Инструкция для выполнения домашнего задания №2

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе 3, Ваш номер в списке – 15. Тогда по табл. 1 имеем:

3	*b*	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую пятнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты						
	b	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*
15	–4	2	–2	7	4	3	–8

Таблица 2.1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты						
1	*a*	*b*	*c*	*d*	*k*	*f*	*m*
2	*c*	*d*	*b*	*a*	*k*	*f*	*m*
3	*b*	*a*	*k*	*d*	*c*	*f*	*m*
4	*c*	*a*	*b*	*k*	*d*	*f*	*m*
5	*a*	*c*	*d*	*b*	*k*	*f*	*m*
6	*a*	*k*	*b*	*d*	*c*	*f*	*m*
7	*b*	*k*	*a*	*c*	*d*	*f*	*m*
8	*c*	*k*	*d*	*a*	*b*	*f*	*m*
9	*b*	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*
10	*d*	*k*	*a*	*c*	*b*	*f*	*m*
11	*d*	*c*	*k*	*b*	*a*	*f*	*m*
12	*k*	*c*	*a*	*d*	*b*	*f*	*m*
13	*d*	*a*	*b*	*k*	*c*	*f*	*m*
14	*k*	*b*	*c*	*d*	*a*	*f*	*m*
15	*k*	*a*	*c*	*b*	*d*	*f*	*m*
16	*k*	*c*	*d*	*a*	*b*	*f*	*m*

Таблица 2.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
						f	*m*
1	1	2	–1	3	6	4	27
2	2	–1	4	–2	–1	3	8
3	-2	4	10	2	3	3	81
4	3	6	–3	–2	4	5	64
5	1	5	2	–3	–4	2	–8
6	4	3	11	–1	–4	3	–81
7	2	5	–2	4	10	3	–64
8	5	3	–1	4	9	3	27
9	–2	5	6	2	–3	4	8
10	–4	10	2	–1	4	2	–1
11	2	3	–2	3	1	3	8
12	–6	5	–1	4	1	2	–64
13	3	2	9	–2	–3	4	27
14	4	5	2	–4	3	6	81
15	–4	2	–2	7	4	3	–8
16	2	5	–1	–2	1	3	–1
17	1	–1	2	3	5	4	64
18	10	–2	6	–4	3	5	–64
19	4	5	–3	6	–4	2	8
20	2	1	3	5	4	6	–8
21	3	5	–2	4	1	4	27
22	–3	2	–2	3	4	5	–27
23	1	3	2	4	5	2	1
24	3	–5	6	1	2	2	–1
25	1	–2	4	2	5	3	–64
26	2	1	6	4	–3	5	81
27	1	4	–3	2	6	8	64
28	4	5	–9	7	3	2	–1
29	3	2	–3	9	5	6	–8
30	–2	3	4	1	–2	4	27

Домашнее задание №2

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d + f$ в точке $x_0 = k$;

б) $y = \dfrac{a}{\sqrt[4]{fx^d}} - \dfrac{c}{\sqrt[3]{bx^a}}$ в точке $x_0 = f$;

в) $y = c(a\sqrt[6]{x} - k\sqrt[f]{x^3})\sqrt[3]{x^b}$ в точке $x_0 = 1$;

г) $y = \dfrac{m}{cx^3 + dx^2 + kx + a}$ в точке $x_0 = 0$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt[f+1]{ax^2 + cx + d}}$;

е) $y = (ax + d)^f + \dfrac{\sqrt{b^2 - x^2}}{k + d}$;

ж) $y = (f + 4)^x \sin bx$;

з) $y = \sin^{-b}(cx) + k\log_f(cx - d)$;

и) $y = \dfrac{a + \sqrt{bx + c}}{x}$;

к) $y = -\dfrac{c}{k(a - b\cos x)^3}$;

л) $y = \dfrac{1}{a}\log_2^5(ax + c)$;

м) $y = b\ln \mathrm{tg}(\dfrac{ax}{m})$;

н) $y = \sqrt{e^{ax} + f} + c\arccos(dx)$;

о) $y = c\log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(fx))$;

п) $y = 3^{\mathrm{ctg}\frac{(bx+k)^2}{dx}}$;

р) $y = ax^{\mathrm{arctg}(fx)}$;

с) $y = \left(a + \dfrac{b}{x}\right)^{cx+d}$.

