

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 2

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе 3, Ваш номер в списке – 15. Тогда по табл. 1 имеем:

3	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую пятнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты						
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
15	–4	2	–2	7	4	3	–8

Таблица 2.1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты						
1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
2	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>k</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
3	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>k</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
4	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
5	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
6	<i>a</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
7	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
8	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
9	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
10	<i>d</i>	<i>k</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
11	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
12	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
13	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
14	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
15	<i>k</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>m</i>
16	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>m</i>

Таблица 2.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
						f	m
1	1	2	-1	3	6	4	27
2	2	-1	4	-2	-1	3	8
3	-2	4	10	2	3	3	81
4	3	6	-3	-2	4	5	64
5	1	5	2	-3	-4	2	-8
6	4	3	11	-1	-4	3	-81
7	2	5	-2	4	10	3	-64
8	5	3	-1	4	9	3	27
9	-2	5	6	2	-3	4	8
10	-4	10	2	-1	4	2	-1
11	2	3	-2	3	1	3	8
12	-6	5	-1	4	1	2	-64
13	3	2	9	-2	-3	4	27
14	4	5	2	-4	3	6	81
15	-4	2	-2	7	4	3	-8
16	2	5	-1	-2	1	3	-1
17	1	-1	2	3	5	4	64
18	10	-2	6	-4	3	5	-64
19	4	5	-3	6	-4	2	8
20	2	1	3	5	4	6	-8
21	3	5	-2	4	1	4	27
22	-3	2	-2	3	4	5	-27
23	1	3	2	4	5	2	1
24	3	-5	6	1	2	2	-1
25	1	-2	4	2	5	3	-64
26	2	1	6	4	-3	5	81
27	1	4	-3	2	6	8	64
28	4	5	-9	7	3	2	-1
29	3	2	-3	9	5	6	-8
30	-2	3	4	1	-2	4	27

Домашнее задание №2

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d + f$ в точке $x_0 = k$;

б) $y = \frac{a}{\sqrt[4]{fx^d}} - \frac{c}{\sqrt[3]{bx^a}}$ в точке $x_0 = f$;

в) $y = c(a\sqrt[6]{x} - k\sqrt[f]{x^3})\sqrt[3]{x^b}$ в точке $x_0 = 1$;

г) $y = \frac{m}{cx^3 + dx^2 + kx + a}$ в точке $x_0 = 0$;

д) $y = \frac{1}{\sqrt[f+1]{ax^2 + cx + d}}$;

е) $y = (ax + d)^f + \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{k + d}$;

ж) $y = (f + 4)^x \sin bx$;

з) $y = \sin^{-b}(cx) + k \log_f(cx - d)$;

и) $y = \frac{a + \sqrt{bx + c}}{x}$;

к) $y = -\frac{c}{k(a - b \cos x)^3}$;

л) $y = \frac{1}{a} \log_2^5(ax + c)$;

м) $y = b \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{m}\right)$;

н) $y = \sqrt{e^{ax} + f} + c \arccos(dx)$;

о) $y = c \log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(fx))$;

п) $y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{(bx+k)^2}{dx}}$;

р) $y = ax^{\operatorname{arctg}(fx)}$;

с) $y = \left(a + \frac{b}{x}\right)^{cx+d}$.

Задача 2. Написать уравнения касательной и нормали к графикам функций:

а) $y = a\sqrt[3]{bx+c}$ в точке $x_0 = 0$;

б) $y = e^{a-bx^2}$ в точке $x_0 = d$.

Задача 3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c \log_5(fx+a)}{d\sqrt[f]{x}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{fx}}{cx^4 + dx^3 + kx^2 + mx + a}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \ln^2 x}{cx + d}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{bx^2 + dx}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - b \sin x}{dx - ktgx}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{fx} - 1}{\arctg(dx)}$.

Задача 4. Провести полное исследование следующих функций и построить их графики:

а) $y = (ax - b)^2 (cx - d)$;

б) $y = \frac{ax^3}{(b - cx)^2}$;

в) $y = a\sqrt[3]{x(x+d)^2}$;

г) $y = \frac{e^{c(x+d)}}{b(x+d)}$;

д) $y = \frac{ax^2}{c\sqrt[3]{x^3 - b^3}}$.

Задача 5. Разложить многочлен $dx^4 + kx^3 + mx^2 + bx + a$ по формуле Тейлора в точке $x_0 = 2$

Пример выполнения домашнего задания №2

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = -x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ в точке $x_0 = -1$.

Решение

а) $y = -x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ в точке $x_0 = -1$.

$$y' = (-x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2)' = (-x^4)' + (x^3)' + 2(x^2)' + 3(x)' + 0 = -4x^3 + 3x^2 + 2 \cdot 2x + 3;$$

$$y'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 4 + 3 - 4 + 3 = 6.$$

б) $y = \frac{-1}{\sqrt[4]{2x^3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^{-1}}}$ в точке $x_0 = 2$.

$$\text{Преобразуем функцию } y = -(2x^3)^{-\frac{1}{4}} - 2\sqrt[3]{x} = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{3}{4}} - 2\sqrt[3]{x}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{3}{4}} \right)' - \left(2\sqrt[3]{x} \right)' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(-\frac{3}{4} \right) x^{-\frac{3}{4}-1} - 2 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \\ &= \frac{3}{4\sqrt[4]{2}} x^{-\frac{7}{4}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}}; \\ y'(2) &= \frac{3}{4\sqrt[4]{2}} 2^{-\frac{7}{4}} - \frac{2}{3} 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} 2^{-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4 \cdot 4} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{16} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

в) $y = 2\left(-\sqrt[6]{x} + \sqrt{x^3}\right)\sqrt[3]{x}$ в точке $x = 1$.

