ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3.

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе №5, Ваш номер в списке – 14. Тогда по табл.1 имеем:

5	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	B	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
14	5	1	3	–6	6	2	9	3

Таблица 1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты							
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
2	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*G*
3	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*F*	*A*	*G*
4	*B*	*A*	*C*	*K*	*D*	*F*	*M*	*G*
5	*C*	*D*	*A*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
6	*D*	*K*	*B*	*A*	*M*	*C*	*F*	*G*
7	*K*	*M*	*C*	*F*	*A*	*B*	*D*	*G*
8	*M*	*F*	*D*	*A*	*C*	*K*	*B*	*G*
9	*F*	*M*	*D*	*K*	*C*	*B*	*A*	*G*
10	*A*	*D*	*C*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
11	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
12	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*G*
13	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*
14	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*G*
15	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*G*
16	*F*	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*A*	*G*
17	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*

Таблица 2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
							G
1	–2	1	4	5	3	–6	7	2
2	3	–2	1	–5	7	2	4	3
3	5	–3	4	1	2	–8	6	1
4	4	3	–2	1	6	3	5	2
5	8	–9	4	2	1	6	–2	1
6	3	4	–5	1	–3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	–9	1	3
8	5	1	3	–2	6	–8	–6	1
9	1	4	–3	2	9	–6	7	2
10	5	7	3	–6	1	–2	4	1
11	1	3	–5	2	6	4	9	2
12	9	–4	–1	–8	–3	6	5	1
13	2	–3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	–6	6	2	9	3
15	–4	–1	–8	9	–5	2	7	1
16	2	–3	3	1	–6	5	–1	2
17	–5	–4	2	4	–1	6	7	1
18	3	1	5	6	–4	2	9	2
19	2	4	–3	–5	–6	–5	8	1
20	1	–2	–7	8	3	5	–4	2
21	–8	–3	–1	6	4	1	–5	3
22	–2	–4	5	3	–6	7	6	1
23	1	9	–6	4	–2	–3	–1	2
24	3	–5	–1	3	6	–4	2	1
25	–1	–3	–6	4	1	–5	–4	2
26	9	–4	3	–5	2	1	6	2
27	7	6	–1	2	–3	8	–5	1
28	4	–1	5	–6	–4	7	3	3
29	–1	9	–3	–5	6	–8	2	1
30	2	1	9	3	–4	–1	6	2

Задача 1. Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 2A & F & K \\ -A & -B & M \end{pmatrix}; \; J = \begin{pmatrix} -C & B & -D \\ M & K & M \\ A & F & -B \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} C & -B & F \\ D & A & K \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $FI + MJ + E$, где F, N – числа из условия, E – единичная матрица;

2) $IJ - JI$;

3) HI;

4) J^{-1};

5) $JX = I$ (если $\det J = 0$, то $IX = J$);

6) $XJ = I$ (если $\det J = 0$, то $XI = J$).

Задача 2. Решить системы уравнений:

1) $$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = K, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = G, \\ 3Ax_1 + (B+K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = D, \\ -3Ax_1 - (B+K)x_2 - (F+C)x_3 - (M+D)x_4 = A; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = 0, \\ 3Ax_1 + (B+K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = 0, \\ -3Ax_1 - (B+K)x_2 - (F+C)x_3 - (M+D)x_4 = 0; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 2Mx_1 + 2Gx_2 + (K-C+A)x_3 + Bx_4 = C, \\ -3Mx_1 + Bx_2 + Cx_3 + Ax_4 = G, \\ -2Mx_1 + (B+G)x_2 + Ax_3 + Fx_4 = B, \\ Mx_1 + Gx_2 + Kx_3 + Dx_4 = A; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} 2Mx_1 + 2Gx_2 + (K-C+A)x_3 + Bx_4 = 0, \\ -3Mx_1 + Bx_2 + Cx_3 + Ax_4 = 0, \\ -2Mx_1 + (B+G)x_2 + Ax_3 + Fx_4 = 0, \\ Mx_1 + Gx_2 + Kx_3 + Dx_4 = 0; \end{cases}$$

5) $\begin{cases} Dx_1 + Cx_2 + Ax_3 + Fx_4 = A, \\ 2Dx_1 + 2Cx_2 + Bx_3 + Kx_4 = M, \\ -3Dx_1 - 3Cx_2 + Bx_3 + Mx_4 = G; \end{cases}$

6) $\begin{cases} Dx_1 + Cx_2 + Ax_3 + Fx_4 = 0, \\ 2Dx_1 + 2Cx_2 + Bx_3 + Kx_4 = 0, \\ -3Dx_1 - 3Cx_2 + Bx_3 + Mx_4 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} Ax_2 + Dx_3 + Cx_4 = F, \\ Bx_1 + Fx_2 - Kx_4 = M; \end{cases}$

8) $\begin{cases} Ax_2 + Dx_3 + Cx_4 = 0, \\ Bx_1 + Fx_2 - Kx_4 = 0. \end{cases}$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора, а так же матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов (вариант зависит от G):

– если $G = 1$, то $A = \begin{pmatrix} A & F & 0 \\ F & A & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$;

– если $G = 2$, то $A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & D & K \\ 0 & K & M \end{pmatrix}$;

– если $G = 3$, то $A = \begin{pmatrix} C & K & 0 \\ K & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$.

