ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе №5, Ваш номер в списке – 14. Тогда по табл.1 имеем:

5	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	B	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
14	5	1	3	–6	6	2	9	3

Таблица 1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты							
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
2	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*G*
3	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*F*	*A*	*G*
4	*B*	*A*	*C*	*K*	*D*	*F*	*M*	*G*
5	*C*	*D*	*A*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
6	*D*	*K*	*B*	*A*	*M*	*C*	*F*	*G*
7	*K*	*M*	*C*	*F*	*A*	*B*	*D*	*G*
8	*M*	*F*	*D*	*A*	*C*	*K*	*B*	*G*
9	*F*	*M*	*D*	*K*	*C*	*B*	*A*	*G*
10	*A*	*D*	*C*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
11	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
12	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*G*
13	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*
14	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*G*
15	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*G*
16	*F*	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*A*	*G*
17	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*

Таблица 2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
							G
1	–2	1	4	5	3	–6	7	2
2	3	–2	1	–5	7	2	4	3
3	5	–3	4	1	2	–8	6	1
4	4	3	–2	1	6	3	5	2
5	8	–9	4	2	1	6	–2	1
6	3	4	–5	1	–3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	–9	1	3
8	5	1	3	–2	6	–8	–6	1
9	1	4	–3	2	9	–6	7	2
10	5	7	3	–6	1	–2	4	1
11	1	3	–5	2	6	4	9	2
12	9	–4	–1	–8	–3	6	5	1
13	2	–3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	–6	6	2	9	3
15	–4	–1	–8	9	–5	2	7	1
16	2	–3	3	1	–6	5	–1	2
17	–5	–4	2	4	–1	6	7	1
18	3	1	5	6	–4	2	9	2
19	2	4	–3	–5	–6	–5	8	1
20	1	–2	–7	8	3	5	–4	2
21	–8	–3	–1	6	4	1	–5	3
22	–2	–4	5	3	–6	7	6	1
23	1	9	–6	4	–2	–3	–1	2
24	3	–5	–1	3	6	–4	2	1
25	–1	–3	–6	4	1	–5	–4	2
26	9	–4	3	–5	2	1	6	2
27	7	6	–1	2	–3	8	–5	1
28	4	–1	5	–6	–4	7	3	3
29	–1	9	–3	–5	6	–8	2	1
30	2	1	9	3	–4	–1	6	2

Задача 1.

Дано: $|\bar{a}| = |F|$, $|\bar{b}| = |M|$, $|\bar{c}| = |A|$, $\left(\widehat{\bar{a}\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$; $\left(\widehat{\bar{b}\bar{c}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; $\left(\widehat{\bar{a}\bar{c}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Найти: 1) $|D\bar{a} + C\bar{b}|$;

2) $\text{пр}_{M\bar{c}+K\bar{a}}(D\bar{a} + C\bar{b})$;

3) Длину диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $C\bar{a} + B\bar{b}$ и $K\bar{b} + M\bar{a}$;

4) Площадь этого параллелограмма.

Задача 2. Дано: $\bar{a}$ (A, B, C); $\bar{b}$ (F, M, K); $\bar{c}$ (B, D, K).

Найти: 1) координаты вектора $\bar{d} = F\bar{a} + M\bar{b}$;

2) длину вектора $\bar{d}$, направляющие косинусы вектора $\bar{d}$, координаты орта $\bar{d}_0$ вектора $\bar{d}$, $\text{пр}_{\bar{i}}\bar{d}$, $\text{пр}_{\bar{j}}\bar{d}$, $\text{пр}_{\bar{k}}\bar{d}$;

3) $(A\bar{a} + B\bar{c}, K\bar{b} + M\bar{d})$;

4) $\cos(A\bar{a} + B\bar{c} \,\widehat{,}\, K\bar{b} + M\bar{d})$;

5) $[A\bar{a} + B\bar{c}, K\bar{b} + M\bar{d}]$;

6) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$;

7) Образуют ли вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$;

8) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{d}$.

Задача 3. Дано: точки $Q(A, B)$, $L(C, D)$, $P(C, F)$.

Найти: 1) проверить, не лежат ли точки на одной прямой;

2) уравнение прямой QL;

3) уравнение медианы, проведенной из вершины Q в треугольнике QLP;

4) уравнение высоты, проведенной из вершины Q;

5) координаты точки пересечения медиан в ΔQPL;

6) угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q;

7) расстояние о точки P до прямой QL.

Задача 4. Дано: $Q(A, B, C)$, $L(A, F, C)$, $P(M, F, K)$, $N(A, D, F)$.

Найти: 1) проверить, что точки Q, L, P не лежат на одной прямой;

2) проверить, что точки Q, L, P, N не лежат в одной плоскости;

3) написать уравнение плоскости, проходящей через точки Q, L, P;

4) написать уравнение плоскости, проходящей через точку N, параллельно плоскости (QLP);

5) написать уравнение плоскости, проходящей через точку P параллельно векторам $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$;

6) написать уравнение плоскости, проходящей через точки N и Q, перпендикулярно плоскости (QLP);

7) написать уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q, параллельно вектору $\overline{NP}$;

8) написать уравнение плоскости, проходящей через точу N, параллельно координатной плоскости XOZ;

9) написать общее, каноническое и параметрическое уравнение прямой QP;

10) написать уравнение прямой, проходящей через точку Q параллельно оси OZ;

11) написать уравнение медианы QM в ΔQPL;

12) написать уравнение высоты QH в ΔQPL;

13) написать уравнение прямой, проходящей через точку N параллельно прямой QP;

14) написать уравнение высоты NH тетраэдра $QLPH$;

15) написать уравнение прямой, перпендикулярной прямым QP и QN и проходящей через точку L;

16) найти угол между прямой QP и прямой LN;

17) найти угол между прямой PN и плоскостью (QPL);

18) найти величину двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ);

19) найти площадь ΔQPL;

20) найти объем тетраэдра $QLNP$;

21) найти расстояние от точки N до прямой QP;

22) найти расстояние от точки N до плоскости (QLP);

23) найти расстояние между прямыми QP и LN;
24) найти координаты точки N_1, симметричной точки N относительно прямой QP;
25) найти координаты точки N_2, симметричной точки N относительно плоскости QLP.

.

Пример выполнения домашнего задания №1

Номер по п/п	Коэффициенты							
	A	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
Произвольный номер	–3	1	4	9	–5	3	2	2

Задача 1.

Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $|\bar{c}| = 3$,

$$\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \left(\bar{b}\,\hat{}\,\bar{c}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{c}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Найти:

1) $\left|9\bar{a} + 4\bar{b}\right|$

2) $\text{пр}_{3\bar{c}-5\bar{a}}\left(9\bar{a} + 4\bar{b}\right)$

3) Длины диагоналей параллелограмма, построен ного по векторам $4\bar{a} + \bar{b}$ и $-5\bar{b} + 3\bar{a}$

4) Площадь этого параллелограмма

Решение

1) $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$ $\qquad$ $\left(\bar{a},\bar{b}\right) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$

$$\left|9\bar{a} + 4\bar{b}\right| = \sqrt{\left(9\bar{a} + 4\bar{b}, 9\bar{a} + 4\bar{b}\right)} =$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуемся свойствами скалярного происзведения} \\ (\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a}) \\ (\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})\end{array}\right|$$

$$= \sqrt{\left(9\bar{a},9\bar{a}\right) + \left(4\bar{b},9\bar{a}\right) + \left(9\bar{a},4\bar{b}\right) + \left(4\bar{b},4\bar{b}\right)} =$$

$$\sqrt{81|\bar{a}|^2+72(\bar{a},\bar{b})+16|\bar{b}|^2}=$$

$$\sqrt{81\cdot 2\cdot 2+72\cdot 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3}+16\cdot 5^2}=\sqrt{324+720\cdot\frac{1}{2}+400}=$$

$$\sqrt{324+360+400}=\sqrt{1084}$$

Ответ: $\left|9\bar{a}+4\bar{b}\right|=\sqrt{1084}$

2)

$$\text{пр}_{3\bar{c}-5\bar{a}}\left(9\bar{a}+4\bar{b}\right)$$

Запишем формулу для нахождения проекции

$$\text{пр}_{\bar{f}}\bar{d}=|\bar{d}|\cos(\bar{f}\,\hat{,}\,\bar{d}),\ \text{где}\ \cos(\bar{f}\,\hat{,}\,\bar{d})=\frac{(\bar{f},\bar{d})}{|\bar{f}||\bar{d}|}$$

$$\text{пр}_{\bar{f}}\bar{d}=|\bar{d}|\frac{(\bar{f},\bar{d})}{|\bar{f}||\bar{d}|}=\frac{(\bar{f},\bar{d})}{|\bar{f}|}$$