Преобразуем функцию

$$y = 2\left(-x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{3}{2}}\right)x^{\frac{1}{3}} = 2\left(-x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}\right) = 2\left(-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{11}{6}}\right);$$

$$y' = 2\left(-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{11}{6}}\right)' = 2\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{11}{6}x^{\frac{11}{6}-1}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}\right);$$

$$y'(1) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{11}{6} \right) = 2 \frac{11-3}{6} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{г) } y = \frac{8}{2x^3 + 3x^2 - x - 1} \text{ в точке } x_0 = 0.$$

$$y' = -\frac{8(2x^3 + 3x^2 - x - 1)'}{(2x^3 + 3x^2 - x - 1)^2} = -\frac{8(2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 1)}{(2x^3 + 3x^2 - x - 1)^2} = -\frac{8(6x^2 + 6x - 1)}{(2x^3 + 3x^2 - x - 1)^2};$$

$$y'(0) = -\frac{8(-1)}{(-1)^2} = 8.$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{-x^2 + 2x + 3}} = (-x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x)))' = f(g(x))' \cdot g'(x)$.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{3}(-x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{3}-1}(-x^2 + 2x + 3)' = \\ &= -\frac{1}{3}(-x^2 + 2x + 3)^{-\frac{4}{3}}(-2x + 2) = -\frac{2x - 2}{3\sqrt[3]{(-x^2 + 2x + 3)^4}}. \end{aligned}$$

$$\text{е) } y = (-x + 2)^2 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{-1+3} = (-x + 2)^2 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$\begin{aligned} y' &= ((-x + 2)^2)' + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \right)' = 2(-x + 2)^{2-1}(-x + 2)' + \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2})' = \\ &= 2(-x + 2)(-1) + \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = 2(x - 2) + \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \\ &= 2(x - 2) - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{ж) } y = (2+4)^x \sin x = 6^x \sin x.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = (6^x)' \sin x + 6^x (\sin x)' = \mathbf{6^x \ln 6 \sin x + 6^x \cos x}.$$

$$з) y = \sin^{-1}(2x) + (-1) \log_2(2x-3).$$

$$y' = (-1) \sin^{-2} 2x (\sin 2x)' - (\log_2(2x-3))' = -\sin^{-2} 2x (\cos 2x) (2x)' - \frac{1}{(2x-3) \ln 2} (2x-3)' = \mathbf{-2 \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} - \frac{2}{(2x-3) \ln 2}}.$$

$$и) y = \frac{-1 + \sqrt{x+2}}{x}.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной частного

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$y' = \frac{(-1 + \sqrt{x+2})' x - (-1 + \sqrt{x+2}) x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} (x+2)' x - (\sqrt{x+2} - 1)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+2} + 1}{x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x+2}} + \frac{1 - \sqrt{x+2}}{x^2}.$$

$$к) y = -\frac{2}{-1(-1 - \cos x)^3}.$$

Преобразуем функцию

$$y = -\frac{2}{-1(-1 - \cos x)^3} = -\frac{2}{(1 + \cos x)^3} = -2(1 + \cos x)^{-3}.$$

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$y' = -2(-3)(1 + \cos x)^{-3-1} (1 + \cos x)' = 6(1 + \cos x)^{-4} (0 + (-\sin x)) =$$

$$= \mathbf{\frac{-6 \sin x}{(1 + \cos x)^4}}.$$

$$л) y = -\log_2^5(-x+2).$$

$$y' = -(\log_2^5(-x+2))' = -5 \log_2^4(-x+2) (\log_2(-x+2))' =$$

$$\begin{aligned}
 &= -5\log_2^4(-x+2) \frac{1}{(-x+2)\ln 2} (-x+2)' = \\
 &= -5\log_2^4(-x+2) \frac{1}{(-x+2)\ln 2} (-1) = \frac{5\log_2^4(-x+2)}{(-x+2)\ln 2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{м) } y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)\right).$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)} \left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{8}\right)\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{8}\right)} \left(-\frac{x}{8}\right)' = \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)} \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8\operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{н) } y = \sqrt{e^{-x} + 2} + 2\arccos(3x).$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2\sqrt{e^{-x} + 2}} (e^{-x} + 2)' + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - (3x)^2}} \right) (3x)' = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{e^{-x} + 2}} (e^{-x}(-x)' + 0) - \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x} + 2}} e^{-x}(-1) - \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \\
 &= -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} + 2}} - \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{о) } y = 2\log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(2x)).$$

$$\begin{aligned}
 y' &= 2 \left(\log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(2x)) \right)' = 2 \frac{1}{\arcsin(2x) \ln \frac{1}{2}} (\arcsin(2x))' = \\
 &= \frac{2}{\arcsin(2x) \ln \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} (2x)' = \frac{2 \cdot 2}{\arcsin(2x) \ln \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x)^2}} = \\
 &= \frac{4}{\arcsin(2x) \ln \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x)^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{п) } y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}}.$$

$$\begin{aligned} y' &= 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \ln 3 \left(\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x} \right)' = 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \ln 3 \left(-\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)} \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)' \right) = \\ &= -3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)} \frac{1}{3} \frac{\left((x-1)^2 \right)' x - (x-1)^2 x'}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)} \frac{2(x-1)(x-1)' x - (x-1)^2}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)} \frac{2x(x-1) - (x-1)^2}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right)} \frac{(x-1)(2x - x + 1)}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{3} 3^{\operatorname{ctg} \frac{(x-1)^2}{3x}} \frac{\ln 3(x^2 - 1)}{\sin^2 \left(\frac{(x-1)^2}{3x} \right) x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{р) } y = -x^{\arctg(2x)}.$$

$$y' = -(x^{\arctg(2x)})'.$$

Данная функция не является ни показательной, ни степенной. Поэтому для нахождения производной этой функции воспользуемся предварительным логарифмированием:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 (\ln y_1)', \\ \text{где } y_1 &= x^{\arctg(2x)}, \\ \ln y_1 &= \ln x^{\arctg(2x)} = \arctg(2x) \ln(x); \\ (\ln y_1)' &= (\arctg(2x))' \ln(x) + \arctg(2x) (\ln(x))' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+(2x)^2} (2x)' \ln x + \operatorname{arctg} 2x \frac{1}{x} = \frac{2}{1+4x^2} \ln x + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x},$$

тогда

$$y' = -y_1 (\ln y_1)' = -x^{\operatorname{arctg}(2x)} \left(\frac{2}{1+4x^2} \ln x + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} \right).$$

$$\text{с) } y = \left(-1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+3}.$$

Функция не является ни показательной, ни степенной. Поэтому для нахождения производной этой функции воспользуемся предварительным логарифмированием (см. п. р)):

$$\ln y = \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+3} = (2x+3) \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$(\ln(y))' = (2x+3)' \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right) + (2x+3) \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right)' =$$

$$= 2 \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right) + (2x+3) \frac{1}{-1 + \frac{1}{x}} \left(-1 + \frac{1}{x} \right)' =$$

$$= 2 \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right) + (2x+3) \frac{x}{1-x} \left(0 - \frac{1}{x^2} \right) = 2 \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{2x+3}{(1-x)x};$$

$$y' = y (\ln y)' = \left(-1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+3} \left(2 \ln \left(-1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{2x+3}{(1-x)x} \right).$$