Задача 4. Привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду, сделать чертеж. Уравнение кривой:

– если $G = 1$, то
$P^2(D^2M^2 - F^2)x^2 + P^2(D^2 - M^2F^2)y^2 + 2MP^2(D^2 + F^2)xy + 2P(CF^2 - AMD^2)x + 2P(-AD^2 - CMF^2)y + A^2D^2 - C^2F^2 - F^2D^2 = 0$;

– если $G = 2$, то

$P^2(D^2M^2 + F^2)x^2 + P^2(D^2 + M^2F^2)y^2 + 2MP^2(D^2 -$
$- F^2)xy - 2P(CF^2 + AMD^2)x + 2P(AD^2 -$
$- CMF^2)y + A^2D^2 + C^2F^2 - F^2D^2 = 0;$

– если $G = 3$, то
$A^2x^2 + B^2y^2 + 2ABxy + Kx + Dy + F = 0;$

Здесь $P = \dfrac{1}{\sqrt{M^2 + 1}}$.

Пример выполнения домашнего задания №3

Номер по п/п	Коэффициенты							
	A	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
Произвольный номер	–3	1	4	9	–5	3	2	2

Задача 1. Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix};\ J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Найти $FI + MJ + E$.

После подстановки коэффициентов получаем:

$2I + 3J + E =$

$$= 2\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -12 & 4 & -10 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 3 & -27 \\ 9 & -15 & 9 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6-12 & 2+3 & 8-27 \\ -12+9 & 4-15 & -10+9 \\ 6-9 & -2+6 & 6-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 5 & -19 \\ -3 & -11 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-17} & \mathbf{5} & \mathbf{-19} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-10} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

$$2)\ IJ-JI=\begin{pmatrix}-3&1&4\\-6&2&-5\\3&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&1&-9\\3&-5&3\\-3&2&-1\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}-4&1&-9\\3&-5&3\\-3&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&4\\-6&2&-5\\3&-1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3(-4)+3+4(-3)&-3+1(-5)+4\cdot2&-3(-9)+1\cdot3+4(-1)\\-6(-4)+2\cdot3-5(-3)&-6+2(-5)-5\cdot2&-6(-9)+2\cdot3-5(-1)\\3(-4)-1\cdot3+3(-3)&3-1(-5)+3\cdot2&3(-9)-1\cdot3+3(-1)\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}-4(-3)+1(-6)-9\cdot3&-4+1\cdot2-9(-1)&-4\cdot4+1(-5)-9\cdot3\\3(-3)-5(-6)+3\cdot3&3-5\cdot2+3(-1)&3\cdot4-5(-5)+3\cdot3\\-3(-3)+2(-6)-1\cdot3&-3+2\cdot2+(-1)(-1)&-3\cdot4+2(-5)-1\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+3-12&-3-5+8&27+3-4\\24+6+15&-6-10-10&54+6+5\\-12-3-9&3+5+6&-27-3-3\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}12-6-27&-4+2+9&-16-5-27\\-9+30+9&3-10-3&12+25+9\\9-12-3&-3+4+1&-12-10-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&26\\45&-26&65\\-24&14&-33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-21&7&-48\\30&-10&46\\-6&2&-25\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+21&0-7&26+48\\45-30&-26+10&65-46\\-24+6&14-2&-33+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-7&74\\15&-16&19\\-18&12&-8\end{pmatrix}.$$

$3)\ H\cdot I=$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4(-3)-1(-6)+2\cdot 3 & 4-1\cdot 2+2(-1) & 4\cdot 4-1(-5)+2\cdot 3 \\ 9(-3)-3(-6)-5\cdot 3 & 9-3\cdot 2-5(-1) & 9\cdot 4-3(-5)-5\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -12+6+6 & 4-2-2 & 16+5+6 \\ -27+18-15 & 9-6+5 & 36+15-15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 \\ -24 & 8 & 36 \end{pmatrix}.$$

4) J^{-1}.

$$J=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\det J=-4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-9\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4(5-6)-(-3+9)-9(6-15)=4-6+81=79.$$

$\det J \neq 0 \Rightarrow J^{-1}$ существует

$$J^{-1}=\frac{1}{\det J}\left(J^{\vee}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Найдем $J^{\vee}=\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$, где J_{ij} – это определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы J, и взятый со знаком «+», если $i+j$ – четное, и со знаком «–» если $i+j$ – нечетное. Найдем компоненты матрицы $J^{\vee}$:

$$J_{11}=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5-6=-1;$$

$$J_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-(3+9)=-6;$$

$$J_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(-1+18)=-17;$$

$$J_{22}=\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=4-27=-23;$$

$$J_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 45 = -42;$$

$$J_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(-12 + 27) = -15;$$

$$J_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9;$$

$$J_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8 + 3) = 5;$$

$$J_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 3 = 17.$$

$$J^{\vee} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -9 \\ -17 & -23 & 5 \\ -42 & -15 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(J^{\vee}\right)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$J^{-1} = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$J \cdot J^{-1} = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -4(-1) + 1(-6) - 9(-9) & -4(-17) - 23 - 9 \cdot 5 & -4(-42) - 15 - 9 \cdot 17 \\ 3(-1) - 5(-6) + 3(-9) & 3(-17) - 5(-23) + 3 \cdot 5 & 3(-42) - 5(-15) + 3 \cdot 17 \\ -3(-1) + 2(-6) - 1(-9) & -3(-17) + 2(-23) - 1 \cdot 5 & -3(-42) + 2(-15) - 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 4 - 6 + 81 & 68 - 23 - 45 & 168 - 15 - 153 \\ -3 + 30 - 27 & -51 + 115 + 15 & -126 + 75 + 51 \\ 3 - 12 + 9 & 51 - 46 - 5 & 126 - 30 - 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 79 & 0 & 0 \\ 0 & 79 & 0 \\ 0 & 0 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матрица J^{-1} найдена верно.

