-1)x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + x(-x - 1)}{-x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 - x}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{-1 - \frac{1}{x}} = -1;$$

$y = -x - 1$ – уравнение наклонной асимптоты.

5) Строим эскиз графика (рис. 2.10).

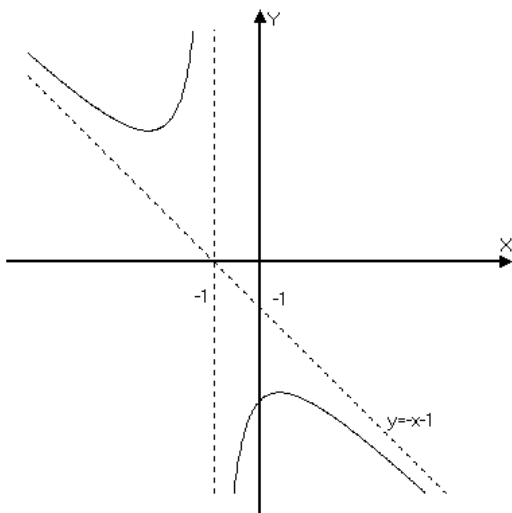


Рис. 2.10

$$в) y = \frac{|x-1|}{3x+2}.$$

$$1) y = \begin{cases} \frac{x-1}{3x+2}, & \text{если } x \geq 1, \\ \frac{1-x}{3x+2}, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

$$\text{О.Д.З.: } x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \infty\right).$$

2) Найдем точки пересечения с осями координат.

$$\text{При } x = 0 \quad y = \frac{1}{2},$$

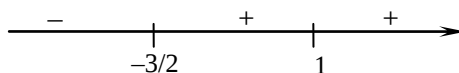
$$\left(0, \frac{1}{2}\right) - \text{точка пересечения с осью } OY;$$

$$\text{При } y = 0 \quad |x-1| = 0; \quad x = 1,$$

$(1, 0)$ – точка пересечения с осью OX .

3) Промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{|x-1|}{3x+2} = \infty \Rightarrow x = -\frac{2}{3} - \text{уравнение вертикальной}$$

асимптоты.

Правую наклонную асимптоту найдем по формулам:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(3x+2)} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{3} = 0; \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3x+2} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{3};$$

$y = \frac{1}{3}$ – уравнение правой горизонтальной асимптоты;

левую наклонную асимптоту – по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x(3x+2)} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{3x+2} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{1}{3};$$

$y = -\frac{1}{3}$ – уравнение левой горизонтальной асимптоты.

5) Строим эскиз графика (рис. 2.11).

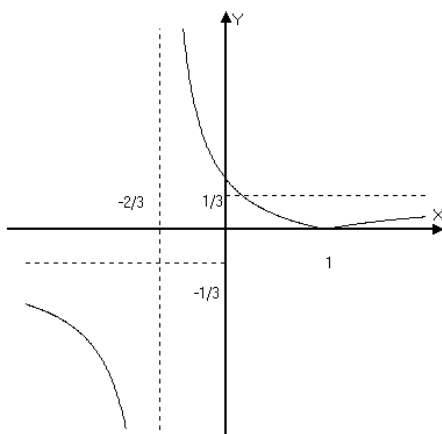
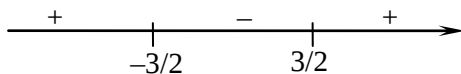


Рис. 2.11

$$г) y = \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 9}}.$$

$$1) \text{ Найдем О.Д.З.: } 4x^2 - 9 > 0 \quad (2x - 3)(2x + 3) > 0.$$



$$\text{О.Д.З.: } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

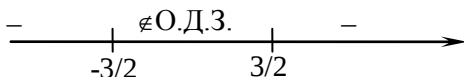
2) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $y = 0$ $1 - x^2 = 0$; $x_1 = 1$ и $x_2 = -1 \notin \text{О.Д.З.} \Rightarrow$ график функции не пересекает ось OX ;

При $x = 0 \notin \text{О.Д.З.} \Rightarrow$ график ось OY не пересекает.