Задача 2. Написать уравнения касательной и нормали к графикам функций

$$\text{а) } y = -\sqrt[3]{x+2} \quad \text{в точке } x_0 = 0;$$

$$\text{б) } y = e^{-1-x^2} \quad \text{в точке } x_0 = 3.$$

Решение

$$\text{а) } y = -\sqrt[3]{x+2} \quad \text{в точке } x_0.$$

Уравнение касательной и уравнение нормали вычисляются по формулам:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0,$$

соответственно.

$$f(x_0) = f(0) = -\sqrt[3]{2};$$

$$f'(x) = \left(-\sqrt[3]{x+2}\right)' = \left(-(x+2)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}(x+2)^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}};$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}};$$

$$y = -\sqrt[3]{2} + \left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)(x-0);$$

$$y = -\sqrt[3]{2} - \frac{x}{3\sqrt[3]{4}} - \text{получили уравнение касательной.}$$

$$(x-0) + \left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)(y + \sqrt[3]{2}) = 0;$$

$$x - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}y - \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}} = 0;$$

$$x - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}y - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} = 0 - \text{получили уравнение нормали.}$$

$$\text{б) } y = e^{-1-x^2} \text{ в точке } x_0 = 3.$$

$$f(x_0) = f(3) = e^{-1-9} = e^{-10};$$

$$f'(x) = \left(e^{-1-x^2}\right)' = e^{-1-x^2}(-1-x^2)' = e^{-1-x^2}(-2x) = -2xe^{-1-x^2};$$

$$f'(x_0) = f'(3) = -2 \cdot 3 \cdot e^{-1-9} = -6e^{-10};$$

$$y = e^{-10} - 6e^{-10}(x-3) = e^{-10} - 6e^{-10}x + 18e^{-10};$$

$$y = 19e^{-10} - 6e^{-10}x - \text{получили уравнение касательной.}$$

$$(x-3) - 6e^{-10}(y - e^{-10}) = 0;$$

$$(x-3) - 6e^{-10}y + 6e^{-20} = 0;$$

$$x - 6e^{-10}y + 6e^{-20} - 3 = 0 - \text{получили уравнение нормали.}$$

Задача 3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

Решение

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log_5(2x-1)}{3\sqrt{x}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \log_5(2x-1))'}{(3\sqrt{x})'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{1}{(2x-1) \ln 5} (2x-1)'}{3 \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2}{(2x-1) \ln 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 2\sqrt{x}}{3(2x-1) \ln 5} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{x}}{3(2x-1) \ln 5} = \frac{8}{3 \ln 5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(2x-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{8}{3 \ln 5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})'}{(2x-1)'} = \\
 &= \frac{8}{3 \ln 5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2} = \frac{8}{3 \ln 5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x^4 + 3x^3 - x^2 + 8x - 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 8x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{8x^3 + 9x^2 - 2x + 8} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^{2x})'}{(8x^3 + 9x^2 - 2x + 8)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{24x^2 + 18x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4e^{2x})'}{(24x^2 + 18x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^{2x}}{48x + 18} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8e^{2x})'}{(48x + 18)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16e^{2x}}{48} = \frac{\infty}{48} = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln^2 x}{2x+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(\ln^2 x)'}{(2x+3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln x (\ln x)'}{2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \\
 &= \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(-x)}{x^2+3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2+3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x^2+3x)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x)'}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x+3} = \frac{0}{3} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \sin(x)}{3x + \operatorname{tg}(x)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x - \sin x)'}{(3x + \operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos x}{3 + \frac{1}{\cos^2 x}} = \\
 &= \frac{-1-1}{3+1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\arctg(3x)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{2x} - 1)'}{(\arctg(3x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} \ln 2 (2x)'}{3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} \ln 2 \cdot 2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln 2}{3} = \frac{2 \ln 2}{3}.
 \end{aligned}$$

Задача 4. Провести полное исследование следующих функций и построить их графики:

$$\text{а) } y = (-x-1)^2(2x-3) = (x+1)^2(2x-3); \quad \text{б) } y = \frac{-x^3}{(1-2x)^2};$$

$$\text{в) } y = -\sqrt[3]{x(x+3)^2}; \quad \text{г) } y = \frac{e^{2(x+3)}}{x+3}; \quad \text{д) } y = \frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

Решение

$$\text{a) } y = (-x - 1)^2(2x - 3) = (x + 1)^2(2x - 3).$$

1) О.Д.З.: $x \in R$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = ((-x) + 1)^2(2(-x) - 3) = (-x + 1)^2 \cdot (-2x - 3) \neq \pm y(x).$$

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

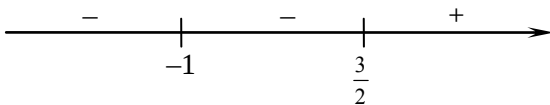
При $x = 0$ $y = -3$, $(0, -3)$ – точка пересечения с осью OY ;

При $y = 0$ $x = -1$ и $x = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $(-1, 0)$ – точки пересечения

с осью OX .

4) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов:



5) Найдем асимптоты функций.

Функция является непрерывной, следовательно, вертикальных асимптот нет. Наклонных асимптот нет, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(2x+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^2 \left(2 + \frac{3}{x} \right) = \infty.$$

6) Строим эскиз (рис. 2.13).

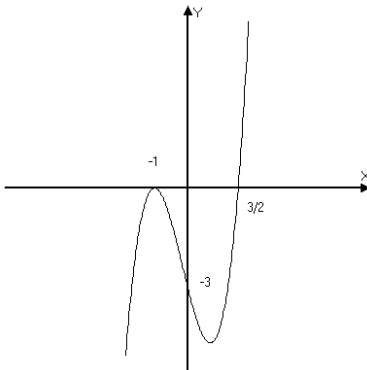


Рис. 2.13

Уточним график с помощью первой и второй производной.