5) Решить матричное уравнение: $JX = I$.

Домножим слева на J^{-1}:

$J^{-1}JX = J^{-1}I$; $X = J^{-1}I$;

$$J^{-1} = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$J^{-1}I = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1(-3)-17(-6)-42\cdot 3 & -1+(-17)\cdot 2+42 & -4-17(-5)-42\cdot 3 \\ -6(-3)-23(-6)-15\cdot 3 & -6-23\cdot 2+15 & -6\cdot 4-23(-5)-15\cdot 3 \\ -9(-3)+5(-6)+17\cdot 3 & -9+5\cdot 2-17 & -9\cdot 4+5(-5)+17\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 3+102-126 & -1-34+42 & -4+85-126 \\ 18+138-45 & -6-46+15 & -24+115-45 \\ 27-30+51 & -9+10-17 & -36-25+51 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -21 & 7 & -45 \\ 111 & -37 & 46 \\ 48 & -16 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/79 & 7/79 & -45/79 \\ 111/79 & -37/79 & 46/79 \\ 48/79 & -16/79 & -10/79 \end{pmatrix}.$$

6) Решить матричное уравнение $XJ = I$.

Домножим справа на J^{-1}.

$XJJ^{-1} = IJ^{-1}$;

$X = I\,J^{-1}$;

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 3-6+4(-9) & -3(-17)-23+4\cdot 5 & -3(-42)-15+4\cdot 17 \\ -6(-1)+2(-6)-5(-9) & -6(-17)+2(-23)-5\cdot 5 & -6(-42)-15\cdot 2-5\cdot 17 \\ -3+6-9\cdot 3 & 3(-17)+23+3\cdot 5 & 3(-42)+15+17\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -3-36 & 51-23+20 & 126-15+68 \\ 6-12+45 & 102-46-25 & 252-30-85 \\ 3-27 & -51+23+15 & -126+15+51 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -39 & 48 & 179 \\ 39 & 31 & 137 \\ -24 & -13 & -60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -39/79 & 48/79 & 179/79 \\ 39/79 & 31/79 & 137/79 \\ -24/79 & -13/79 & -60/79 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Решить системы линейных уравнений.

$$1)\quad \begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3+9x_4=-5, \\ -6x_1-5x_2++3x_3-3x_4=2, \\ -9x_1-4x_2+2x_3-3x_4=9, \\ 9x_1+4x_2-6x_3-12x_4=-3; \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 9 \\ 9 & 4 & -6 & 12 & -3 \end{array}\right)$$

; из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3; к четвертой строке прибавим вторую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & -7 & -10 & -30 & 24 \\ 0 & 7 & 6 & 15 & 18 \end{array}\right)$$

; из третьей строки вычтем вторую, к четвертой строке прибавим вторую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Последняя строка равносильна следующему уравнению:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=-6.$$

Следовательно, система несовместна, т. е. данная система решений не имеет.

2) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0, \\ -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 0; \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 0 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{в предыдущем} \\ \text{примеребыло} \\ \text{получено} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная, неопределенная.

x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные; x_4 – свободное.

Выразим базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 через x_4.

Из третьей строки следует:

$$-4x_3 - 15x_4 = 0 \Rightarrow 4x_3 = -15x_4 \Rightarrow x_3 = -\frac{15}{4}x_4 .$$

Из второй строки:

$$-7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 - 6(-\frac{15}{4}x_4) - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 + \frac{45}{2}x_4 = 15x_4;$$

$$7x_2 = \frac{45}{2}x_4 - 15x_4 = \frac{15}{2}x_4;$$

$$x_2 = \frac{15}{14}x_4.$$

Из первой строки: $-3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0$;

$$-3x_1 + \frac{15}{14}x_4 + 4\left(-\frac{15}{4}x_4\right) + 9x_4 = 0;$$

$$3x_1 = \frac{15}{14}x_4 - 15x_4 + 9x_4 = \frac{15}{14}x_4 - 6x_4 = \frac{15-84}{14}x_4 = -\frac{69}{14}x_4;$$

$$x_1 = -\frac{23}{14}x_4 .$$

Пусть $x_4 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{23}{14}c \\ x_2 = \dfrac{15}{14}c \\ x_3 = \dfrac{-15}{4}c \\ x_4 = c. \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\dfrac{23}{14} \\ \dfrac{15}{14} \\ -\dfrac{15}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) $$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 4 \\ -9x_1 + x_2 + 4x^2 - 3x_4 = 2 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & -12 & 1 & 4 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \end{array}\right)$$; четвертую и третью строки поменяем местами –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -12 & 1 & 4 \end{array}\right)$$; ко второй строке прибавим первую, умноженную на 3; к третьей прибавим первую, умноженную на 2, из четвертой вычтем первую умноженную на 2 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 7 & -13 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 10 \end{array}\right)$$; из третьей строки вычтем вторую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 8 \end{array}\right)$$; из четвертой строки вычтем третью –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 8 \end{array}\right).$$