Тогда

$$\text{пр}_{3\bar{c}-5\bar{a}}\left(9\bar{a}+4\bar{b}\right)=\frac{(9\bar{a}+4\bar{b},3\bar{c}-5\bar{a})}{\left|3\bar{c}-5\bar{a}\right|}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуемся свойствами}\\ \text{скалярного произведения}\end{array}\right|=$$

$$\frac{(9\bar{a},3\bar{c})+(9\bar{a},-5\bar{a})+(4\bar{b},3\bar{c})+(4\bar{b},-5\bar{a})}{\sqrt{\left(3\bar{c}-5\bar{a},3\bar{c}-5\bar{a}\right)}}=$$

$$\frac{27(\bar{a},\bar{c})-45(\bar{a},\bar{a})+12(\bar{b},\bar{c})-20(\bar{b},\bar{a})}{\sqrt{9\left(\bar{c},\bar{c}\right)-30\left(\bar{a},\bar{c}\right)+25\left(\bar{a},\bar{a}\right)}}=$$

$$\frac{27|\bar a||\bar c|\cos\left(\bar a\,\hat{,}\,\bar c\right)-45|\bar a|^2+12|\bar b||\bar c|\cos\left(\bar b\,\hat{,}\,\bar c\right)-20|\bar b||\bar a|\cos\left(\bar b\,\hat{,}\,\bar a\right)}{\sqrt{9|\bar c|^2-30|\bar a||\bar c|\cos\left(\bar a\,\hat{,}\,\bar c\right)+25|\bar a|^2}}$$

$$=\frac{27\cdot 2\cdot 3\cos\frac{2\pi}{3}-45\cdot 4+12\cdot 5\cdot 3\cos\frac{\pi}{4}-20\cdot 5\cdot 2\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{9\cdot 9-30\cdot 2\cdot 3\cos\frac{2\pi}{3}+25\cdot 4}}=$$

$$\frac{162\left(-\frac{1}{2}\right)-180+12\cdot 15\frac{\sqrt{2}}{2}-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{81-180\left(-\frac{1}{2}\right)+100}}=$$

$$\frac{-81-180+90\sqrt{2}-100}{\sqrt{181+90}}=\frac{90\sqrt{2}-361}{\sqrt{271}}$$

Ответ: $\text{пр}_{3\bar c-5\bar a}\left(9\bar a+4\bar b\right)=\dfrac{90\sqrt{2}-361}{\sqrt{271}}$

3) Найти длину диагоналей параллелограмма построенного по векторам

$4\bar a+\bar b$ и $-5\bar b+3\bar a$, где $|\bar a|=2$, $|\bar b|=5$, $\overset{\Lambda}{\bar a,\bar b}=\pi/3$

Пусть $\overline{AB}=4\bar a+\bar b$ $\quad\overline{AD}=-5\bar b+3\bar a$ (рис 3.1)

Тогда

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=4\bar a+\bar b-5\bar b+3\bar a=7\bar a-4\bar b$$

$$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=-5\bar b+3\bar a-4\bar a-\bar b=-\bar a-6\bar b$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\left|7\bar a-4\bar b\right|=\sqrt{\left(7\bar a-4\bar b,7\bar a-4\bar b\right)}=$$

$$\sqrt{49\left(\bar a,\bar a\right)-56\left(\bar a,\bar b\right)+16\left(\bar b,\bar b\right)}=$$

$$\sqrt{49|\bar a|^2-56|\bar a||\bar b|\cos\left(\bar a\hat{,}\bar b\right)+16|\bar b|^2}=$$

$$\sqrt{49\cdot4-56\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}+16\cdot25}=\sqrt{196-280+400}=\sqrt{316}$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\left|-\bar a-6\bar b\right|=\sqrt{\left(-\bar a-6\bar b,-\bar a-6\bar b\right)}=$$

$$\sqrt{36\left(\bar b,\bar b\right)+12\left(\bar a,\bar b\right)+\left(\bar a,\bar a\right)}=$$

$$\sqrt{36|\bar b|^2+12|\bar a||\bar b|\cos\left(\bar a\hat{,}\bar b\right)+|\bar a|^2}=\sqrt{36\cdot25+12\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}+4}$$

$$=\sqrt{900+120+4}=\sqrt{1024}=32$$

Ответ: $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{316}$ $\left|\overline{BC}\right|=32$

4) Площадь параллелограмма ABCD

$$S_{ABCD}=\left|\left[\overline{AB},\overline{AD}\right]\right|=|[4\bar a+\bar b,-5\bar b+3\bar a]|$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, равна длине вектора векторного произведения этих векторов.

Для вычисления длины вектора $|[4\bar a+\bar b,-5\bar b+3\bar a]|$ воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

1) $\left[\bar a,\bar b\right]=-\left[\bar b,\bar a\right]$

2) $\left[\overline{\lambda a},\bar b\right]=\lambda\left[\bar a,\bar b\right]$

3) $\left[\bar a+\bar b,\bar c\right]=\left[\bar a,\bar c\right]+\left[\bar b,\bar c\right]$

4) $\left[\bar a,\bar a\right]=0$

Тогда

$$\left|\left[4\bar a+\bar b,3\bar a-5\bar b\right]\right|=\left|\left[4\bar a,3\bar a\right]+\left[4\bar a,-5\bar b\right]+\left[\bar b,3\bar a\right]+\left[\bar b,-5\bar b\right]\right|=$$

$$\left|12\left[\bar a,\bar a\right]-20\left[\bar a,\bar b\right]+3\left[\bar b,\bar a\right]-5\left[\bar b,\bar b\right]\right|=\left|-20\left[\bar a,\bar b\right]-3\left[\bar a,\bar b\right]\right|=$$

$$\left|-23\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right| == 23\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = 23\cdot 5\cdot 2\cdot \sin\frac{\pi}{3} = 230\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 115\sqrt{3}$$

Ответ $S_{ABCD} = 115\sqrt{3}$

Задача 2.

Дано: $\overline{a}$ (-3,1,4), $\overline{b}$ (2,3,-5), $\overline{c}$ (1,9,-5)

Найти:

1) Координаты вектора $\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$

2) $|\overline{d}|$, направляющие косинусы вектора $\overline{d}$, координаты орта $\overline{d}_0$ вектора $\overline{d}$, $пр_{\overline{i}}\overline{d}$, $пр_{\overline{j}}\overline{d}$, $пр_{\overline{k}}\overline{d}$

3) $(-3\overline{a} + \overline{c}, -5\overline{b} + 3\overline{d})$

4) $\cos(-3\overline{a} + \overline{c}\ \hat{,}\ -5\overline{b} + 3\overline{d})$

5) $[-3\overline{a} + \overline{c}, -5\overline{b} + 3\overline{d}]$

6) $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$

7)Установить образуют ли вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ базис в R^3

8) $пр_{\overline{a}}\overline{d}$ - проекцию вектора $\overline{d}$ на вектор $\overline{a}$

Решение:

1) Координаты вектора $\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$

$2\overline{a}(-6,2,8)$, $3\overline{b} = (6,9,-15)$

$2\overline{a} + 3\overline{b} = (-6+6, 2+9, 8-15) = (0,11,-7)$

$\overline{d} = (0,11,-7)$

Ответ: $\overline{d}(0,11,-7)$

2) $\left|\overline{d}\right| - ?$

Если $\overline{a}(x,y,z)$, тт $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\bar{a}|}$ - направляющие косинусы вектора $\bar{a}$

$\text{пр}_{\bar{i}}|\bar{a}| = x$, $\text{пр}_{\bar{j}}|\bar{a}| = y$, $\text{пр}_{\bar{k}}|\bar{a}| = z$ - проекции вектора $\bar{a}$ на базисные вектора.

Тогда $|\bar{d}| = \sqrt{0 + 11^2 + (-7)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$

$\bar{a}_0$ - орт вектора $\bar{a}$, $\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{170}} = 0,\ \cos\beta = \frac{11}{\sqrt{170}},\ \cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{170}}$$

$$\text{пр}_{\bar{i}}\bar{d} = 0,\ \text{пр}_{\bar{j}}\bar{d} = 11,\ \text{пр}_{\bar{k}}\bar{d} = -7$$

$$\bar{d}_0 = \left(0, \frac{11}{\sqrt{170}}, \frac{-7}{\sqrt{170}}\right)$$

Ответ:

$$|\bar{d}| = \sqrt{170};\ \bar{d}_0 = \left(0, \frac{11}{\sqrt{170}}, \frac{-7}{\sqrt{170}}\right);\ \cos\alpha = 0, \cos\beta = \frac{11}{\sqrt{170}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{170}};\ \text{пр}_{\bar{i}}\bar{d} = 0,\ \text{пр}_{\bar{j}}\bar{d} = 11,\ \text{пр}_{\bar{k}}\bar{d} = -7$$

3) $(-3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d})$ скалярное произведение

Если $p(x_1, y_1, z_1)$

$\bar{q}(x_2, y_2, z_2)$, то $(\bar{p}, \bar{q}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Найдем координаты векторов $-3\bar{a} + \bar{c}$ и $-5\bar{b} + 3\bar{d}$

$-3\bar{a}$ =(9,-3,-12)

$\bar{c} = (1,9,-5)$

$-3\bar{a} + \bar{c} = (9 + 1, -3 + 9, -12 - 5) = (10,6,-17)$

$-5\bar{b} = (-10,-15,25)$

$3\overline{d}=(0,33,-21)$

$-5\overline{b}+3\overline{d}=(-10,-15+33,25-21)=(-10,18,4)$

$(-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d})=10(-10)+6\cdot 18-17\cdot 4=-100+108-6$