Задача 2. Написать уравнения касательной и нормали к графикам функций:

а) $y = a\sqrt[3]{bx + c}$ в точке $x_0 = 0$;

б) $y = e^{a - bx^2}$ в точке $x_0 = d$.

Задача 3. Провести полное исследование следующих функций и построить их графики:

а) $y = (ax - b)^2(cx - d)$;

б) $y = \dfrac{ax^3}{(b - cx)^2}$;

Пример выполнения домашнего задания №2

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = -x^4+x^3+2x^2+3x+2$ в точке $x_0 = -1$.

Решение

а) $y = -x^4+x^3+2x^2+3x+2$ в точке $x_0= -1$.

$y' = (-x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2)' = (-x^4)' + (x^3)' + 2(x^2)' + 3(x)' + 0 = -4x^3 + 3x^2 + 2 \cdot 2x + 3;$

$y'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 4 + 3 - 4 + 3 = \mathbf{6}$.

б) $y = \dfrac{-1}{\sqrt[4]{2x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^{-1}}}$ в точке $x_0 = 2$.

Преобразуем функцию $y = -(2x^3)^{-\frac{1}{4}} - 2\sqrt[3]{x} = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{3}{4}} - 2\sqrt[3]{x}$.

$$y' = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{3}{4}}\right)' - \left(2\sqrt[3]{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{3}{4}-1} - 2\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}};$$

$$y'(2) = \frac{3}{4\sqrt[4]{2}} 2^{-\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}2^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}2^{-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\cdot 4} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \mathbf{\frac{3}{16}} - \mathbf{\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}}.$$

в) $y = 2\left(-\sqrt[6]{x} + \sqrt{x^3}\right)\sqrt[3]{x}$ в точке $x = 1$.

Преобразуем функцию

$$y = 2\left(-x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{3}{2}}\right)x^{\frac{1}{3}} = 2\left(-x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}\right) = 2\left(-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{11}{6}}\right);$$

$$y' = 2\left(-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{11}{6}}\right)' = 2\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{11}{6}x^{\frac{11}{6}-1}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}\right);$$

$$y'(1) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{11}{6}\right) = 2\,\frac{11-3}{6} = \mathbf{\frac{8}{3}}.$$

г) $y=\dfrac{8}{2x^3+3x^2-x-1}$ в точке $x_0 = 0$.

$$y'=-\frac{8\left(2x^3+3x^2-x-1\right)'}{\left(2x^3+3x^2-x-1\right)^2}=-\frac{8\left(2\cdot 3x^2+3\cdot 2x-1\right)}{\left(2x^3+3x^2-x-1\right)^2}=-\frac{8\left(6x^2+6x-1\right)}{\left(2x^3+3x^2-x-1\right)^2};$$

$$y'(0)=-\frac{8(-1)}{(-1)^2}=\mathbf{8}.$$

д) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x^2+2x+3}}=\left(-x^2+2x+3\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x))' = f(g(x))'\cdot g'(x)$.

$$y'=-\frac{1}{3}\left(-x^2+2x+3\right)^{-\frac{1}{3}-1}\left(-x^2+2x+3\right)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-x^2+2x+3\right)^{-\frac{4}{3}}\left(-2x+2\right)==\frac{\mathbf{2x-2}}{\mathbf{3\sqrt[4]{\left(-x^2+2x+3\right)^4}}}.$$

е) $y=(-x+2)^2+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{-1+3}=(-x+2)^2+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

$$y'=\left((-x+2)^2\right)'+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right)'=2(-x+2)^{2-1}(-x+2)'+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=2(-x+2)(-1)+\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)'=2(x-2)+\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\left(-2x\right)=$$

$$=\mathbf{2(x-2)}-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2\sqrt{1-x^2}}}.$$

ж) $y = (2+4)^x\sin x = 6^x\sin x$.