Система совместная, определенная

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -3 \\ 7x_2 - 11x_3 + 24x_4 = -7 \\ -2x_3 - 4x_4 = 2 \\ -13x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = -2x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 3 \\ 7x_2 = 11x_3 - 24x_4 - 7 \\ x_3 = -2x_4 - 1 \\ x_4 = -\dfrac{8}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_3 = -2x_4 - 1 = -\frac{16}{13} - 1 = -\frac{29}{13};$$

$$7x_2 = 11x_3 - 24x_4 - 7 = -11\frac{29}{13} - 24\left(-\frac{8}{13}\right) - 7 =$$

$$= \frac{-319 + 192 - 91}{13} = -\frac{218}{13} \Rightarrow x_2 = -\frac{218}{91};$$

$$3x_1 = -2x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 3 = \frac{436}{91} + 5\left(-\frac{29}{13}\right) - 9\left(-\frac{8}{13}\right) - 3 =$$

$$= \frac{436 - 1015 + 504 - 273}{91} = -\frac{348}{91} \Rightarrow x_1 = -\frac{348}{3 \cdot 91} = -\frac{116}{91}.$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{116/91} \\ -\mathbf{218/91} \\ -\mathbf{29/13} \\ -\mathbf{8/13} \end{pmatrix}.$$

4) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 0 \\ -9x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & -12 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{в предудыщем} \\ \text{примеребыло} \\ \text{получено} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная, определенная

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 7x_2 - 11x_3 + 24x_4 = 0 \\ -2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -13x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Системаимеет единственнюе решение (0, 0, 0).

$$5)\ \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 3 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 18 & 8 & 1 & -5 & 3 \\ -27 & -12 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 18 & 8 & 1 & -5 & 3 \\ -27 & -12 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

; из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; к третьей строке прибавим первую, умноженную на 3 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -9 & -7 \end{array}\right)$$

; к третьей строке прибавим вторую –

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

; поменяем 2 и 3 столбцы местами, при этом меняем неизвестные x_2 и x_3 местами –

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

; ко второй строке прибавим третью, умноженную на 7 –

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 23 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

; поменяем 1 и 2 строки местами –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 4 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -9 & 23 \end{array}\right)\end{array}$$; вторую строку разделим на (–1);

поменяем 3 и 4 столбцы местами; при этом меняем неизвестные x_2 и x_3 местами –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -9 & 0 & 23 \end{array}\right)\end{array}$$; разделим третью строку на (–9) –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/9 \end{array}\right)\end{array}$$; из первой строки вычтем третью,

умноженную на 2 –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 0 & 4 & 19/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/9 \end{array}\right)\end{array}$$; к первой строке прибавим вторую,

умноженную на 3 –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 0 & 0 & 4 & 73/9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/9 \end{array}\right)\end{array}$$; первую строку разделим на 9 –

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/9 & 73/81\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/9 \end{array}\right)\end{array}.$$

Система совместная, неопределенная; $x_1, x_3, x_4 -$ базисные неизвестные; $x_2 -$ свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через x_2:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{4}{9}x_2 = \dfrac{73}{81} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -\dfrac{23}{9} \end{cases}$$

Пусть $x_2 = c, c \in R$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{73}{81} - \dfrac{4}{9}c \\ x_2 = c \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -\dfrac{23}{9} \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{73/81} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-23/9} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \mathbf{-4/9} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}.$$

6) $$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ 18 & 8 & 1 & -5 & 0 \\ -27 & -12 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{в предыдущем} \\ \text{примеребыло} \\ \text{получено} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная, неопределенная. x_1, x_3, x_4 – базисные неизвестные, x_2 – свободное. Выразим базисные неизвестные через x_2:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{4}{9}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases} \qquad \text{Пусть } x_2 = c, c \in R, \text{ тогда} \begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{9}c \\ x_2 = c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{pmatrix} = \mathbf{c}\begin{pmatrix} -\mathbf{4/9} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}\ .$$

7) $\begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу системы:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$; поменяем строки местами –

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right)$; разделим первую строку на (–3) –

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4/3 & -2/3 \end{array}\right)$; из первой строки вычтем вторую, умноженную на 2 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 23/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & -3 & -4/3 & -2/3 \end{array}\right).$$

Система совместная, неопределенная; x_1 и x_2 – базисные неизвестные; x_3, x_4 – свободные.

Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 + \dfrac{23}{3}x_4 = \dfrac{13}{3} \\ x_2 - 3x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_3 - \dfrac{23}{3}x_4 + \dfrac{13}{3} \\ x_2 = 3x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$; где $c_1, c_2 \in R$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -6c_1 - \dfrac{23}{3}c_2 + \dfrac{13}{3} \\ x_2 = 3c_1 + \dfrac{4}{3}c_2 - \dfrac{2}{3} \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13/3} \\ \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c_1} \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c_2} \begin{pmatrix} \mathbf{-23/3} \\ \mathbf{4/3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \boldsymbol{R}.$$

8) $\begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 4 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{в предыдущем} \\ \text{примеребыло} \\ \text{получено} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 23/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4/3 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная неопределенная; x_1, x_2 – базисные неизвестные; x_3, x_4 – свободные неизвестные.

Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -6x_3 - \dfrac{23}{3}x_4, \\ x_2 = 3x_3 - \dfrac{4}{3}x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1; x_4 = c_2; c_1, c_2 \in R$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -6c_1 - \dfrac{23}{3}c_2, \\ x_2 = 3c_1 - \dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{pmatrix} = \boldsymbol{c_1} \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c_2} \begin{pmatrix} \mathbf{-23/3} \\ \mathbf{4/3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \boldsymbol{R}.$$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, а также матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$G = 2;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 \\ -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)((9-\lambda)^2 - 25) = 0;$$

$$1-\lambda = 0 \text{ или } (9-\lambda)^2 - 25 = 0;$$

$$\lambda = 1. \qquad (9-\lambda)^2 = 25;$$

$$9-\lambda = \pm 5;$$

$$9-\lambda = 5,\ \lambda = 4 \text{ или } 9-\lambda = -5,\ \lambda = 14.$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 14}$ – собственные значения линейного оператора.