Ответ: $(-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d})=-60$

4) $\cos(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\dfrac{(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})}{|\overline{p}||\overline{q}|}$

$$\cos(-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d})=\frac{(-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d})}{|-3\overline{a}+\overline{c}||-5\overline{b}+3\overline{d}|}=$$

$$=\frac{-60}{\sqrt{10^2+6^2+(-17)^2}\sqrt{(-10)^2+18^2+4^2}}=\frac{-6}{\sqrt{100+36+289}}$$

$$=\frac{-60}{\sqrt{425}\sqrt{440}}=\frac{-60}{5\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{110}}=\frac{-6}{\sqrt{1870}}$$

Ответ: $\cos(-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d})=\dfrac{-6}{\sqrt{1870}}$

5) $[-3\overline{a}+\overline{c},-5\overline{b}+3\overline{d}]-$ векторное произведение

Найдем координаты векторов $-3\overline{a}+\overline{c}$ и $-5\overline{b}+3\overline{c}$

$-3\overline{a}+\overline{c}=(10,6,-17)$

$-5\overline{b}+3\overline{d}=(-10,18,4)$

Векторное произведение – это вектор, координаты которого можно найти по следующей формуле:

Если $\overline{p}(x_1,y_1,z_1)$

$\bar{q}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\bar{p}, \bar{q}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\bar{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar{k}$$

$$[-3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 6 & -17 \\ -10 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 6 & -17 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 10 & \\ -10 & \end{vmatrix}$$

$$= (24 + 306)\bar{i} - (40 - 170)\bar{j} + (180 + 60)\bar{k} = 330\bar{i} + 130\bar{j} + 240$$

Ответ: $[-3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d}] = 330\bar{i} + 130\bar{j} + 240\bar{k}$

6) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ - смешанное произведение

Если $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$

то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$\bar{a}(-3,1,4)$ $\quad$ $\bar{b}(2,3,-5)$ $\quad$ $\bar{c}(1,9,-5)$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$+ 4(18 - 3) = -90 + 5 + 60 = -25$$

Ответ: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -25$

7) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -25 \neq 0 \Rightarrow$ векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ линейно независимы, значит образуют базис в R^3

8) $$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{d} = |\bar{d}|\cos(\bar{a},\bar{d}) = |\bar{d}|\frac{(\bar{a},\bar{d})}{|\bar{a}||\bar{d}|} = \frac{(\bar{a},\bar{d})}{|\bar{a}|}$$

$$\bar{a}(-3,1,4) \qquad \bar{d}(0,11,-7)$$

$$(\bar{a},\bar{d}) = -3\cdot 0 + 1\cdot 11 + 4(-7) = 11 - 28 = -17$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{d} = \frac{-17}{\sqrt{26}}$$

Ответ: $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{d} = \dfrac{-17}{\sqrt{26}}$

Задача 3.

Дано: точки $Q(-3,1), L(4,9), P(4,2)$.

Решение

1) Проверить, не лежат ли точки на одной прямой.

Если точки Q, L, P лежат на одной прямой, то вектор $\overline{LP}$ коллинеарен вектору $\overline{QL}$, а значит их координаты должны быть пропорциональны (рис. 2.2). Координаты векторов: $\overline{QL}(4-(-3), 9-1) = (7,8)$; $\overline{LP}(0, 2-9) = (0,-7)$;

$\frac{0}{7} \neq \frac{-7}{8} \Rightarrow$ векторы $\overline{QL}$ и $\overline{QP}$ не коллинеарны $\Rightarrow$ точки Q, L, P **не лежат на одной прямой**.

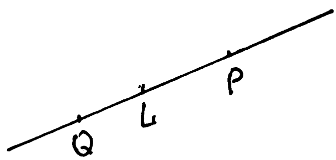

Рис. 2.2

2) Найти уравнение прямой QL.

Для любой точки $M(x,\ y)$, лежащей на прямой QL, вектор $\overline{QM}$ должен быть коллинеарен вектору $\overline{QL}$ (рис. 2.3), а значит, их координаты должны быть пропорциональны. Координаты векторов: $\overline{QM}(x+3,\ y-1);\overline{QL}(7,\ 8)$, тогда

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{7}=\frac{y-1}{8}}$$ – уравнение прямой QL.

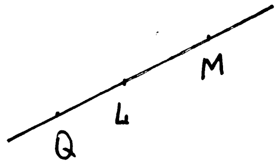

Рис. 2.3

3) Найти уравнение медианы, проведенной из вершины Q в ΔQPL (рис. 2.4).

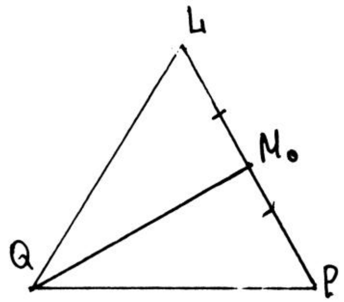

Рис. 2.4

Найдем координаты точки M_0.

$\overline{M_0P}=\frac{1}{2}\overline{LP}$, так как $\left|\overline{M_0P}\right|=\left|\overline{LM_0}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{LP}\right|$;

$\overline{LP}(0,-7)\Rightarrow\frac{1}{2}\overline{LP}=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$; $P(4,\ 2)$ – из условия.

Пусть $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$, тогда $\overline{M_0P}=(4-x_0,\,2-x_0)=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$.

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты:

$$\begin{cases} 4 - x_0 = 0 \\ 2 - y_0 = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(4, \frac{11}{2}\right).$$

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QM_0, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{QM_0}$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны. Координаты векторов:

$$\overline{QM}_0 = \left(4-(-3), \frac{11}{2}-1\right) = \left(7, \frac{9}{2}\right); \ \overline{QM} = (x+3, \ y-1);$$

$\dfrac{x+3}{7} = \dfrac{y-1}{9/2}$ умножим на (1/2) –

$\boldsymbol{\dfrac{x+3}{14} = \dfrac{y-1}{9}}$ – получили уравнение медианы QM_0.

4) Найти уравнение высоты, проведенной из вершины Q (рис. 2.5).

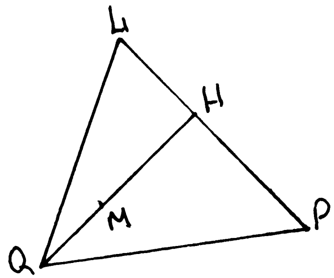

Рис. 2.5

QH – высота. Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QH вектор $\overline{QM}$ должен быть перпендикулярен вектору $\overline{LP}$, а значит $(\overline{QM}, \overline{LP}) = 0$.

Координаты векторов:

$\overline{QM}(x+3, y-1)$; $\overline{LP}(0, -7)$, тогда

$(\overline{QM}, \overline{LP}) = 0(x+3) - 7(y-1) = 0$;

$-7(y-1) = 0$;

$y - 1 = 0$

$\boldsymbol{y = 1}$ – получили уравнение высоты QH.

5) Найти координаты точки пересечения медиан в ΔQPL (рис. 2.6).

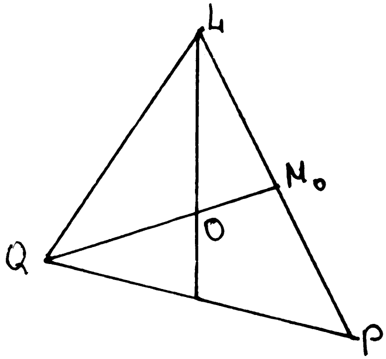

Рис. 2.6

Медианы треугольника делятся точкой их пересечения в соотношении 2:1:

$$\frac{|QO|}{|OM_0|}=\frac{2}{1}\Rightarrow\overline{QO}=\frac{2}{3}\overline{QM}_0;$$

$$\overline{QM}\left(7,\frac{9}{2}\right)\Rightarrow\overline{QO}\left(\frac{2}{3}\cdot 7,\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{14}{3},3\right).$$

Пусть $O(x,\ y)$, тогда $\overline{QO}=(x+3,y-1)=\left(\frac{14}{3},3\right)$. Два вектора равны, если их соответствующие координаты равны:

$$\begin{cases}x+3=\dfrac{14}{3}\\ y-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14}{3}-3=\dfrac{5}{3}\\ y=4\end{cases}.$$

$\boldsymbol{O\left(\frac{5}{3},4\right)}$ – точка пересечения медиан ΔQPL.

6) Найти угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q (рис. 2.7).

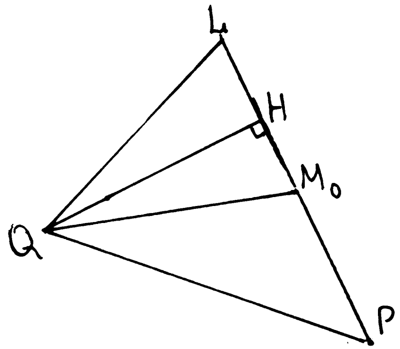

Рис. 2.7

Угол между прямыми на плоскости равен углу между их нормальными векторами. Уравнение прямой QH: $y = 1 \Rightarrow \bar{n}_2(0, 1)$.