Воспользуемся правилом нахождения производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$.

$y' = (6^x)'\sin x + 6^x(\sin x)' = \mathbf{6^x\ln 6 \sin x + 6^x\cos x}$.

з) $y = \sin^{-1}(2x)+(-1)\log_2(2x-3)$.

$y' = (-1)\sin^{-2}2x(\sin 2x)' - (\log_2(2x-3))' = -\sin^{-2}2x(\cos 2x)(2x)' -$
$-\dfrac{1}{(2x-3)\ln 2}(2x-3)' = \mathbf{-2}\dfrac{\mathbf{\cos 2x}}{\mathbf{\sin^2 2x}} - \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{(2x-3)\ln 2}}$.

и) $y = \dfrac{-1+\sqrt{x+2}}{x}$.

Воспользуемся правилом нахождения производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(-1+\sqrt{x+2}\right)' x - \left(-1+\sqrt{x+2}\right)x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}(x+2)' x - \left(\sqrt{x+2}-1\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+2}+1}{x^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x\sqrt{x+2}}} + \frac{\mathbf{1-\sqrt{x+2}}}{\mathbf{x^2}}.$$

к) $y = -\dfrac{2}{-1(-1-\cos x)^3}$.

Преобразуем функцию

$$y = -\frac{2}{-1(-1-\cos x)^3} = -\frac{2}{(1+\cos x)^3} = -2(1+\cos x)^{-3}.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

$$y' = -2(-3)(1+\cos x)^{-3-1}(1+\cos x)' = 6(1+\cos x)^{-4}(0+(-\sin x)) =$$

$$= \frac{\mathbf{-6\sin x}}{\mathbf{(1+\cos x)^4}}.$$

л) $y = -\log_2^5(-x+2)$.

$y' = -(\log_2^5(-x+2))' = -5\log_2^4(-x+2)(\log_2(-x+2))' =$

$$= -5\log_2^4(-x+2)\frac{1}{(-x+2)\ln 2}(-x+2)' =$$

$$= -5\log_2^4(-x+2)\frac{1}{(-x+2)\ln 2}(-1) = \frac{\mathbf{5\log_2^4(-x+2)}}{\mathbf{(-x+2)\ln 2}}.$$

м) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)\right)$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{8}\right)}\left(-\frac{x}{8}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)}\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8tg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{8}}\right)\mathbf{cos}^2\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{8}}\right)}.$$

н) $y = \sqrt{e^{-x}+2} + 2\arccos(3x)$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}+2}}\left(e^{-x}+2\right)' + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right)(3x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}+2}}\left(e^{-x}(-x)'+0\right) - \frac{2\cdot 3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}+2}}e^{-x}(-1) - \frac{6}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= -\frac{\boldsymbol{e^{-x}}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{e^{-x}}+\mathbf{2}}} - \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{1-9}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}.$$

о) $y = 2\log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(2x))$.

$$y' = 2\left(\log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(2x))\right)' = 2\frac{1}{\arcsin(2x)\ln\frac{1}{2}}\left(\arcsin(2x)\right)' =$$

$$= \frac{2}{\arcsin(2x)\ln\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\left(2x\right)' = \frac{2\cdot 2}{\arcsin(2x)\ln\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x)^2}} =$$

$$= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{arcsin(2}\boldsymbol{x}\mathbf{)ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{1-(2}\boldsymbol{x}\mathbf{)^2}}}.$$

п) $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}}$.

$$y' = 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \ln 3 \left(\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}\right)' = 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \ln 3 \left(-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)}\right)\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)' =$$

$$= -3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)} \frac{1}{3} \frac{\left((x-1)^2\right)' x - (x-1)^2 x'}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)} \frac{2(x-1)(x-1)' x - (x-1)^2}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)} \frac{2x(x-1) - (x-1)^2}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right)} \frac{(x-1)(2x - x + 1)}{x^2} =$$

$$= -\boldsymbol{\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg}\frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3(x^2 - 1)}{\sin^2\left(\frac{(x-1)^2}{3x}\right) x^2}}.$$

р) $y = -x^{\operatorname{arctg}(2x)}$.
$y' = -(x^{\operatorname{arctg}(2x)})'$.