2) Найдем соответствующие им собственные векторы. Для этого решим следующие однородные системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) $\lambda = 1$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right)$; поменяем первую и третью строки местами

–

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$; поменяем первый и третий столбцы местами –

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$; разделим первую строку на 8 –

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$; ко второй строке прибавим первую, умноженную на 5 –

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 39/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$; разделим вторую строку на $\frac{39}{8}$ –

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$; из первой строки вычтем вторую, умноженную на $\left(-\frac{5}{8}\right)$ –

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

x_3, x_2 – базисные неизвестные, x_1 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_1:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 1} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы определяются с точностью до числового множителя, поэтому возьмем $c = 1$.

$\bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$.

б) $\lambda = 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9-4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 9-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{к третьей строке} \\ \text{прибавим} \\ \text{вторую} \end{array}\right| =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{первую строку} \\ \text{разделим на } (-3); \\ \text{вторую разделим на 5} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $c = 1$ $\Rightarrow$ $\bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 4$.

б) $\lambda = 14$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9-14 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 9-14 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{первую строку разделим на } (-13) \\ \text{из третьей строки вычтем вторую} \\ \text{вторую строку разделим на } (-5) \end{array} \right| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \overline{x}_{\lambda 3} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $c = 1$ $\Rightarrow$ $\overline{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 14$.

Итак,

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \overline{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 4, \overline{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 14, \overline{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Проверка

а) $\lambda = 1$; $\overline{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x} = \lambda \overline{x} \Rightarrow A\overline{x}_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}$; подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{x}_{\lambda 1}.$$

б) $\lambda = 4$; $\overline{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x}_{\lambda 2} = 4\overline{x}_{\lambda 2}$, подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9-5 \\ -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\overline{x}_{\lambda 2}$$

в) $\lambda = 14$; $\overline{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x}_{\lambda 3} = 14\overline{x}_{\lambda 3}$, подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9-15 \\ 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 14\overline{x}_{\lambda 3}.$$

3) Проверим ортогональность собственных векторов.

$(\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 2}) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0.$

$(\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 3}) = 1\cdot 0 + 0(-1) + 0\cdot 1 = 0.$

$(\overline{x}_{\lambda 3}, \overline{x}_{\lambda 2}) = 0\cdot 0 + 1(-1) + 1\cdot 1 = 0.$

Пусть $\mathbb{B}' = \{\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 2}, \overline{x}_{\lambda 3}\}$ – ортогональный базис.

Найдем матрицу линейного оператора в этом базисе. Так как оператор самосопряженный, то его матрица в базисе из собственных векторов должна быть диагональной и на диагонали должны стоять соответствующие собственные значения.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Проверим это:

$A' = T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} A T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$ – формула преобразования матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathbb{B}$ к базису $\mathbb{B}'$.

$$\begin{cases} \overline{x}_{\lambda_1} = \overline{e}_1 \\ \overline{x}_{\lambda_2} = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{x}_{\lambda_2} = -\overline{e}_2 + \overline{e}_3. \end{cases}$$

Столбцами матрицы $T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$ являются соответствующие коэффициенты базисных векторов

$$T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$:

$$\det T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+1) = 2 \neq 0 .$$

$$T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \frac{1}{\det T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}} \left(T^{\vee}\right)^{\mathsf{T}} .$$

Найдем компоненты матрицы $T^{\vee}$.

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 ;\ T_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;\ T_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$T_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 ;\ T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ;\ T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 ;$$

$$T_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;\ T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 ;\ T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$T^{\vee} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;\ \left(T^{\vee}\right)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{тогда}$$

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 9-5 & -5+9\\ 0 & -9-5 & 5+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -14 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4+4 & -4+4\\ 0 & -14+14 & 14+14\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}.$$

Получили, что матрица линейного самосопряженного оператора в базисе из собственных векторов действительно диагональна и на диагонали стоят собственные значения.

$$\boldsymbol{A'}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{14}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\lambda = 1,}\ \overline{x}_{\lambda 1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{;\ \lambda = 4,}\ \overline{x}_{\lambda 2}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}\boldsymbol{;\ \lambda = 14,}\ \overline{x}_{\lambda 3}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Задача 4. Привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду, сделать чертеж. Уравнение кривой:

$$P^2(D^2M^2+F^2)x^2+P^2(D^2+M^2F^2)y^2+$$
$$+2MP^2(D^2-F^2)xy-2P(AMD^2+CF^2)x+$$
$$+2P(CMF^2-AD^2)y+A^2D^2+C^2F^2-F^2D^2=0$$

1. $G=2;\ P=\dfrac{1}{\sqrt{M^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

После подстановки данных получаем:

$$\frac{1}{10}(81\cdot 9+4)x^2+\frac{1}{10}(81+9\cdot 4)y^2+2\cdot 3\cdot\frac{1}{10}(81-4)xy-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{10}}(4\cdot 4-3\cdot 3\cdot 81)x+\frac{2}{\sqrt{10}}(3\cdot 81+4\cdot 3\cdot 4)y+$$
$$+9\cdot 81+16\cdot 4-4\cdot 81=0.$$

Решение

После вычислений получаем:

$\frac{733}{10}x^2+\frac{117}{10}y^2+\frac{462}{10}xy+\frac{1462\sqrt{10}}{10}x+\frac{582\sqrt{10}}{10}y+469=0$ умножим на 10.

$$733x^2+117y^2+426xy+1426\sqrt{10}x+582\sqrt{10}y+469=0.$$

Выпишем квадратичную форму:

1) $Q(x,y)=733x^2+117y^2+426xy$.