Напишем общее уравнение прямой QM_0, используя каноническое уравнение (см. п. 2 наст. задачи).

$\frac{x+3}{14} = \frac{y-1}{9}$ умножим на 9 и на 14 –

$9(x+3) = 14(y-1)$;

$9x + 27 = 14y - 14$;

$9x - 14y + 41 = 0$ – общее уравнение прямой QM_0 $\Rightarrow$ $\bar{n}_1(9, -14)$.

$$\mathbf{cos}\left(\boldsymbol{QM_0}\hat{,}\boldsymbol{QH}\right) = \left|\cos(\bar{n}_1\hat{,}\bar{n}_2)\right| = \frac{\left|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)\right|}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} =$$

$$= \frac{|9 \cdot 0 - 14 \cdot 1|}{\sqrt{9^2 + (-14)^2}\sqrt{0+1}} = \frac{14}{\sqrt{81+196}} = \frac{\mathbf{14}}{\sqrt{\mathbf{277}}}.$$

7) Найти расстояние от точки P до прямой QL (рис. 2.8).

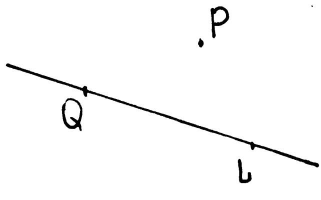

Рис. 2.8

Запишем уравнение прямой QL (см. п. 2 наст. задачи).

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y-1}{8}.$$

Перейдем к общему уравнению прямой:

$8(x + 3) = 7(y - 1)$;

$8x + 24 = 7y - 7$

$8x - 7y + 31 = 0$ – получим общее уравнение прямой QL.

Точка $P(4, 2) \notin QL$.

Используем формулу нахождения расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой на плоскости. Пусть $L: Ax + By + C = 0$, тогда

$$\rho(M, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае

$$\boldsymbol{\rho(P, QL)} = \frac{|8 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 31|}{\sqrt{8^2 + (-7)^2}} = \frac{|32 - 14 + 31|}{\sqrt{64 + 49}} = \frac{\mathbf{49}}{\sqrt{\mathbf{113}}}.$$

Задача 4.

Дано: точки $Q(-3, 1, 4)$; $L(-3, 2, 4)$; $P(3, 2, -5)$; $N(-3, 9, 2)$.

Решение

1) Проверить, что точки Q, L, P не лежат на одной прямой.

Если точки Q, L, P лежат на одной прямой, то векторы $\overline{QL}$ и $\overline{QP}$ коллинеарные, а значит их координаты должны быть пропорциональны (рис. 2.9).

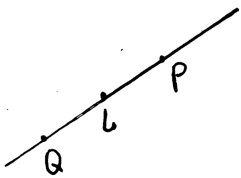

Рис. 2.9

Запишем координаты векторов:

$\overline{QL}\,(0, 1, 0)$,

$\overline{QP}\,(6, 1, -9)$,

$\frac{0}{6} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow$ координаты векторов $\overline{QL}$ и $\overline{QP}$ не пропорциональны $\Rightarrow$ точки Q, L, P не лежат на одной прямой.

2) Проверить, что точки Q, L, P и N не лежат в одной плоскости.

Если точки Q, L, P и N лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{QL}$, $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$ должны быть компланарны (рис. 2.10) $\Rightarrow$ ($\overline{QL}$, $\overline{QP}$, $\overline{QN}$) = 0.

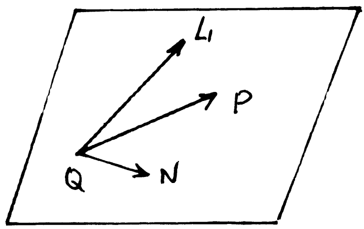

Рис. 2.10

Запишем координаты векторов $\overline{QL}$ (0, 1, 0), $\overline{QP}$ (6, 1, –9), $\overline{QN}$ (0, 8, –2).

$$\left(\overline{QL}, \overline{QP}, \overline{QN}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} \text{разложим} \\ \text{по первой} \\ \text{строке} \end{matrix}\right| =$$

$$= 0\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ векторы $\overline{QN}, \overline{QP}, \overline{QN}$ не компланарны $\Rightarrow$ точки Q, L, P и N не лежат в одной плоскости.

3) Написать общее уравнение плоскости проходящей через точки Q, L, P.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости (Q, L, P), векторы $\overline{QL}$, $\overline{QP}$ и $\overline{QM}$ должны быть компланарны (рис. 2.11), т. е.

$$\left(\overline{QM}, \overline{QL}, \overline{QP}\right) = 0.$$

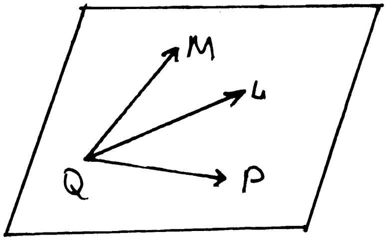

Рис. 2.11

Координаты векторов:

$\overline{QM}$ $(x + 3, y – 1, z – 4)$; $\overline{QL}$ $(0, 1, 0)$; $\overline{QP}$ $(6, 1, –9)$, тогда

$$\left(\overline{QM}, \overline{QL}, \overline{QP}\right) = \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по второй строке:

$$1\begin{vmatrix} x+3 & z-4 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

$–9(x + 3) – 6(z – 4) = 0$ разделим на (–3):

$3(x + 9) + 2(z – 4) = 0$;

$3x + 9 + 2z – 8 = 0$;

$3x + 2z + 1 = 0$ – получим общее уравнение плоскости (QLP).

4) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку N параллельно плоскости (QLP) (рис. 2.12).

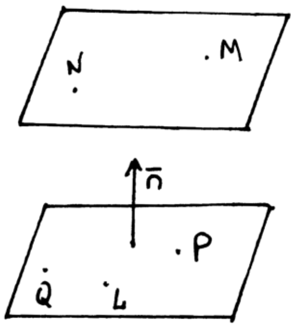

Рис. 2.12

$3x + 2z + 1 = 0$ – уравнение плоскости (QLP) (см. п.3).

$\bar{n}\,(3, 0, 2)$ – вектор нормали плоскости (QLP).

Искомая плоскость параллельна плоскости (QLP) $\Rightarrow$ для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в этой плоскости, вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}\,(3, 0, 2)$ $\Rightarrow$ их скалярное произведение равно 0;

$(\overline{MN}, \bar{n}) = 0.$

Координаты вектора $\overline{MN}$:

$\overline{MN}\ (x + 3, y - 9, z - 2)$, тогда

$3(x + 3) + 0(y - 9) + 2(z - 2) = 0;$

$3x + 9 + 2z - 4 = 0;$

$\mathbf{3x + 2z + 5 = 0}$ – получим уравнение плоскости параллельной плоскости (QLP) и проходящей через точку N.

5) Уравнение плоскости, проходящей через точку L, параллельно векторам $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$.

Запишем коорбинаты векторов:

$\overline{QP}\,(6, -1, 9)$; $\overline{QN}\,(0, 8, -2)$.

Векторы $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$ параллельны искомой плоскости и для любой точки M (x, y, z), лежащей в этой плоскости, вектор $\overline{LM}$ лежит в этой плоскости, следовательно векторы $\overline{QP}$, $\overline{QN}$, $\overline{LM}$ должны быть компланарными $\Rightarrow$ их смешанное произведение равно 0. Координаты вектора $\overline{LM}$:

$\overline{LM}\ (x + 3, y - 2, z - 4)$, тогда

$$\left(\overline{LM}, \overline{QP}, \overline{QN}\right) = \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-4 \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x + 3)(-2 + 72) - (y - 2)(-12) + (z - 4)(48 - 0) = 0;$

$70(x + 3) + 12(y - 2) + 48(z - 4) = 0$; разделим на 2:

$35(x + 3) + 6(y - 2) + 24(z - 4) = 0;$

$35x + 105 + 6y - 12 + 24z - 96 = 0;$

$35x + 6y + 24z - 3 = 0$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точку L параллельно векторам $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$.

6) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки Q и N, перпендикулярно плоскости (QLP) (рис. 2.13).

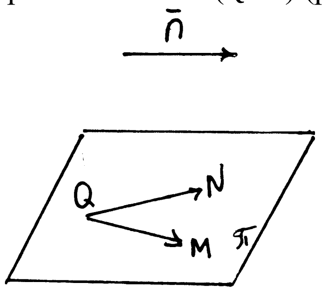

Рис. 2.13

Уравнение плоскости (QLP): $3x + 2z + 1 = 0$, вектор нормали плоскости (QLP) $\overline{n}(3, 0, 2)$.

Точки Q и N принадлежат искомой плоскости π, значит вектор $\overline{QN}$ лежит в этой плоскости $\overline{QN}(0, 8, -2)$.