Данная функция не является ни показательной, ни степенной. Поэтому для нахождения производной этой функции воспользуемся предварительным логарифмированием:

$y_1' = y_1(\ln y_1)'$,

где $y_1 = x^{\operatorname{arctg}(2x)}$;

$\ln y_1 = \ln x^{\operatorname{arctg}(2x)} = \operatorname{arctg}(2x) \ln(x)$;

$(\ln y_1)' = (\operatorname{arctg}(2x))' \ln(x) + \operatorname{arctg}(2x)(\ln(x))' =$

$$= \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)'\ln x + \operatorname{arctg} 2x \frac{1}{x} = \frac{2}{1+4x^2}\ln x + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x},$$

тогда

$$y' = -y_1(\ln y_1)' = -x^{\operatorname{arctg}(2x)}\left(\frac{2}{1+4x^2}\ln x + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}\right).$$

с) $y = \left(-1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}$.

Функция не является ни показательной, ни степенной. Поэтому для нахождения производной этой функции воспользуемся предварительным логарифмированием (см. п. р)):

$$\ln y = \ln\left(-1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3} = (2x+3)\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right);$$

$$(\ln(y))' = (2x+3)'\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right) + (2x+3)\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right) + (2x+3)\frac{1}{-1+\frac{1}{x}}\left(-1+\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right) + (2x+3)\frac{x}{1-x}\left(0-\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x+3}{(1-x)x};$$

$$y' = y(\ln y)' = \left(-1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}\left(2\ln\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x+3}{(1-x)x}\right).$$

Задача 2. Написать уравнения касательной и нормали к графикам функций

а) $y = -\sqrt[3]{x+2}$ в точке $x_0 = 0$;

б) $y = e^{-1-x^2}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение

а) $y = -\sqrt[3]{x+2}$ в точке x_0.

Уравнение касательной и уравнение нормали вычисляются по формулам:

$y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)$,

$(x - x_0) + f\,'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$,

соответственно.

$f(x_0) = f(0) = -\sqrt[3]{2}$;

$f'(x) = \left(-\sqrt[3]{x+2}\right)' = \left(-(x+2)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}(x+2)^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}(x+2)^{\frac{-2}{3}}$;

$f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{-2}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$;

$y = -\sqrt[3]{2} + \left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)(x-0)$;

$\boldsymbol{y = -\sqrt[3]{2} - \frac{x}{3\sqrt[3]{4}}}$ – получили уравнение касательной.

$(x-0) + \left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)(y + \sqrt[3]{2}) = 0$;

$x - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}y - \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}} = 0$;

$\boldsymbol{x - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}y - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} = 0}$ – получили уравнение нормали.

б) $y = e^{-1-x^2}$ в точке $x_0 = 3$.

$f(x_0) = f(3) = e^{-1-9} = e^{-10}$;

$f'(x) = \left(e^{-1-x^2}\right)' = e^{-1-x^2}\left(-1-x^2\right)' = e^{-1-x^2}(-2x) = -2xe^{-1-x^2}$;

$f'(x_0) = f'(3) = -2\cdot 3\cdot e^{-1-9} = -6e^{-10}$;

$y = e^{-10} - 6e^{-10}(x-3) = e^{-10} - 6e^{-10}x + 18e^{-10}$;

$\boldsymbol{y = 19e^{-10} - 6e^{-10}x}$ – получили уравнение касательной.

$(x-3) - 6e^{-10}(y - e^{-10}) = 0$;

$(x-3) - 6e^{-10}y + 6e^{-20} = 0$;

$\boldsymbol{x - 6e^{-10}y + 6e^{-20} - 3} = 0$ – получили уравнение нормали.