Запишем матрицу квадратичной формы.

$$Q=\begin{pmatrix}733 & 231\\ 231 & 117\end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=0;$$
$$\begin{vmatrix}733-\lambda & 231\\ 231 & 117-\lambda\end{vmatrix}=0;$$
$$(733-\lambda)(117-\lambda)-231\cdot 231=0;$$
$$\lambda^2-733\lambda-117\lambda+85761-53361=0;$$
$$\lambda^2-850\lambda+32400=0;$$
$$D=850^2-4\cdot 32400=100(85^2-4\cdot 324)=$$
$$=100(7225-1296)=100\cdot 5929;$$
$$\sqrt{D}=770;$$
$$\lambda_{1,2}=\frac{850\pm 770}{2};$$
$$\boldsymbol{\lambda_1=40;\lambda_2=810}.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие данным собственным значениям. Для этого решим систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 733-\lambda & 231 \\ 231 & 117-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) λ = 40.

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 733-40 & 231 & 0 \\ 231 & 117-40 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 693 & 231 & 0 \\ 231 & 77 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{разделим первую строку на } 231 \\ \text{вторую на } 77 \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получим следующее уравнение:

$3x_1 + x_2 = 0$.

x_2 – базисное неизвестное, x_1 – свободное. Выразим x_2 через x_1.

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_1 = -c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 1} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ c \in R.$$

В качестве собственного вектора можно взять вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_{\lambda\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ = 40.

б) λ = 810.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 733-810 & 231 & 0 \\ 231 & 117-810 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -77 & 231 & 0 \\ 231 & -693 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{первую строку разделим на } (-77); \\ \text{вторую разделим на } 231 \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получим следующее уравнение:

$x_1 - 3x_2 = 0$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c = 1$ $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda 2}} = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ = 810.

в) Изобразим вектор $\bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ на плоскости XOY (рис 2.46).

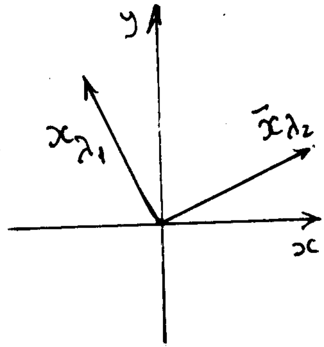

Рис. 2.46

Поворот от вектора $\bar{x}_{\lambda_1}$ к вектору $\bar{x}_{\lambda_2}$ идет по ходу часовой стрелки, следовательно, нумерация выбрана не верно. Поменяем $\bar{x}_{\lambda_1}$ и $\bar{x}_{\lambda_2}$ местами и нормируем их.

$$\left|\bar{x}_{\lambda_1}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}; \ \left|\bar{x}_{\lambda_2}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_{\lambda_2}}{\left|\bar{x}_{\lambda_2}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \lambda_1 = 810;$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_{\lambda_1}}{\left|\bar{x}_{\lambda_1}\right|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \lambda_2 = 40;$$

$\mathbb{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов.

Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид, причем на диагонали стоят соответствующие собственные значения:

$$Q' = \begin{pmatrix} 810 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$Q(x, y) = 810(x')^2 + 40(y')^2 .$$

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathbb{B}$ к базису $\mathbb{B}'$ столбцами которой являются координаты найденных собственных векторов.

$$T'_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Пусть $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$X' = T^{-1}{}_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'} X$ – формула преобразования координат вектора при преобразовании базиса. Тогда

$X = T_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'} X'$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & x' - 1/\sqrt{10} y' \\ 1/\sqrt{10} x' + & 3/\sqrt{10} y' \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}} x' - \dfrac{1}{\sqrt{10}} y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}} (3x' - y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}} x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}} y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}} (x' + 3y'). \end{cases}$$

Подставим координаты x, y, выраженные через новые координаты x', y', в исходное уравнение кривой:

$$810(x')^2 + 40(y')^2 + 1426\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{10}} \left(3x' - y'\right) +$$

$$+ 582\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{10}} \left(x' + 3y'\right) + 4690 = 0;$$

$$810(x')^2 + 40(y')^2 + 4860x' + 320y' + 4690 = 0 .$$

Выделим полные квадраты по x' и y':

$$810((x')^2 + 6x') \quad + 40((y') + 8y') \quad + 4690 = 0;$$

$$810((x' + 3)^2 - 9) + 40((y' + 4)^2 - 16) + 4690 = 0;$$

$$810(x'+3)^2-7290+40(y'+4)^2-640+4690=0;$$

$810(x'+3)^2+(y'+4)^2=3240$ разделим на 3240

$$\frac{(x'+3)^2}{4}+\frac{(y'+4)^2}{81}=1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X''O''Y''$, полученной из системы $X'O'Y'$ параллельным переносом осей OX, OY:

$$\begin{cases} x''=x'+3 \\ y''=y'+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x''-3 \\ y'=y''-4 \end{cases}$$

$\dfrac{(x'')^2}{4}+\dfrac{(y'')^2}{81}=1$ – каноническое уравнение эллипса с полуосями 2 и 9.