Плоскость π перпендикулярна плоскости (QLP), а значит вектор $\overline{n}(3, 0, 2)$ параллелен плоскости π. Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π, вектор $\overline{QM}$ $(x+3,\ y-1,\ z-4)$ также лежит в этой плоскости. Тогда векторы $\overline{QN}$, $\overline{QM}$ и $\overline{n}$ должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение должно быть равно 0.

$\left(\overline{QM}, \overline{QN}, \overline{n}\right) = 0$, или

$$(\overline{QM},\ \overline{QN},\ \overline{n}) = \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-4 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x+3)(16-0) - (y-1)(0+6) + (z-4)(0-24) = 0$;

$16(x+3) - 6(y-1) - 24(z-4) = 0$ разделим на 2:

$8(x+3) - 3(y-1) - 12(z-4) = 0$;

$8x+24-3y+1-12z+48=0$;

$\mathbf{8x-3y-12z+75=0}$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точки Q и N, перпендикулярно плоскости (QLP).

7) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q параллельно вектору $\overline{NP}$ (рис. 2.14).

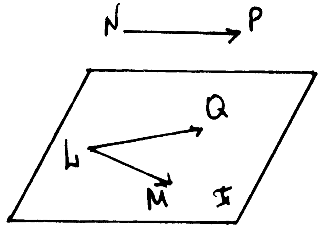

Рис. 2.14

Вектор $\overline{NP}$ параллелен искомой плоскости π.

Тогда для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π, векторы $\overline{LQ}$, $\overline{NP}$, $\overline{LM}$ должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение должно быть равно 0. Координаты векторов:

$\overline{LQ}$ (0, –1, 0); $\overline{NP}$ (6, –7, –7); $\overline{LM}$ (x + 3, y – 2, z – 4).

Тогда

$$\left(\overline{LQ}, \overline{NP}, \overline{LM}\right)=\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & -7 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}+(z-4)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}=0;$$

$7(x+3)+6(z-4)=0$;

$7x+21+6z-24=0$.

$\mathbf{7x+6z-3=0}$ – получили уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q параллельно вектору $\overline{NP}$.

8) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку N параллельно координатной плоскости XOZ.

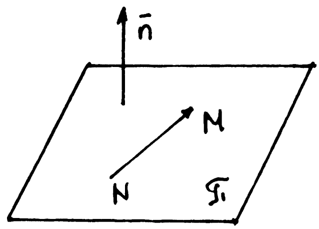

Рис. 2.15

Уравнение плоскости XOZ: $y = 0$, вектор нормали плоскости XOZ: $\bar{n}(0, 1, 0)$.

Искомая плоскость π параллельна плоскости XOZ, следовательно плоскость π перпендикулярна вектору $\bar{N}$. Для любой точки $M(x, y, z)$ лежащей в плоскости π, вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$ (рис. 2.15), а значит их скалярное произведение должно быть равно 0:

$$\overline{NM} \perp \bar{n} \Rightarrow (\overline{NM}, \bar{n}) = 0;$$

$$\overline{NM}(x+3, y, z-2);$$

$$0(x+3)+1(y-9)+0(z-2)=0.$$

$\boldsymbol{y - 9 = 0}$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точку N параллельно плоскости XOZ.

9) Написать общее, каноническое и параметрическое уравнения прямой QP.

Напомним координаты точек: $Q(-3, 1, 4)$; $P(3, 2, -5)$

Для любой точки $M(x, y, z)$ лежащей на прямой QP вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{QP}$ (рис. 2.16), а значит координаты этих векторов должны быть пропорциональны.

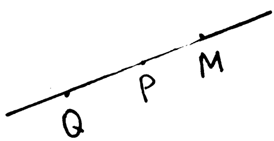

Рис. 2.16

Координаты векторов:

$\overline{QM}(x+3,\ y-1,\ z-4);\ \overline{QP}(6,1,-9)$;

$\dfrac{\boldsymbol{x+3}}{\mathbf{6}}=\dfrac{\boldsymbol{y-1}}{\mathbf{1}}=\dfrac{\boldsymbol{z-4}}{\mathbf{-9}}$ – получили каноническое уравнение прямой QP.

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-9}=t$;

$\begin{cases}\boldsymbol{x=-3+6t,}\\ \boldsymbol{y=1+t,}\\ \boldsymbol{z=4-9t}\end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой QP.

Напишем общее уравнение прямой QP – как линии пересечения плоскостей (QNP) и (QPL) (рис. 2.17).

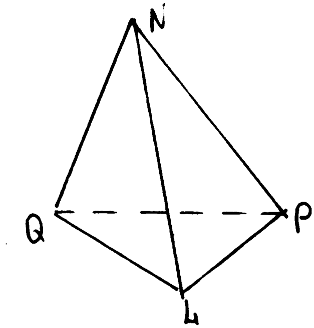

Рис. 2.17

Уравнение плоскости (QPL): $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

Напишем уравнение плоскости (QNP): для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости (QNP), векторы $\overline{QM}, \overline{QP}$ и $\overline{QN}$ должны быть компланарны $\Rightarrow$ $(\overline{QM}, \overline{QP}, \overline{QN}) = 0$. Координаты векторов: $\overline{QM}\,(x + 3, y - 1, z - 4)$; $\overline{QP}\,(6, 1, -9)$; $\overline{QN}\,(0, 8, -2)$.

$$(\overline{QM}, \overline{QP}, \overline{QN})=\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-4 \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} y-1 & z-4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}=0;$$

$(x + 3)(-2 + 72) - 6(-2(y - 1) - 8(z - 4)) = 0;$

$70(x + 3) + 12(y – 1) + 48(z – 4) = 0$ – разделим на 2;
$35(x + 3) + 6(y – 1) + 24(z – 4) = 0$;
$35x + 105 + 6y – 6 + 24z – 96 = 0$.
$35x + 6y + 24z + 3 = 0$ – уравнение плоскости (QNP);

$$\begin{cases} \mathbf{35x + 6y + 24z + 3 = 0} \\ \mathbf{3x + 2z + 1 = 0} \end{cases}$$ – общее уравнение прямой QP.

10) Написать уравнение прямой, проходящей через точку Q параллельно оси OZ (рис. 2.18).

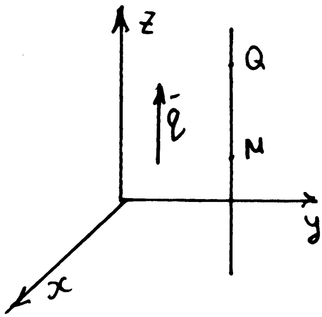

Рис. 2.18

Точка $Q(–3, 1, 4)$.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на искомой прямой, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{q}(0, 0, 1)$, а значит, координаты векторов $\overline{q}$ и $\overline{QM}$ должны быть пропорциональны. Координаты вектора: $\overline{QM}(x+3, y-1, z-4)$;

$$\frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{y-1}}{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{z-4}}{\mathbf{1}}$$ – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку Q параллельно оси OZ.

11) Написать уравнение медианы QM в ΔQPL (рис. 2.19).

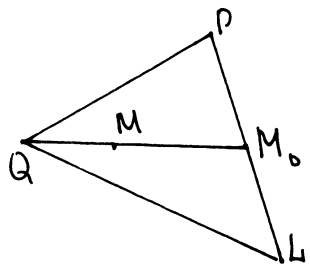

Рис. 2.19

Найдем координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$\overline{M_0P} = \frac{1}{2}\overline{LP}$;

$\overline{LP}(6, 0, -9)$;

$\overline{M_0P} = \left(\frac{6}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}(-9)\right) = \left(3,\ 0,\ -\frac{9}{2}\right)$.

Тогда $\overline{M_0P}(3 - x_0, 2 - y_0, -5 - z_0) = \left(3, 0, -\frac{9}{2}\right)$. Два вектора равны, если равны их координаты:

$$\begin{cases} 3 - x_0 = 3 \\ 2 - y_0 = 0 \\ -5 - z_0 = -\frac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -5 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(0, 2, -\frac{1}{2}\right).$$

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой QM_0, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{QM}_0$, а значит координаты векторов $\overline{QM}$ и $\overline{QM}_0$ должны быть пропорциональны:

$\overline{QM}(x + 3, y - 1, z - 4)$; $\overline{QM}_0\left(0 + 3, 2 - 1, -\frac{1}{2} - 4\right) = \left(3, 1, -\frac{9}{2}\right)$;

$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-9/2}$ умножим на 1/2;

$\boldsymbol{\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-9}}$ – уравнение медианы QM в ΔQPL.

12) Написать уравнение высоты QH_1 в ΔQPL (рис. 2.20).

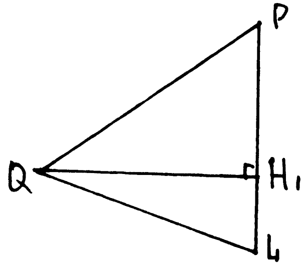

Рис. 2.20

Уравнение плоскости (QPL): $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

Через точку Q проведем плоскость π, перпендикулярную прямой PL.