Задача 3. Провести полное исследование следующих функций и построить их графики:

а) $y = (-x-1)^2(2x-3) = (x+1)^2(2x-3)$; б) $y = \frac{-x^3}{(1-2x)^2}$;

Решение

а) $y = (-x-1)^2(2x-3) = (x+1)^2(2x-3)$.

1) О.Д.З.: $x \in R$.

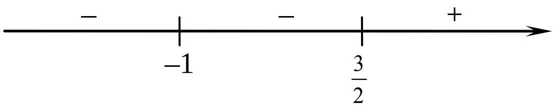
2)Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $y(-x) = ((-x)+1)^2(2(-x)-3) = (-x+1)^2 \cdot (-2x-3) \neq \pm y(x)$.

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $y = -3$, $(0, -3)$ – точка пересечения с осью OY;

При $y = 0$ $x = -1$ и $x = \dfrac{3}{2}$, $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$, $(-1, 0)$ – точки пересечения с осью OX.

4) Найдем промежутки постоянства знака значений функции. На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов:



5) Найдем асимптоты функций.

Функция является непрерывной, следовательно, вертикальных асимптот нет. Наклонных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(2x+3)}{x} = \lim_{x\to\infty}(x+1)^2\left(2+\frac{3}{x}\right) = \infty.$$

6) Строим эскиз (рис. 2.13).

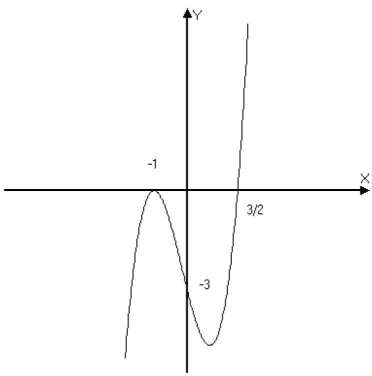


Рис. 2.13

Уточним график с помощью первой и второй производной.

7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции.

$y' = ((x + 1)^2(2x - 3))' = ((x + 1)^2)'(2x - 3) + (x + 1)^2(2x - 3)' =$
$= 2(x + 1)(x + 1)'(2x - 3) + 2(x + 1)^2 = 2(x + 1)(2x - 3) + 2(x + 1)^2 =$
$= 2(x + 1)(2x - 3 + x + 1) = 2(x + 1)(3x - 2).$

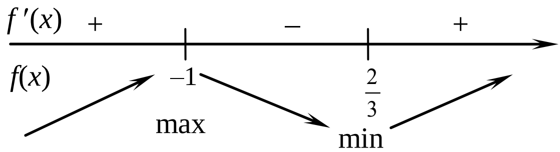
Найдем нули производной:

$y' = 0$, тогда $2(x + 1)(3x - 2) = 0;$

$x + 1 = 0$ или $3x - 2 = 0;$

$x = -1,$ $x = 2/3.$

На числовой оси отметим нули первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = -1$ – максимум функции,

В точке, где $x = 2/3$ – минимум функции.

Найдем значения функции в точках максимума и минимума:

$y(-1) = 0,$

$y(2/3) = (2/3 + 1)^2(2 \cdot 2/3 - 3) = (5/3)^2(4/3 - 3) =$
$= (25 \cdot (4 - 9))/(9 \cdot 3) = -125/27.$

На интервале $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ функция возрастает; на интервале $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ функция убывает.