Найдем координаты центра эллипса.

$O''(0,\,0)$ – центр эллипса в канонической системе координат. Выразим координаты x, y через координаты x'' и y''

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x'-y') \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x'+3y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3(x''-3)-(y''-4)) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x''-3+3(y''-4)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x''-9-y''+4) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x''-3+3y''-12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x''-y''-5) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x''+3y''-15) \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x''-y''-5) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x''+3y''-15). \end{cases}$$

Найдем координаты центра эллипса в системе координат XOY.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(0-0-5)=-\dfrac{5}{\sqrt{10}}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(0+0-15)=-\dfrac{15}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

$O''\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}, -\frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ – координаты центра в XOY.

Построим эллипс (рис. 2.47).

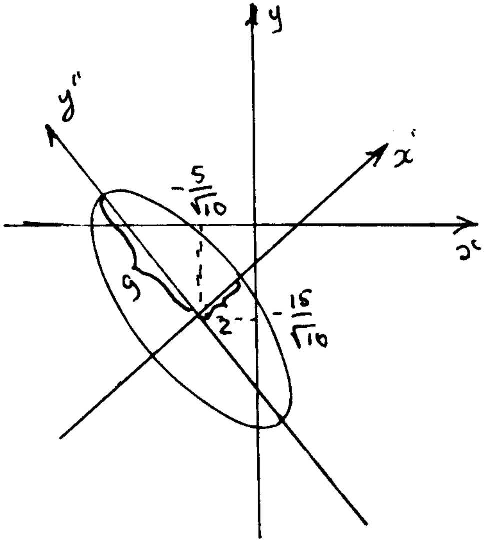

Рис. 2.47

Для этого на координатной плоскости поставим точку $O''\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}, -\frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ и через неё проведем оси $O''X''$ и $O''Y''$, которые направлены по векторам

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1), \\ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3). \end{cases}$$

Вершины эллипса A_1 и A_2 находятся на расстоянии 2 от точки O'' по оси $O''X''$ а вершины B_1 и B_2 – на расстоянии 9 от точки O'' по оси $O''Y''$.

2. Рассмотрим еще задачу для случая $G = 3$, тогда

$$Ax^2 + B^2y^2 + 2ABxy + Kx + Dy + F = 0.$$

После подстановки данных получаем:

$$(-3x)^2+y^2+2(-3)xy-5x+9y+2=0;$$
$$9x^2+y^2+18xy-5x+9y+2=0.$$

Решение

1) Выпишем квадратичную форму:

$$Q(x,y)=9x^2+y^2-6xy\,.$$

Матрица квадратичной формы:

$$Q=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы. Для нахождения собственных значений составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}9-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0;$$
$$(9-\lambda)(1-\lambda)-9=0;$$
$$9-\lambda-9\lambda+\lambda^2-9=0;$$
$$\lambda^2-10\lambda=0;$$
$$\boldsymbol{\lambda=0}\ \textbf{или}\ \boldsymbol{\lambda=10.}$$

Найдем соответствующие собственные векторы

а) $\lambda=0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c}9 & -3 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{array}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{Разделим первую}\\ \text{строку на 3}\end{array}\right|=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{array}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{К первой строке}\\ \text{прибавим вторую}\end{array}\right|=$$
$$=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Получим следующее уравнение: $3x_1-x_2=0$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2:

$$\begin{cases}3x_1=x_2,\\ x_2=c.\end{cases}$$

$$\bar{x}_{\lambda_1}=c\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Пусть $c=3$, тогда $\boldsymbol{x}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=0$.

б) $\lambda = 10$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{Первую строку} \\ \text{разделим на } (-1), \\ \text{вторую разделим} \\ \text{на } (-3) \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{Из второй строки} \\ \text{вычтем первую} \end{array}\right| =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получим следующее уравнение: $x_1 + 3x_2 = 0$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2, \\ x_2 = c. \end{cases}$$

$$\bar{x}_{\lambda_2} = c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c = 1$, тогда $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 10$.

2) Изобразим векторы $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ на плоскости XOY (рис. 2.48).

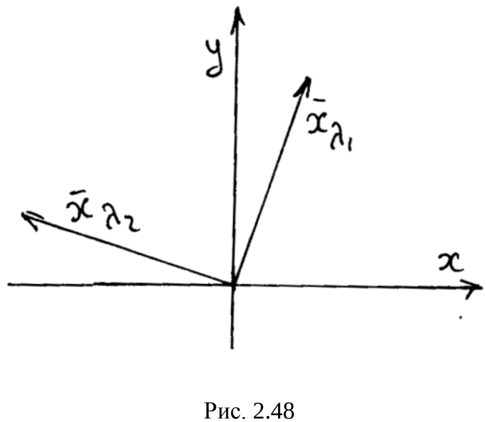

Рис. 2.48

Поворот от вектора $\bar{x}_{\lambda_1}$ к вектору $\bar{x}_{\lambda_2}$ идет против хода часовой стрелки. Значит, нумерация выбрана правильно.