$P(3, 2, –5)$; $L(–3, 2, 4)$.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π, вектор $\overline{QM}$ будет перпендикулярен вектору $\overline{PL}$, а значит их скалярное произведение должно быть равно 0.

$(\overline{QM}, \overline{QP}) = 0$; $\overline{QM}(x+3, y-1, z-4)$;

$\overline{PL}(-6, 0, 9)$;

$(\overline{QM} \cdot \overline{PL}) = -6(x+3) + 0(y-1) + 9(z-4) = 0$;

$-6x - 18 + 9z - 36 = 0$;

$-6x + 9z - 54 = 0$ разделим на –3;

$2x - 3z + 18 = 0$ – уравнение плоскости π.

Тогда прямая QH_1 – это линия пресечения плоскостей (QPL) и π:

$$QH_1 : \begin{cases} 3x + 2z + 1 = 0, \\ 2x - 3z + 18 = 0. \end{cases}$$

Напишем каноническое уравнение этой прямой.

$\overline{n}_1(3, 0, 2)$ – нормальный вектор плоскости (QPL);

$\overline{n}_2(2, 0, -3)$ – нормальный вектор плоскости π.

Прямая QH_1 перпендикулярна векторам $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, тогда прямая QH_1 параллельна вектору векторного произведения векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

$$[\bar{n}_1,\bar{n}_1]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-\bar{j}(-9-4)=13\bar{j}.$$

$\bar{q}\parallel[n_1n_2]\Rightarrow\bar{q}(0,1,0)$. Прямая L параллельна вектору $\bar{q}$, а значит для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\bar{q}$, следовательно их координаты должны быть пропорциональны.

$\overline{QM}(x+3, y-1, z-4)$, $\bar{q}(0,1,0)$.

$\dfrac{\boldsymbol{x+3}}{\mathbf{0}}=\dfrac{\boldsymbol{y-1}}{\mathbf{1}}=\dfrac{\boldsymbol{z-4}}{\mathbf{0}}$ – каноническое уравнение прямой QH_1.

13) Написать уравнение прямой, проходящей через точку N параллельно прямой $\overline{QP}$ (рис. 2.21).

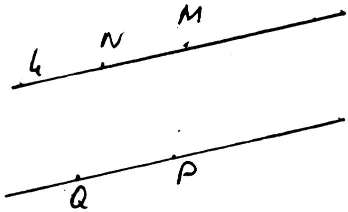

Рис. 2.21

Уравнение прямой $\overline{QP}:\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-9}$ (см. п. 9).

$\overline{N}(-3,9,2)$.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L, вектор $\overline{NM}$ $(x+3, y-9, z-2)$ коллинеарен вектору $\overline{QP}(6, 1, -9)$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны.

$\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-9}$ – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку N параллельно прямой QP.

14) Написать уравнение высоты NH тетраэдра $QLPN$ (рис. 2.22).

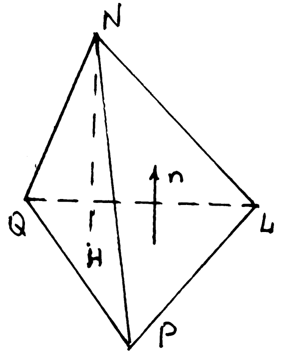

Рис. 2.22

Уравнение плоскости QLP: $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

$\bar{n}\,(3, 0, 2)$ – нормальный вектор плоскости QLP.

Прямая NH перпендикулярна плоскости (QPL), значит она параллельна вектору $\bar{n}$ (нормальному вектору плоскости QLP).

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой NH, вектор $\overline{NM}\,(x + 3, y - 9, z - 2)$ должен быть коллинеарен вектору $\bar{n}\,(3, 0, 2)$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны.

$$\frac{\boldsymbol{x+3}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{y-9}}{\mathbf{0}} = \frac{\boldsymbol{z-2}}{\mathbf{2}}$$ – каноническое уравнение высоты NH.

15) Написать уравнение прямой, перпендикулярной прямым QP и QN и переходящей через точку L (рис. 2.23).

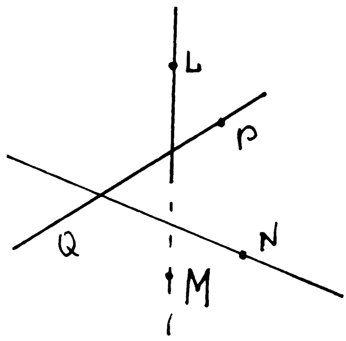

Рис. 2.23

Прямая l перпендикулярна прямым QP и QN, а значит прямая l параллельна вектору векторного произведения векторов $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$.

$\overline{QP} = (6, 1, -9)$, $\overline{QN} = (0, 8, -2)$;

$$[\overline{QP},\ \overline{QN}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-2+72) - \bar{j}(-12-0) + \bar{k}(48-0) = 70\bar{i} + 12\bar{j} + 48\bar{k}.$$

$$[\overline{QP}, \overline{QN}] = (70, 12, 48) \Rightarrow \bar{q}(35, 6, 24).$$

Для любой точки $M(x,\ y,\ z)$, лежащей на прямой l, вектор $\overline{LM}$ должен быть коллинеарен вектору $\bar{q}$, а значит их координаты должны быть пропорциональны.

$\overline{LM}(x+3,\ y-2,\ z-4)$, $\bar{q}(35, 6, 24)$.

$\boldsymbol{\dfrac{x+3}{35} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-4}{24}}$ – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку L перпендикулярно прямым QP и QN.

16) Найти угол между прямой QP и прямой LN.

Уравнение прямой QP: $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-9}$ (см .п. 9).

Напишем уравнение прямой LN.

Для любой точки $M(x,\ y,\ z)$ вектор $\overline{LM}$ должен быть коллинеарен вектору $\overline{LN}$ (рис. 2.24), а значит их координаты должны быть пропорциональны.

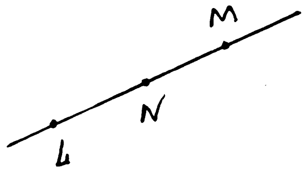

Рис. 2.24

$\overline{LM}(x+3, y-2, z-4)$, $\overline{LN}(0, 7, -2)$.

$\dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-4}{-2}$ – уравнение прямой LN.

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами.

$\overline{q}_1(6, 1, -9)$ – направляющий вектор прямой QP.

$\overline{q}_2(0, 7, -2)$ – направляющий вектор прямой LN.

$$\cos(Q\hat{P, L}N) = \left|\cos(\overline{q}_1 \hat{,} \overline{q}_2)\right| = \frac{\left|(\overline{q}_1, \overline{q}_2)\right|}{\left|\overline{q}_1\right| \cdot \left|\overline{q}_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 9(-2)\right|}{\sqrt{6^2 + 1 + (-9)^2} \cdot \sqrt{0 + 7^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{\left|7 + 18\right|}{\sqrt{36 + 1 + 81} \cdot \sqrt{49 + 4}} = \frac{25}{\sqrt{6254}}.$$

$\varphi = \arccos\frac{25}{\sqrt{6254}}$ – угол между прямыми QP и LN.

17) Найти угол между прямой PN и плоскостью (QPL).

Уравнение плоскости (QPL): $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

$\overline{n}$ (3, 0, 2) – нормальный вектор плоскости (QPL).

Напишем уравнение прямой PN.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой PN, вектор $\overline{PM}$ коллинеарен вектору $\overline{PN}$ (рис. 2.25), а значит их координаты должны быть пропорциональны.

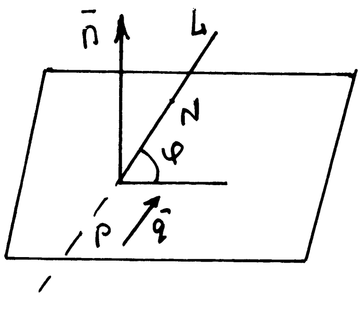

Рис. 2.25

$\overline{PN}$ (–6, 7, 7), $\overline{PM}$ $(x - 3, y - 2, z + 5)$.

$\frac{x-3}{-6} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+5}{7}$ – уравнение прямой PN.

$\bar{q}\,(-6, 7, 7)$ – направляющий вектор прямой PN.

φ – угол между прямой и плоскостью (рис. 2.25).

$$\sin\varphi = \sin 9((QPL)\hat{,} PN) = \left|\cos(\bar{q}\hat{,}\bar{n})\right| = \frac{\left|(\bar{q},\bar{n})\right|}{\left|\bar{q}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|} =$$

$$= \frac{\left|-6\cdot 3 + 0\cdot 7 + 2\cdot 7\right|}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{(-6)^2+7^2+7^2}} = \frac{\left|-18+14\right|}{\sqrt{9+4}\sqrt{36+49+49}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{134}} = \frac{4}{\sqrt{1742}}.$$

$\varphi = \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{1742}}$ – угол между плоскостью (QPL) и прямой PN.

18) Найти величину двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ).

Уравнение плоскости (QPL): $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

$\bar{n}_1(3, 0, 2)$ – нормальный вектор плоскости (QPL).

Уравнение плоскости (QPN): $35x + 6y + 24z + 3 = 0$ (см. п. 9).