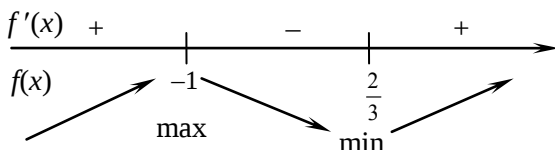
7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции.

$$\begin{aligned} y' &= ((x+1)^2(2x-3))' = ((x+1)^2)'(2x-3) + (x+1)^2(2x-3)' = \\ &= 2(x+1)(x+1)'(2x-3) + 2(x+1)^2 = 2(x+1)(2x-3) + 2(x+1)^2 = \\ &= 2(x+1)(2x-3+x+1) = 2(x+1)(3x-2). \end{aligned}$$

Найдем нули производной:

$$\begin{aligned} y' = 0, \text{ тогда } 2(x+1)(3x-2) &= 0; \\ x+1 = 0 \text{ или } 3x-2 &= 0; \\ x = -1, \quad x &= 2/3. \end{aligned}$$

На числовой оси отметим нули первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = -1$ – максимум функции,

В точке, где $x = 2/3$ – минимум функции.

Найдем значения функции в точках максимума и минимума:

$$\begin{aligned} y(-1) &= 0, \\ y(2/3) &= (2/3 + 1)^2(2 \cdot 2/3 - 3) = (5/3)^2(4/3 - 3) = \\ &= (25 \cdot (4 - 9))/(9 \cdot 3) = -125/27. \end{aligned}$$

На интервале $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ функция возрастает; на

интервале $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ функция убывает.

8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

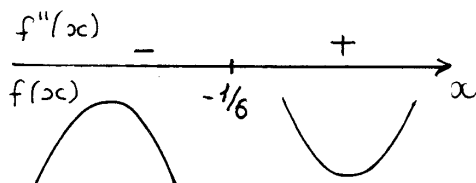
$$\begin{aligned} y'' &= (2(x+1)(3x-2))' = 2((x+1)'(3x-2) + (x+1)(3x-2)') = \\ &= 2(3x-2 + (x+1)3) = 2(3x-2+3x+3) = 2(6x+1). \end{aligned}$$

Найдем нули второй производной:

$$6x+1=0; \quad x=-1/6.$$

Отметим нули второй производной на числовой прямой.

Затем определим знаки получившихся интервалов:



$$y\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6} + 1\right)^2 \left(-\frac{2}{6} - 3\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(-\frac{1}{3} - 3\right) = (25 \cdot (-1 - 9)) / (36 \cdot 3) = -\frac{250}{108} = -\frac{125}{54};$$

$\left(-\frac{1}{6}; \frac{125}{54}\right)$ – точка перегиба.

На интервале $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$ график функции выпуклый вверх;

на $\left(-\frac{1}{6}, \infty\right)$ – выпуклый вниз.

9) Строим график (рис. 2.14).

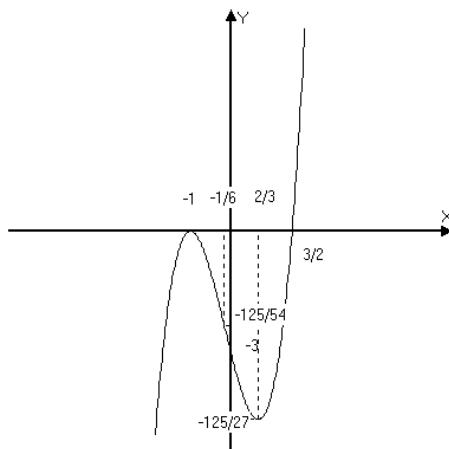


Рис. 2.14

$$б) y = \frac{-x^3}{(1-2x)^2}.$$

$$1) \text{ О.Д.З.: } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{-(-x)^3}{(1-2(-x))^2} = \frac{x^3}{(1+2x)^2} \neq \pm y(x).$$

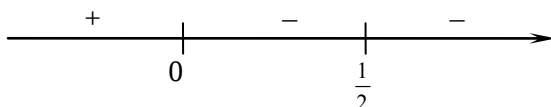
3) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $y = 0$;

$(0, 0)$ – точка пересечения с осями.

4) Найдем промежутки постоянства знака значения функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов.



5) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-x^3}{(1-2x)^2} = \infty \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ – уравнение вертикальной}$$

асимптоты.

Наклонную асимптоту находим по формуле:

$$y = kx + b,$$

$$\begin{aligned} \text{где } k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x(1-2x)^2} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1-2x)^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^3}{(1-2x)^2} + \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + x(1-2x)^2}{4(1-2x)^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + x - 4x^2 + 4x^3}{4(1-4x+4x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^2}{4(1-4x+4x^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 4}{4(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} = -\frac{4}{4 \cdot 4} = -\frac{1}{4};
 \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \text{ — уравнение наклонной асимптоты.}$$

Для построения асимптоты найдем точки ее пересечения с осями координат:

x	0	-1
y	$-\frac{1}{4}$	0

6) Строим эскиз (рис. 2.15).

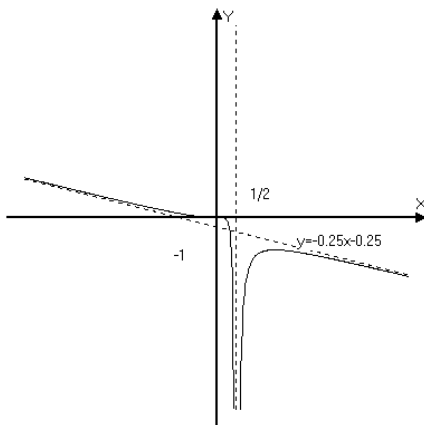


Рис. 2.15

Уточним график функции с помощью первой и второй производной.

7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции.

$$\begin{aligned}
 y' &= -\left(\frac{x^3}{(1-2x)^2}\right)' = -\frac{(x^3)'(1-2x)^2 - x^3((1-2x)^2)'}{(1-2x)^4} = \\
 &= -\frac{3x^2(1-2x)^2 - 2x^3(1-2x)(-2)}{(1-2x)^4} = -\frac{x^2(1-2x)(3(1-2x) + 4)}{(1-2x)^4} = \\
 &= -\frac{x^2(3-6x+4x)}{(1-2x)^3} = -\frac{x^2(3-2x)}{(1-2x)^3} = \frac{x^2(2x-3)}{(1-2x)^3}.
 \end{aligned}$$

Найдем нули производной:

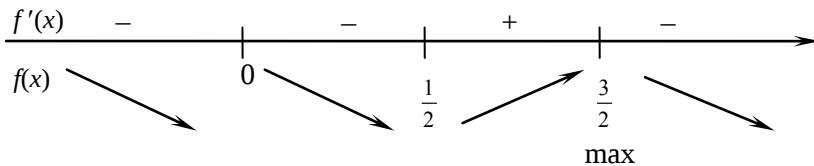
$$y' = 0;$$

$$x^2(2x-3) = 0;$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{3}{2},$$

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = \frac{3}{2}$ – максимум функции.