Нормируем векторы $\bar{x}_{\lambda_1}$ и $\bar{x}_{\lambda_2}$:

$$\left|\bar{x}_{\lambda_1}\right| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

$$\left|\bar{x}_{\lambda_2}\right| = \sqrt{10}.$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_{\lambda_1}}{\left|\bar{x}_{\lambda_1}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_{\lambda_2}}{\left|\bar{x}_{\lambda_2}\right|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид, причем на диагонали стоят соответствующие собственные значения:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$Q(x, y) = 10(y')^2.$$

Запишем матрицу переходя от базиса $\mathbb{B}$ к базису $\mathbb{B}'$, столбцами которой являются координаты найденных собственных векторов:

$$T_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\overline{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, а $\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\overline{X'} = T_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'}\overline{X}$ – формула преобразования координат при преобразовании базиса, тогда $\overline{X} = T_{\mathbb{B} \to \mathbb{B}'}\overline{X}'$;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} y' \\ \frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'). \end{cases}$$

Подставим найденные выражения координат x, y через новые координаты x', y' в исходное уравнение кривой.

$$10(y')^2-5\frac{1}{\sqrt{10}}(x'-3y')+9\frac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y')+2=0;$$

$$10(y')^2-\frac{5}{\sqrt{10}}x'+\frac{27}{\sqrt{10}}x'+\frac{15}{\sqrt{10}}y'+\frac{9}{\sqrt{10}}y'+2=0;$$

$$10(y')^2+\frac{22}{\sqrt{10}}x'+\frac{24}{\sqrt{10}}y'+2=0.$$

Выделим полный квадрат по y:

$$10\left((y')^2+\frac{24}{10\sqrt{10}}y'\right)+\frac{22}{\sqrt{10}}x'+2=0;$$

$$10\left((y')^2+\frac{12}{5\sqrt{10}}y'\right)+\frac{22}{\sqrt{10}}x'+2=0;$$

$$10\left(\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2-\frac{36}{250}\right)+\frac{22}{\sqrt{10}}x'+2=0;$$

$$10\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2-\frac{36}{25}+\frac{22}{\sqrt{10}}x'+2=0;$$

$$10\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2+\frac{14}{25}+\frac{22}{\sqrt{10}}x'=0;$$

$$10\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2=-\frac{22}{\sqrt{10}}x'-\frac{14}{25};$$

$$10\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2=-\frac{22}{\sqrt{10}}\left(x'+\frac{\sqrt{10}}{22}\cdot\frac{14}{25}\right)$$ разделим на 10 –

$$\left(y'+\frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2=-\frac{22}{10\sqrt{10}}\left(x'+\frac{7\sqrt{10}}{275}\right).$$

Перейдем к новой системе координат $X''O''Y''$, которая получается из системы координат $X'O'Y'$ параллельным переносом осей $O'X'$, $O'Y'$:

$$\begin{cases} x''=x'+\dfrac{7\sqrt{10}}{275} \\ y''=y'+\dfrac{6}{5\sqrt{10}} \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x'=x''-\dfrac{7\sqrt{10}}{275} \\ y'=y''-\dfrac{6}{5\sqrt{10}} \end{cases}$$

$(y'')^2=-\dfrac{22}{10\sqrt{10}}x''$ – каноническое уравнение параболы.

Найдем координаты вершины параболы в системе координат XOY.

$O''(0, 0)$ – координаты вершины в канонической системе координат $X''O''Y''$.

Выразим координаты x и y через x'' и y'':

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x'' - \frac{7\sqrt{10}}{275} - 3\left(y'' - \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x'' - 3y'' - \frac{7\sqrt{10}}{275} + \frac{18}{5\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x'' - 3y'' - \frac{7\sqrt{10}}{275} + \frac{18\sqrt{10}}{50}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x'' - 3y'' + \frac{92\sqrt{10}}{275}\right);$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x'' - \frac{21\sqrt{10}}{275} + y'' - \frac{6}{5\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x'' + y'' - \frac{21\sqrt{10}}{275} - \frac{6\sqrt{10}}{50}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x'' + y'' - \frac{54\sqrt{10}}{275}\right).$$

$O''(0, 0)$ – вершина параболы $X''O''Y''$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(0 - 0 + \dfrac{92\sqrt{10}}{275}\right) = \dfrac{92}{275}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(0 + 0 - \dfrac{54\sqrt{10}}{275}\right) = -\dfrac{54}{275}. \end{cases}$$

Тогда $O''\left(\frac{92}{275};\ -\frac{54}{275}\right)$ – координаты вершины параболы в XOY.

Сделаем чертеж. Для этого на координатной плоскости поставим точку $O''\left(\frac{92}{275}; -\frac{54}{275}\right)$ и проведем через нее оси $O''X''$, $O''Y''$ которые направлены по векторам:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \\ \bar{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1) \end{cases}$$

и нарисуем параболу в канонической системе координат $X''O''Y''$ (рис. 2.49).

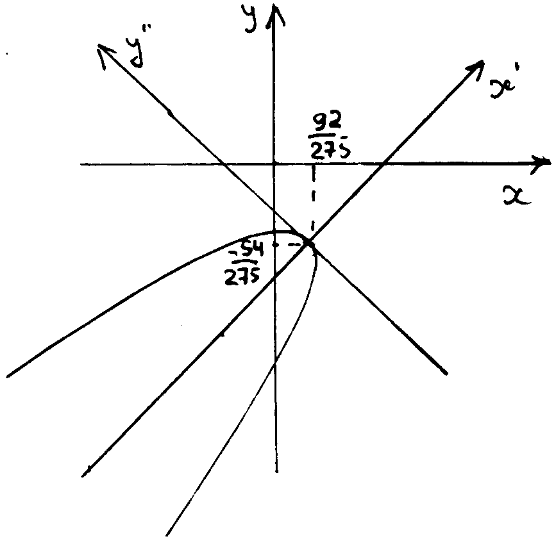

Рис. 2.49