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}-0} \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+0} \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \infty \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{3}{2} -$$

уравнения вертикальных асимптот.

Правая и левая наклонные асимптоты различны.

Найдем правую наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{1 - x^2}{x\sqrt{4x^2 - 9}} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{4 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \leftarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \leftarrow -\infty} \left(\frac{1 - x^2}{\sqrt{4x^2 - 9}} - \left(-\frac{1}{2}x\right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \leftarrow -\infty} \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{4x^2-9}} + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} + \lim_{x \leftarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{4x^2-9}} \right) = \\
&= 0 + \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{x\sqrt{4x^2-9} - 2x^2}{2\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2} \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{4x^2-9} - 2x)(\sqrt{4x^2-9} + 2x)}{\sqrt{4x^2-9}(\sqrt{4x^2-9} + 2x)} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{x(4x^2 - 9 - 4x^2)}{\sqrt{4x^2-9}(\sqrt{4x^2-9} + 2x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{-9x}{4x^2 - 9 + 2x\sqrt{4x^2-9}} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{-9}{4x - \frac{9}{x} + 2\sqrt{4x^2-9}} = \frac{-9}{\infty} = 0;
\end{aligned}$$

$y = -\frac{1}{2}x$ – уравнение правой наклонной асимптоты.

Функция $y = \frac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}}$ – четная, так как

$$y(-x) = \frac{-(-x)^2+1}{\sqrt{4(-x)^2-9}} = \frac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}} = y(x), \text{ следовательно, график этой}$$

функции симметричен относительно оси OY .

Тогда $y = \frac{1}{2}x$ – уравнение левой наклонной асимптоты.

5) Строим эскиз графика (рис. 2.12).

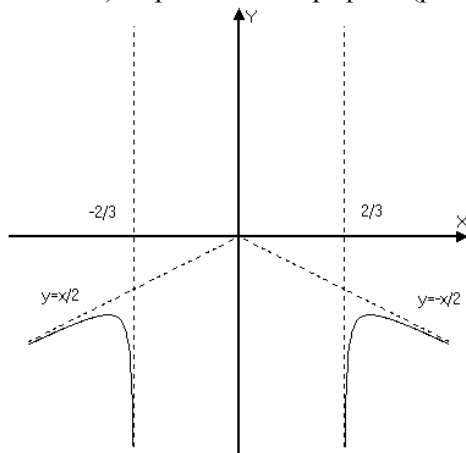


Рис. 2.12

Задача 3. Найти точки разрыва следующих функций, определить характер разрыва:

а) $f(x) = \frac{|-x-1|}{-x-1};$

б) $f(x) = \frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)}.$

Решение

а) $f(x) = \frac{|-x-1|}{-x-1}.$

В точке $x = -1$ функция не определена, следовательно, $x = -1$ – точка разрыва функции

Раскроем модуль:

$$|-x-1| = \begin{cases} -x-1, & \text{если } -x-1 \geq 0, \\ -(-x-1), & \text{если } -x-1 < 0; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-(-x-1)}{-x-1} = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-x-1}{-x-1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) \Rightarrow x = -1 \text{ – точка разрыва I рода.}$$

б) $f(x) = \frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)}.$

$x = 2, x = 1$ – точки разрыва;

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)} = \left(\frac{7}{0}\right) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)} = \left(\frac{5}{0}\right) = \infty;$$

$x = 1$ и $x = 2$ – точки разрыва II

Типовой вариант контрольной работы

ТЕМА: предел функции, построение эскизов графиков функций.

1. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \sqrt{11x} + \sqrt{25x^4 - 81}}{(x - 7\sqrt{x})};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 21x - 7}{2x^2 + 18x + 9} \right)^{2x+1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(1+x)}{e^{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 6}} - e}.$$

2. Построить эскизы графиков следующих функций с помощью асимптот:

$$1) y = \frac{x^2}{2x+1}; \quad 2) y = \frac{-x^2 - 8}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

3. Найти точки разрыва функции $y = \frac{\arcsin(x+3)}{(4-x^2)(x+3)}$, исследовать характер точек

разрыва.