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^3}{(1-3)^2} = -\frac{27}{8 \cdot 4} = -\frac{27}{32};$$

$\left(\frac{3}{2}; -\frac{27}{32}\right)$ – точка максимума функции.

На интервале $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ функция убывает,
на интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ функция возрастает.

8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

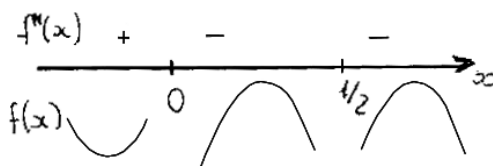
$$\begin{aligned}
 y'' &= \left(\frac{x^2(2x-3)}{(1-2x)^3} \right)' = \left(\frac{2x^3-3x^2}{(1-2x)^3} \right)' = \\
 &= \frac{(2x^3-3x^2)'(1-2x)^3 - (2x^3-3x^2)(1-2x)^3'}{(1-2x)^6} = \\
 &= \frac{(6x^2-6x)(1-2x)^3 - 3(2x^3-3x^2)(1-2x)^2(1-2x)'}{(1-2x)^6} = \\
 &= \frac{(1-2x)^2((6x^2-6x)(1-2x) - 3(2x^3-3x^2)(-2))}{(1-2x)^6} = \\
 &= \frac{6x((x-1)(1-2x) + (2x^2-3x))}{(1-2x)^4} = \frac{6x(x-1-2x^2+2x+2x^2-3x)}{(1-2x)^4} = \\
 &= \frac{6x(-1)}{(1-2x)^4} = -\frac{6x}{(1-2x)^4}.
 \end{aligned}$$

Найдем нули второй производной:

$$-\frac{6x}{(1-2x)^4} = 0;$$

$$x = 0, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя второй производной и определим знаки получившихся интервалов:



На интервале $(-\infty, 0)$ график функции выпуклый вверх; на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ – выпуклый вниз.

В точке, где $x = 0$ – перегиб функции.

$$y(0) = 0;$$

$(0; 0)$ – точка перегиба.

9) Строим график (рис. 2.16).

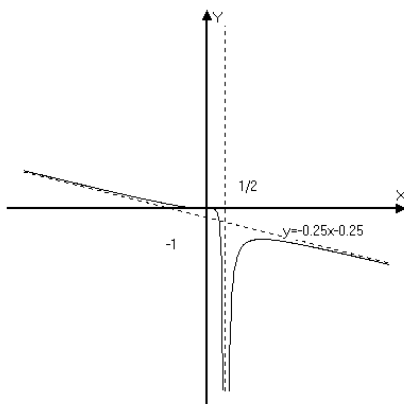


Рис. 2.16

в) $y = -\sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

1) О.Д.З.: $x \in \mathbb{R}$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = -\sqrt[3]{-x(-x+3)^2} \neq \pm y(x).$$

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $y = 0$,

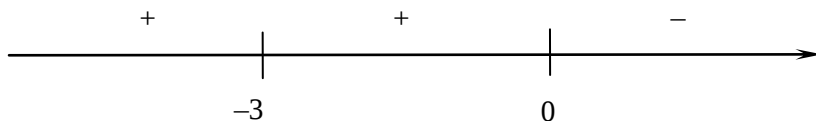
$(0, 0)$ – точка пересечения с осью OY .

При $y = 0$ $x = -3$ и $x = 0$;

$(0, 0)$ и $(-3, 0)$ – точки пересечения с осью OX .

4) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов:



5) Найдем асимптоты функции.

Функция является непрерывной, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Наклонную асимптоту определяем по формуле:

$$y = kx + b,$$

где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x(x+3)^2}{x^3}} =$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(x+3)^2}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\sqrt[3]{x(x+3)^2} + x \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Домножим числитель и знаменатель} \\ \text{на сопряженное к числителю выражение} \end{array} \right| =$$

$$\left| (a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x - \sqrt[3]{x(x+3)^2} \right) \left(x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2 \right)}{x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x+3)^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 + 6x + 9)}{x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - 6x^2 - 9x}{x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 - 9x}{x^2 + x\sqrt[3]{x(x+3)^2} + \left(\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 - \frac{9}{x}}{1 + \frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x} + \left(\frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x} \right)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 - \frac{9}{x}}{1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} \right)^2} = \frac{-6}{1 + 1 + 1} = -2;$$

$y = -x - 2$ – уравнение наклонной асимптоты.

Для построения асимптот найдем точки пересечения ее с осями координат:

x	0	-2
y	-2	0

6) Строим эскиз (рис. 2.17).

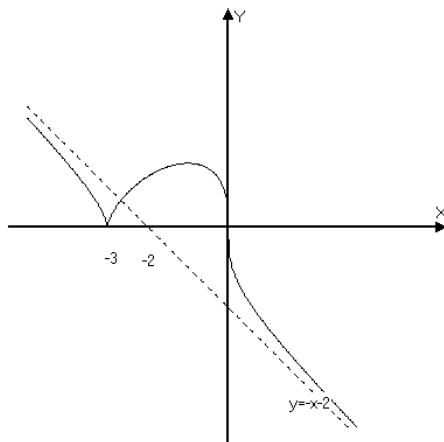


Рис. 2.17

Уточним график функции с помощью первой и второй производной.

7) Найдём точки экстремума и промежутки монотонности функции.

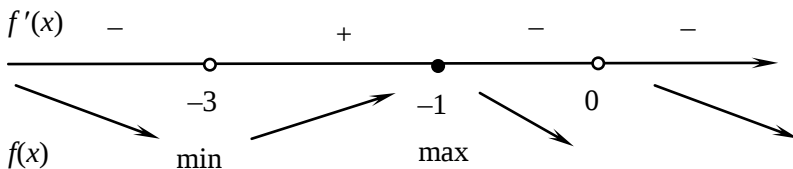
$$\begin{aligned}
 y' &= \left(-\sqrt[3]{x(x+3)^2} \right)' = - \left(x^{\frac{1}{3}} (x+3)^{\frac{2}{3}} \right)' = \\
 &= - \left(\left(x^{\frac{1}{3}} \right)' (x+3)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \left((x+3)^{\frac{2}{3}} \right)' \right) = - \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (x+3)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} (x+3)^{-\frac{1}{3}} \right) = \\
 &= - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2} \sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x+3}} \right) = - \frac{1}{3} \frac{x+3+2x}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x+3}} = - \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} (x+3)}.
 \end{aligned}$$