$S_{\Delta NQM} = \dfrac{1}{2}\left|QM\right|h = \dfrac{1}{2}\left|[\overline{QN},\overline{QM}]\right| \Rightarrow h = \dfrac{\left|[\overline{QN},\bar{q}]\right|}{\left|\bar{q}\right|}$ – нормальный вектор плоскости (QPN).

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

$$\cos\varphi = \cos((QPL)\hat{,}(QPN)) = \left|\cos(\bar{n}_1\hat{,}\bar{n}_2)\right| =$$

$$= \frac{\left|(\bar{n}_1,\bar{n}_2)\right|}{\left|\bar{n}_1\right|\cdot\left|\bar{n}_2\right|} = \frac{\left|3\cdot 35 + 0\cdot 6 + 2\cdot 24\right|}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{35^2+6^2+24^2}} =$$

$$= \frac{\left|105+48\right|}{\sqrt{13}\sqrt{1225+36+576}} = \frac{153}{\sqrt{13}\sqrt{1837}}\,\frac{153}{\sqrt{23881}}.$$

$\varphi = \arccos\dfrac{153}{\sqrt{23881}}$ – величина двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ).

19) Найти площадь ΔQLP.

$S_{\Delta QLP} = \frac{1}{2}S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{QP}$ и $\overline{QL}$ (рис. 2.26).

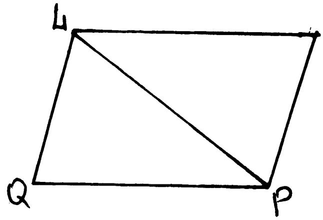

Рис. 2.26

$\overline{QL}(0,1,0)$, $\overline{QP}(6, 1, -9)$;

$S_{\Delta QLP} = \frac{1}{2}\left|[\overline{QL}\cdot\overline{QP}]\right|$;

$$\left[\overline{QL},\overline{QP}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -9\bar{i} - 6\bar{k};$$

$\left|[QL,QP]\right| = \sqrt{(-9)^2+(-6)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$.

$S_{\Delta QLP} = \frac{\sqrt{117}}{2}$.

20) Найти объем тетраэдра $QLNP$.

$V_{QLNP} = \frac{1}{6}V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{QL}$, $\overline{QN}$, $\overline{QP}$.

$V = \left|(QL,QN,QP)\right|$ – модуль смешанного произведения.

$\overline{QL}(0,1,0)$, $\overline{QP}(6,1,-9)$, $\overline{QN}(0,8,-2)$;

$$(\overline{QL},\overline{QN},\overline{QP}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow$$

$\Rightarrow V = 12 \Rightarrow V_{QLNP} = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$.

21) Найти расстояние от точки N до прямой QP (рис. 2.27).

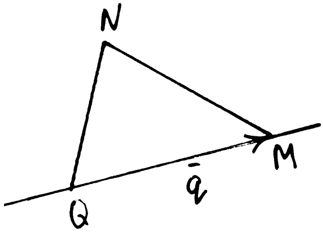

Рис. 2.27

1 способ

Уравнение прямой QP: $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-9}$ (см. п. 9).

$\bar{q} = \overline{QM} = (6, 1, -9)$ – направляющий вектор прямой QM.

$$S_{\Delta NQM} = \frac{1}{2}|QM|h = \frac{1}{2}\left|[\overline{QN}, \overline{QM}]\right| \Rightarrow h = \frac{\left|[\overline{QN}, \bar{q}]\right|}{|\bar{q}|}.$$

$\overline{QN} = (0, 8, -2)$.

$$[\overline{QN}, \bar{q}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 8 & -2 \\ 6 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-72+2)\bar{i} - \bar{j}(0+12) + \bar{k}(0-48) = -70\bar{i} - 12\bar{j} - 48\bar{k} .$$

$$\left|[\overline{QN}, \bar{q}]\right| = \sqrt{(-70)^2 + (-12)^2 + (48)^2} =$$

$$= \sqrt{4900 + 144 + 2304} = \sqrt{7348}.$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + (-9)^2} = \sqrt{36 + 1 + 81} = \sqrt{118} .$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{\sqrt{7348}}{\sqrt{118}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3674}}}{\sqrt{\mathbf{59}}} .$$

2 способ

Напишем уравнение плоскости π, проходящей через точку N перпендикулярно прямой QP (рис. 2.28).

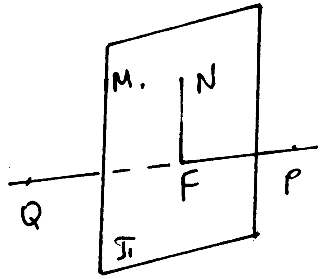

Рис. 2.28

Уравнение прямой QP: $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-9}$.

$\overline{q}(6,1,-9)$ – направляющий вектор прямой QP.

Плоскость π перпендикулярна прямой QP, а значит $\overline{q}\perp\pi$. Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π, вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\overline{q}(6,1,-9)\Rightarrow\left(\overline{NM}\cdot\overline{q}\right)=0$.

$\overline{NM}(x+3, y-9, z-2)$;

$6(x+3)+(y-9)-9(z-2)=0$;

$6x+18+y-9-9z+18=0$;

$\pi: 6x+y-9z+27=0$.

Найдем координаты точки F – точки пересечения прямой QP и плоскости π.

Для этого запишем параметрическое уравнение прямой QP:

$\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-9}=t$;

$$\begin{cases} x=-3+6t, \\ y=1+t, \\ z=4-9t. \end{cases}$$

Точка $F(x_0, y_0, z_0)$ лежит на прямой QP $\Rightarrow$ $x_0=-3+6t_0; y_0=1+t_0; z_0=4-9t_0$. Точка F лежит в плоскости π $\Rightarrow$ $6x_0+y_0-9z_0+27=0$;

$6(-3+6t_0)+1+t_0-9(4-9t_0)+27=0$;

$-18+36t_0+1+t_0-36+81t_0+27=0$;

$$118t_0 - 26 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{26}{118} = \frac{13}{59}.$$

$$\begin{cases} x_0 = -3 + 6 \cdot \dfrac{13}{59} = -\dfrac{99}{59} \\ y_0 = 1 + \dfrac{13}{59} = \dfrac{72}{59} \\ z_0 = 4 - 9\dfrac{13}{59} = \dfrac{119}{59} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F\left(-\frac{99}{59}, \frac{72}{59}, \frac{119}{59}\right), N(-3, 9, 2);$$

$$\overline{NF}\left(-\frac{99}{59} + 3, \frac{72}{59} - 9, \frac{119}{59} - 2\right) = \left(\frac{78}{59}, -\frac{459}{59}, \frac{1}{59}\right);$$

$$\rho(N, (QP)) = \left|\overline{NF}\right| = \sqrt{\left(\frac{78}{59}\right)^2 + \left(\frac{459}{59}\right)^2 + \left(\frac{1}{59}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{6084 + 210681 + 1}}{59} = \frac{\sqrt{216766}}{59} = \sqrt{\mathbf{\frac{3674}{59}}}.$$

22) Найти расстояние от точки N до плоскости (QLP) (рис. 2.29).

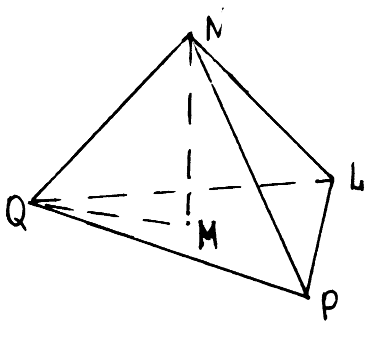

Рис. 2.29

Уравнение плоскости QLP: $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

1 способ

В п. 19 и 20 было найдено:

$V_{QLNP} = 2$;

$$S_{\Delta QLP} = \frac{\sqrt{117}}{2};$$

$$V_{QLNP} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{QLNP}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{117}} = \frac{12}{\sqrt{117}};$$

$$|\boldsymbol{NM}| = \frac{12}{\sqrt{117}} = \frac{12}{3\sqrt{13}} = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{13}}}.$$

2 способ

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$N(-3, 9, 2)$, QLP: $3x + 2z + 1 = 0$;

$$\boldsymbol{\rho(N, QLP)} = \frac{|3(-3) + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-9+4+1|}{\sqrt{13}} = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{13}}}.$$

3 способ

ΔQMN – прямоугольный (рис. 2.30) $\Rightarrow$

$|NM| = |QN| \cos QNM$; $\overline{ON}(0, 8, -2)$;

$|QN| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$.

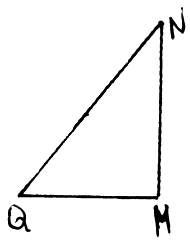

Рис. 2.30

$\cos\angle QNM = \left|\cos(\widehat{\overline{QN}, \overline{q}})\right|$, где $\overline{n}(3, 0, 2)$ – нормальный вектор плоскости (QLP).

$$\cos\angle QNM = \frac{|(\overline{QN}, \overline{n})|}{|\overline{QN}||\overline{n}|} = \frac{|0 \cdot 3 + 8 \cdot 0 + 2(-2)|}{\sqrt{64+4}\sqrt{9+4}} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{68}};$$

$$|\boldsymbol{NM}| = \sqrt{68}\,\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{68}} = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{13}}}.$$

23) Найти расстояние между прямыми QP и LN.