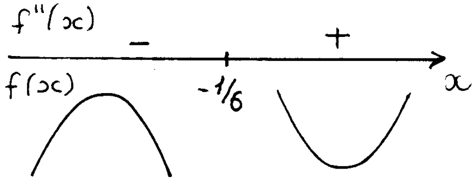
8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

$y'' = (2(x + 1)(3x - 2))' = 2((x + 1)'(3x - 2) + (x + 1)(3x - 2)') =$
$= 2(3x - 2 + (x + 1)3) = 2(3x - 2 + 3x + 3) = 2(6x + 1).$

Найдем нули второй производной:

$6x + 1 = 0;$ $x = -1/6.$

Отметим нули второй производной на числовой прямой. Затем определим знаки получившихся интервалов:



$$y\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}+1\right)^2 \left(-\frac{2}{6}-3\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(-\frac{1}{3}-3\right) = (25\cdot(-1-$$

$$-9))/(36\cdot 3) = -\frac{250}{108} = -\frac{125}{54};$$

$\left(-\frac{1}{6}; \frac{125}{5}\right)$ – точка перегиба.

На интервале $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$ график функции выпуклый вверх; на $\left(-\frac{1}{6}, \infty\right)$ – выпуклый вниз.

9) Строим график (рис. 2.14).

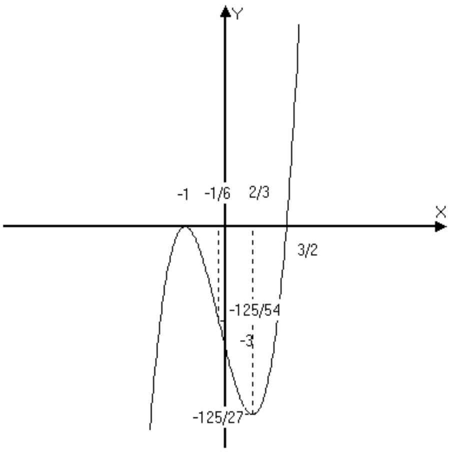


Рис. 2.14

б) $y = \dfrac{-x^3}{(1-2x)^2}$.

1) О.Д.З.: $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{-(-x)^3}{\left(1-2(-x)\right)^2} = \frac{x^3}{(1+2x)^2} \neq \pm\, y(x).$$

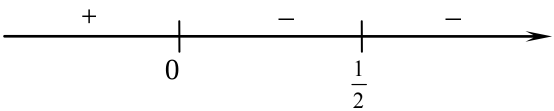
3) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $\quad y = 0$;

(0, 0) – точка пересечения с осями.

4) Найдем промежутки постоянства знака значения функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов.



5) Найдем асимптоты функции.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{-x^3}{(1-2x)^2} = \infty \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Наклонную асимптоту находим по формуле:

$y = kx + b$,

где $\quad k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^3}{x(1-2x)^2} = -\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{(1-2x)^2} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = -\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2} = -\frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3}{(1-2x)^2} + \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3 + x(1-2x)^2}{4(1-2x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3 + x - 4x^2 + 4x^3}{4(1-4x+4x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4x^2}{4(1-4x+4x^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - 4}{4(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} = -\frac{4}{4\cdot 4} = -\frac{1}{4};$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \text{уравнение наклонной асимптоты.}$$

Для построения асимптоты найдем точки ее пересечения с осями координат:

x	0	–1
y	$-\frac{1}{4}$	0

6) Строим эскиз (рис. 2.15).

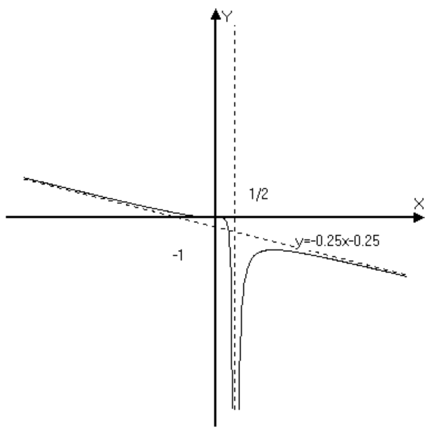


Рис. 2.15

Уточним график функции с помощью первой и второй производной.