Найдём точки, в которых производная равна нулю или не существует:

$$x + 1 = 0, \quad \text{и} \quad x^2(x+3) \neq 0,$$

$$x = -1. \quad x \neq 0, x \neq -3;$$

На числовой прямой отметим критические точки и найдём знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = -1$ – максимум функции,
в точке, где $x = -3$ – минимум функции.

$$y(-1) = -\sqrt[3]{-1(-1+3)^2} = \sqrt[3]{4};$$

$$y(-3) = 0.$$

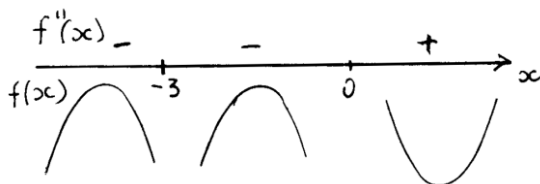
На интервалах $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ функция убывает; на интервале $(-3, -1)$ функция возрастает.

8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба, для этого находим вторую производную:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}} \right)' = - \left((x+1)x^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= - \left((x+1)'x^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}} + (x+1) \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)' (x+3)^{-\frac{1}{3}} + (x+1)x^{-\frac{2}{3}} \left((x+3)^{-\frac{1}{3}} \right)' \right) = \\ &= - \left(x^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x+1)x^{-\frac{5}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x+1)x^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{4}{3}} \right) = \\ &= - \left(\frac{1^{3x(x+3)}}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}} - \frac{2(x+1)^{(x+3)}}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}} - \frac{x+1^{3x}}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} \right) = \\ &= - \frac{3x(x+3) - 2(x+1)(x+3) - x(x+1)}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= - \frac{3x^2 + 9x - 2x^2 - 2x - 6x - 6 - x^2 - x}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = - \frac{-6}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Найдем точки, в которых вторая производная не существует или равна 0.

$x = 0$, $x = -3$ – в этих точках вторая производная не существует. Отметим их на числовой прямой и определим знак получившихся интервалов



На интервалах $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ график функции выпуклый вверх; на интервале $(0, \infty)$ – выпуклый вниз.

В точках, где $x = 0$, $x = 3$ – перегиб функции.

$y(0) = y(-3) = 0$; $(0, 0)$ и $(3, 0)$ – точки перегиба.

9) Построим график функции (рис. 2.18).

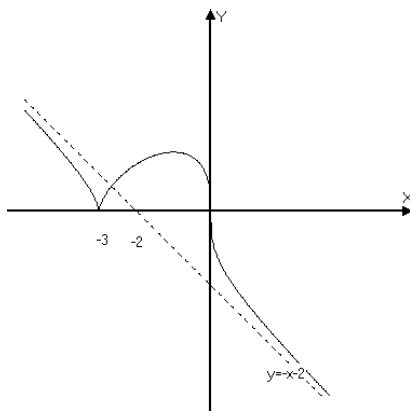


Рис. 2.18

$$\text{г) } y = \frac{e^{2(x+3)}}{x+3}.$$

1) О.Д.З.: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{e^{2(-x+3)}}{-x+3} \neq \pm y(x).$$

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

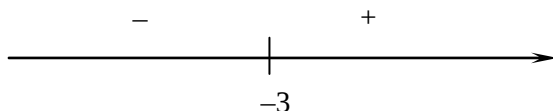
При $x = 0$ $y = \frac{e^6}{3}$;

$\left(0, \frac{e^6}{3}\right)$ – точка пересечения с осью OY .

$y \neq 0 \Rightarrow$ график функции не пересекает ось OX .

4) Найдем промежутки постоянства знака значения функции.

На числовой прямой отметим ноль знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов



5) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{2(x+3)}}{x+3} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$$

$x = -3$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Наклонные асимптоты находим по формуле $y = kx + b$.

Правая и левая наклонные асимптоты будут различны.

Правая наклонная асимптота:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2(x+3)}}{x(x+3)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \frac{\text{По правилу}}{\text{Лопиталя}} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2(x+3)})'}{(x^2 + 3x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2(x+3)}(2(x+3))'}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2(x+3)}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2(x+3)}}{x} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2(x+3)})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2(x+3)}}{1} = \infty \Rightarrow \text{правой наклонной} \end{aligned}$$

асимптоты нет.

Левая наклонная асимптота:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2(x+3)}}{x(x+3)} = \left(\frac{0}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2(x+3)}x(x+3)} = (1/\infty) = 0; \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2(x+3)}}{(x+3)} = \left(\frac{0}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2(x+3)}(x+3)} = (1/\infty) = 0; \end{aligned}$$

$y = 0$ – уравнение левой наклонной асимптоты.

6) Строим эскиз (рис. 2.19).

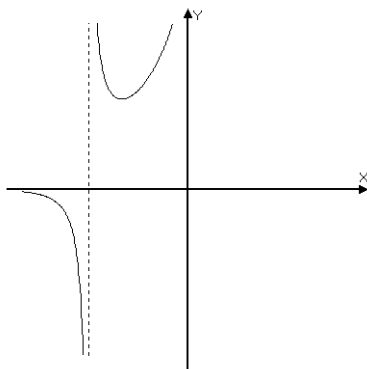


Рис. 2.19

Уточним график функции с помощью первой и второй производной.

7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции, для этого найдем первую производную.

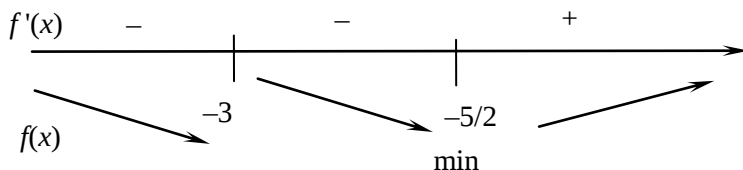
$$y' = \left(\frac{e^{2(x+3)}}{x+3} \right)' = \frac{(e^{2(x+3)})'(x+3) - e^{2(x+3)}(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2e^{2(x+3)}(x+3) - e^{2(x+3)} \cdot 1}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{e^{2(x+3)}(2(x+3) - 1)}{(x+3)^2} = \frac{e^{2(x+3)}(2x + 6 - 1)}{(x+3)^2} = \frac{e^{2(x+3)}(2x + 5)}{(x+3)^2}.$$

Найдем точки, в которых производная равна 0:

$$(2x + 5) = 0 \Rightarrow x = -5/2$$

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = -5/2$ – минимум функции;

$$y(-5/2) = \frac{e^{2(-5/2+3)}}{-5/2+3} = \frac{e}{1/2} = 2e.$$

На интервалах $(-\infty, -3) \cup \left(-3, -\frac{5}{2}\right)$ функция убывает, на интервале $\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$ функция возрастает.