Уравнение прямой QP: $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-9}$ (см. п. 9);

$\bar{q}_1(6, 1, -9)$ – направляющий вектор прямой QP.

Напишем уравнение прямой LN.

$L(-3, 2, 4), N(-3, 9, 2) \Rightarrow \overline{LN}(0, 7, -2)$

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой LM, вектор $\overline{LM}$ коллинеарен вектору $\overline{LN}$ (рис. 2.31) $\Rightarrow \dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-4}{-2}$ – каноническое уравнение прямой LN.

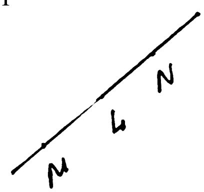

Рис. 2.31

$\bar{q}_2(0, 7, -2)$ – направляющий вектор прямой LN.

Выясним взаимное расположение прямых QP и LN.

Прямые QP и LN лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{LN}, \overline{QP}, \overline{QL}$ – компланарны (рис. 2.32), а значит ($\overline{LN}, \overline{QP}, \overline{QL}$) = 0.

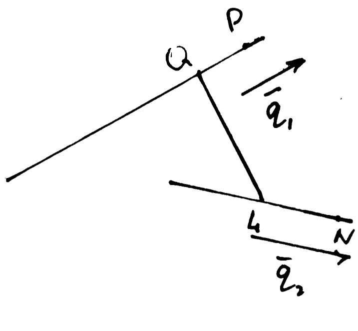

Рис. 2.32

$$\bar{q}_1 = \overline{QP} = (6, 1, -9);$$
$$\bar{q}_2 = \overline{LN} = (0, 7, -2);$$
$$\overline{QL}(0, 1, 0)\ ;$$
$$\left(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{QL}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -9 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= |\text{разложим по третьей строке}| = -1\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow$ прямые не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они скрещиваются.

$$\rho(QP, LN) = \frac{\left|(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{QL})\right|}{\left|[q_1 q_2]\right|};$$
$$\left|(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{QL})\right| = 12\,;$$
$$[q_1, q_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 1 & -9 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= (-2 + 63)\bar{i} - (-12 - 0)\,\bar{j} + 42\bar{k} = 61\bar{i} + 12\bar{j} + 42\bar{k};$$
$$\left|[\bar{q}_1 \bar{q}_2]\right| = \sqrt{61^2 + 12^2 + 42^2} = \sqrt{3721 + 144 + 1764} = \sqrt{5629}\,;$$
$$\rho(\boldsymbol{QP}, \boldsymbol{LN}) = \frac{\mathbf{12}}{\sqrt{\mathbf{5629}}}\ .$$

24) Найти координаты точки N_1, симметричной точке N относительно прямой QP.

Уравнение прямой QP: $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-9}$.

При решении задачи 20 вторым способом мы нашли координаты точки $F\left(-\dfrac{99}{59}, \dfrac{72}{59}, \dfrac{119}{59}\right)$ – основания перпендикуляра, опущенного из точки N на прямую QP (рис. 2.33).

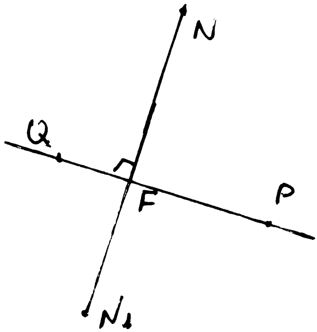

Рис. 2.33

Найдем координаты точки N_1.

$\overline{NF} = \dfrac{1}{2}\overline{NN_1}$;

$\overline{NF} = \left(-\dfrac{99}{59}+3,\ \dfrac{72}{59}-9,\ \dfrac{119}{59}-2\right) = \left(\dfrac{78}{59}, -\dfrac{459}{59}, \dfrac{1}{59}\right).$

Пусть N_1 (x_1, y_1, z_1).

$\overline{NN_1}(x_1+3, y_1-9, z_1-2)$.

$\left(\dfrac{78}{59}, -\dfrac{459}{59}, \dfrac{1}{59}\right) = \dfrac{1}{2}(x_1+3, y_1-9, z_1-2)$.

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты, составим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+3}{2} = \dfrac{78}{59} \\ \dfrac{y_1-9}{2} = -\dfrac{459}{59} \\ \dfrac{z_1-2}{2} = \dfrac{1}{59} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+3 = \dfrac{156}{59} \\ y_1-9 = -\dfrac{918}{59} \\ z_1-2 = \dfrac{2}{59} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{156}{59}-3 = \dfrac{156-177}{59} \\ y_1 = 9-\dfrac{918}{59} = \dfrac{531-918}{59} \\ z_1 = 2+\dfrac{2}{59} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{21}{59} \\ y_1 = -\dfrac{387}{59} \\ z_1 = \dfrac{120}{59}. \end{cases}$$

$N_1\left(-\frac{21}{59}, -\frac{387}{59}, \frac{120}{59}\right)$ – точка, симметричная точке N относительно прямой QP.

25) Найти координаты точки N_2, симметричной точке N относительно плоскости (QLP).

Уравнение плоскости (QLP): $3x + 2z + 1 = 0$ (см. п. 3).

Через точку N проведем прямую NN_3 перпендикулярно плоскости (QLP). Вектор $\bar{n}(3, 0, 2)$ перпендикулярен плоскости (QLP) $\Rightarrow$ прямая (NN_3) параллельна вектору $\bar{n}$ $\Rightarrow$ для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой NN_3, вектор $\overline{NM}(x+3, y-9, z-2)$ коллинеарен вектору $\bar{n}$, а значит координаты векторов $\overline{NM}$ и $\bar{n}$ должны быть пропорциональны (рис. 2.34).

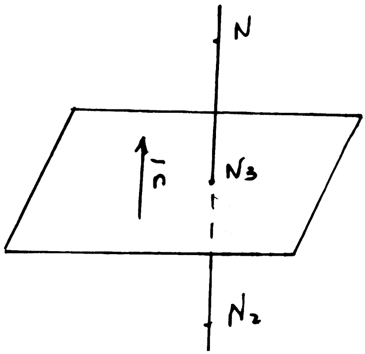

Рис. 2.34

$\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{0} = \frac{z-2}{2}$ – уравнение прямой NN_3.

Напишем параметрическое уравнение этой прямой:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{0} = \frac{z-2}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 3t, \\ y = 9, \\ z = 2 + 2t; \end{cases}$$

Найдем координаты точки $N_3(x_0, y_0, z_0)$ – точки пересечения прямой и плоскости (QLP):

$$N_3 \in NN_3 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 + 3t_0, \\ y_0 = 9, \\ z_0 = 2 + 2t; \end{cases}$$

$N_3 \in (QLP) \Rightarrow 3x_0 + 2z_0 + 1 = 0$;

$3(-3 + 3t_0) + 2(2 + 2t_0) + 1 = 0$;

$-9 + 9t_0 + 4 + 4t_0 + 1 = 0$;

$13t_0 - 4 = 0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{4}{13}$;

$$\begin{cases} x_0 = -3 + 3\dfrac{4}{13} = \dfrac{-39+12}{13} = \dfrac{-27}{13} \\ y_0 = 9 \\ z_0 = 2 + 2\dfrac{4}{13} = \dfrac{26+8}{13} = \dfrac{34}{13} \end{cases} \Rightarrow N_3\left(-\frac{27}{13}; 9; \frac{34}{13}\right).$$

Найдем координаты точки N_2, симметричной точке N относительно плоскости (QLP), $\overline{NN}_3 = \dfrac{1}{2}\overline{NN}_2$ (см. рис. 2.34).

Пусть $N_2(x_2, y_2, z_2)$.

$\overline{NN}_3 = \left(-\dfrac{27}{13} + 3, 9 - 9, \dfrac{34}{13} - 2\right) = \left(\dfrac{12}{13}, 0, \dfrac{8}{13}\right)$;

$\overline{NN}_2(x_2 + 3, y_2 - 9, z_2 - 2)$;

$\left(\dfrac{12}{13}, 0, \dfrac{8}{13}\right) = \dfrac{1}{2}(x_2 + 3, y_2 - 9, z_2 - 2)$.

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2+3}{2} = \dfrac{12}{13} \\ \dfrac{y_2-9}{2} = 0 \\ \dfrac{z_2-2}{2} = \dfrac{8}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3 = \dfrac{24}{13} \\ y_2 = 9 \\ z_2 - 2 = \dfrac{16}{13} \end{cases} \begin{cases} x_2 = \dfrac{24}{13} - 3 \\ y_2 = 9 \\ z_2 = \dfrac{16}{13} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{15}{13} \\ y_2 = 9 \\ z_2 = \dfrac{42}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow N_2\left(-\dfrac{15}{13}, 9, \dfrac{42}{13}\right)$ – координаты точки, симметричной точке N относительно плоскости (QLP).