7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции.

$$y' = -\left(\frac{x^3}{(1-2x)^2}\right)' = -\frac{\left(x^3\right)'(1-2x)^2 - x^3\left((1-2x)^2\right)'}{(1-2x)^4} =$$

$$= -\frac{3x^2(1-2x)^2 - 2x^3(1-2x)(-2)}{(1-2x)^4} = -\frac{x^2(1-2x)(3(1-2x)+4x)}{(1-2x)^4} =$$

$$= -\frac{x^2(3-6x+4x)}{(1-2x)^3} = -\frac{x^2(3-2x)}{(1-2x)^3} = \frac{x^2(2x-3)}{(1-2x)^3}.$$

Найдем нули производной:

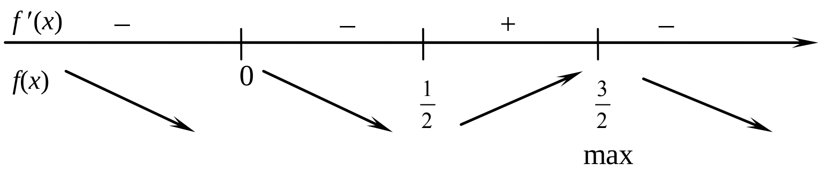
$y' = 0;$

$x^2(2x-3) = 0;$

$x = 0$ или $2x - 3 = 0,$

$x = \frac{3}{2},$

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = \frac{3}{2}$ – максимум функции.

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^3}{(1-3)^2} = -\frac{27}{8\cdot 4} = -\frac{27}{32};$$

$\left(\frac{3}{2}; -\frac{27}{32}\right)$ – точка максимума функции.

На интервале $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ функция убывает, на интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ функция возрастает.

8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2(2x-3)}{(1-2x)^3} \right)' = \left(\frac{2x^3 - 3x^2}{(1-2x)^3} \right)' =$$

$$= \frac{\left(2x^3 - 3x^2\right)'(1-2x)^3 - \left(2x^3 - 3x^2\right)\left((1-2x)^3\right)'}{(1-2x)^6} =$$

$$= \frac{\left(6x^2 - 6x\right)(1-2x)^3 - 3\left(2x^3 - 3x^2\right)(1-2x)^2(1-2x)'}{(1-2x)^6} =$$

$$= \frac{(1-2x)^2\left(\left(6x^2 - 6x\right)(1-2x) - 3\left(2x^3 - 3x^2\right)(-2)\right)}{(1-2x)^6} =$$

$$= \frac{6x\left((x-1)(1-2x) + \left(2x^2 - 3x\right)\right)}{(1-2x)^4} = \frac{6x\left(x - 1 - 2x^2 + 2x + 2x^2 - 3x\right)}{(1-2x)^4} =$$

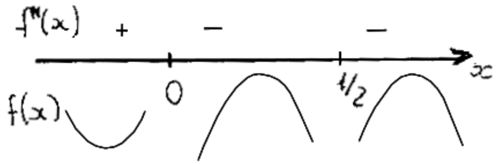
$$= \frac{6x(-1)}{(1-2x)^4} = -\frac{6x}{(1-2x)^4}.$$

Найдем нули второй производной:

$$-\frac{6x}{(1-2x)^4} = 0;$$

$$x = 0, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя второй производной и определим знаки получившихся интервалов:



На интервале $(-\infty, 0)$ график функции выпуклый вверх; на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ – выпуклый вниз.

В точке, где $x = 0$ – перегиб функции.

$y(0) = 0$;

$(0; 0)$ – точка перегиба.

9) Строим график (рис. 2.16).

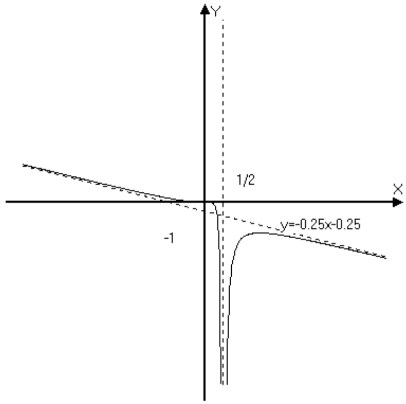


Рис. 2.16