8) Найдем промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба, для этого найдем вторую производную.

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{e^{2(x+3)}(2x+5)}{(x+3)^2} \right)' = \frac{(e^{2(x+3)}(2x+5))'(x+3)^2 - e^{2(x+3)}(2x+5)((x+3)^2)'}{(x+3)^4} = \\ &= \frac{\left((e^{2(x+3)})'(2x+5) + e^{2(x+3)}(2x+5)' \right)(x+3)^2 - e^{2(x+3)}(2x+5)2(x+3)(x+3)'}{(x+3)^4} = \\ &= \frac{(2e^{2(x+3)}(2x+5) + 2e^{2(x+3)})(x+3)^2 - e^{2(x+3)}(2x+5)2(x+3)}{(x+3)^4} = \\ &= \frac{2e^{2(x+3)}(x+3)((2x+5+1)(x+3) - (2x+5))}{(x+3)^4} = \\ &= \frac{2e^{2(x+3)}(2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x - 5)}{(x+3)^3} = \frac{2e^{2(x+3)}(2x^2 + 10x + 13)}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

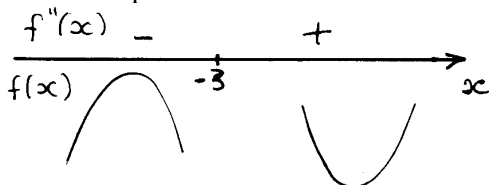
Найдем точки, в которых вторая производная равна 0:

$e^{2(x+3)} > 0$ для любого x , следовательно находим

$$2x^2 + 10x + 13 = 0;$$

$D = 100 - 8 \cdot 13 = 100 - 104 < 0$ – корней нет $\Rightarrow$ числитель не равен нулю ни при каких x .

На числовой прямой отметим ноль знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



На интервале $(-\infty, -3)$ график функции выпуклый вверх, на интервале $(-3, \infty)$ – график выпуклый вниз.

9) Строим график функции (рис. 2.20).

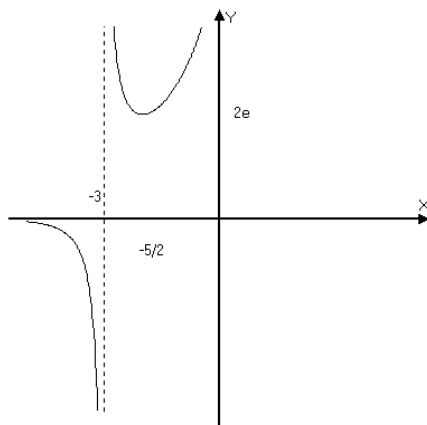


Рис. 2.20

$$д) y = \frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

1) О.Д.З.: $x^3 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{-(-x)^2}{2\sqrt[3]{(-x)^3 - 1}} = \frac{-x^2}{2\sqrt[3]{-x^3 - 1}} \neq \pm y(x).$$

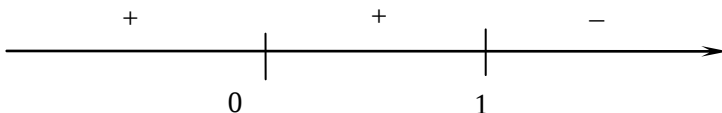
3) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $y = 0$;

$(0, 0)$ – точка пересечения с осями координат.

4) Найдем промежутки постоянства знака значения функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя функции и определим знаки получившихся интервалов:



5) Найдем асимптоты функции.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3 - 1}} = \infty \Rightarrow x = 1 \quad - \quad \text{уравнение вертикальной}$$

асимптоты.

Наклонную асимптоту найдем по формуле:

$$y = kx + b,$$

$$\text{где } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3-1} \cdot (x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2\sqrt[3]{x^3-1}} =$$

$$= \left| \frac{\text{Разделим числитель}}{\text{и знаменатель на } x} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}} = -1/2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3-1}} + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1}}{2\sqrt[3]{x^3-1}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt[3]{x^3-1} - x)}{2\sqrt[3]{x^3-1}} = \left| \frac{\text{Домножим числитель и}}{\text{знаменатель на}} \right| =$$

$$\left| \frac{\text{сопряженные выражения}}{\text{сопряженные выражения}} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt[3]{x^3-1} - x) \left((\sqrt[3]{x^3-1})^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2 \right)}{2\sqrt[3]{x^3-1} \left((\sqrt[3]{x^3-1})^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^3 - 1 - x^3)}{2\sqrt[3]{x^3-1} \left((\sqrt[3]{x^3-1})^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2\sqrt[3]{x^3-1} \left((\sqrt[3]{x^3-1})^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2 \right)} = \left| \frac{\text{Разделим числитель}}{\text{и знаменатель на } x} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} \left(\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} + 1 \right)} = (-1/\infty) = 0;$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \text{уравнение наклонной асимптоты.}$$

6) Строим эскиз (рис. 2.21).

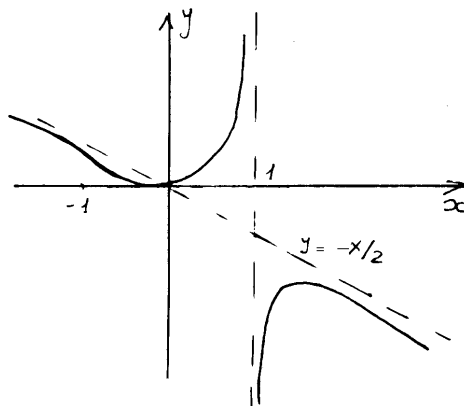


Рис. 2.21

Уточним график функции с помощью первой и второй производной.

7) Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции, для этого находим первую производную.

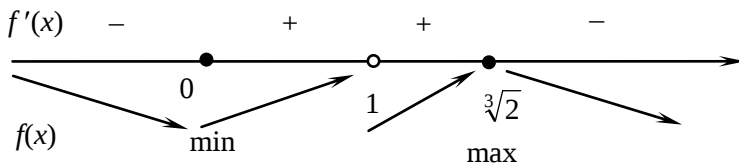
$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{-x^2}{2\sqrt[3]{x^3-1}} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{(x^2)' \sqrt[3]{x^3-1} - x^2 (\sqrt[3]{x^3-1})'}{(\sqrt[3]{x^3-1})^2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2x\sqrt[3]{x^3-1} - x^2 \frac{1(x^3-1)'}{3(\sqrt[3]{x^3-1})^2}}{(\sqrt[3]{x^3-1})^2} \right) = -\frac{2x(x^3-1) - x^4}{2(\sqrt[3]{x^3-1})^2 (\sqrt[3]{x^3-1})^2} = \\
 &= -\frac{x(2x^3-2-x^3)}{2(\sqrt[3]{x^3-1})^4} = -\frac{x(x^3-2)}{2\sqrt[3]{(x^3-1)^4}}.
 \end{aligned}$$

Найдем точки, в которых производная равна 0 или не существует:

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2};$$

$x \neq 1$ — ноль знаменателя.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя первой производной и определим знаки получившихся интервалов:



В точке, где $x = 0$ – минимум функции,

$$y(0) = 0;$$

В точке, где $x = \sqrt[3]{2}$ – максимум функции,

$$y(\sqrt[3]{2}) = \frac{-\sqrt[3]{4}}{2}.$$

На интервалах $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$ функция убывает, на интервале $(0, 1) \cup (1, \sqrt[3]{2})$ – функция возрастает.

8) Найдём промежутки выпуклости и точки перегиба, для этого найдём вторую производную функции.

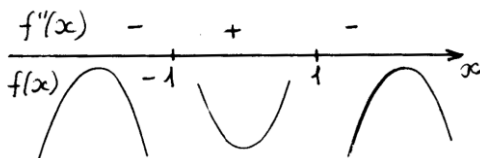
$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{x(x^3-2)}{2(\sqrt[3]{x^3-1})^4} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^4-2x}{(\sqrt[3]{x^3-1})^4} \right)' = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(x^4-2x)'(\sqrt[3]{x^3-1})^4 - (x^4-2x)(\sqrt[3]{x^3-1})'^4}{(\sqrt[3]{x^3-1})^8} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(4x^3-2)(\sqrt[3]{x^3-1})^4 - (x^4-2x) \cdot \frac{4}{3} \cdot (x^3-1)^{\frac{1}{3}} 3x^2}{(\sqrt[3]{x^3-1})^8} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(4x^3-2)(x^3-1)^{\frac{4}{3}} - 4(x^4-2x)(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^2}{(\sqrt[3]{x^3-1})^8} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(x^3-1)^{\frac{1}{3}} ((4x^3-2)(x^3-1) - 4(x^4-2x)x^2)}{(\sqrt[3]{x^3-1})^8} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2((2x^3 - 1)(x^3 - 1) - 2(x^4 - 2x)x^2)}{(\sqrt[3]{x^3 - 1})^7} =$$

$$= -\frac{2x^6 - x^3 - 2x^3 + 1 - 2x^6 + 4x^3}{(\sqrt[3]{x^3 - 1})^7} = -\frac{x^3 + 1}{(\sqrt[3]{x^3 - 1})^7}.$$

Найдем точки, в которых вторая производная равна 0:
 $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя второй производной и определим знаки получившихся интервалов.



На интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ график функции выпуклый вверх, на интервале $(-1, 1)$ – график функции выпуклый вниз.

В точке, где $x = -1$ – перегиб функции,

$$y(-1) = \frac{-1}{2\sqrt[3]{-2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}; \left(-1, \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) - \text{точка перегиба}.$$

9) Строим график (рис. 2.22).

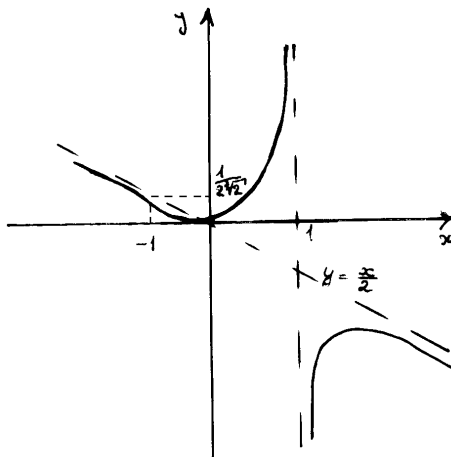


Рис. 2.22

Задача 5. Разложить многочлен $3x^4 - x^3 + 8x^2 + x - 1$ по формуле Тейлора в точке $x_0 = 2$.

Решение

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

R_n ,

где R_n – остаточный член.

Найдем производные функции.

$$f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 16x + 1;$$

$$f''(x) = 36x^2 - 6x + 16;$$

$$f'''(x) = 72x - 6;$$

$$f^{(IV)}(x) = 72;$$

$$f^{(V)}(x) = 0;$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ при } n \geq 5.$$

Найдем значения функции и производных в точке $x_0 = 2$.

$$f(x_0) = f(2) = 3 \cdot 2^4 - 2^3 + 8 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 48 - 8 + 32 + 1 = 73;$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 12 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 1 = 12 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 32 + 1 = 96 - 12 + 33 = 117;$$

$$f''(x_0) = f''(2) = 36 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 16 = 144 - 12 + 16 = 148;$$

$$f'''(x_0) = f'''(2) = 72 \cdot 2 - 6 = 144 - 6 = 138;$$

$$f^{(IV)}(x_0) = f^{(IV)}(2) = 72.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - x^3 + 8x^2 + x - 1 = 73 + 117(x-2) + \frac{148}{2}(x-2)^2 + \\ &+ \frac{138}{3!}(x-2)^3 + \frac{72}{4!}(x-2)^4 = 73 + 117(x-2) + 74(x-2)^2 + 23(x-2)^3 + \\ &+ 3(x-2)^4. \end{aligned}$$

Типовой вариант контрольной работы №2

ТЕМА: дифференцирование функций, вычисление пределов с помощью правила Лопиталя, полное исследование функции и построение их графиков.

1. Найти первые производные функций:

$$1) y = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x\sqrt[5]{x}} \right) \cdot \sqrt{x} \quad \text{в точке } x_0 = 1;$$

$$2) y = (3 + 2x^2)^4 + \ln 2 \quad \text{в точке } x_0 = 0;$$

$$3) y = \sqrt[3]{1 - e^x} + \log_2 \left(\frac{x^2 - 1}{4x} \right);$$

$$4) y = x^{\arcsin x}.$$

2. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \cdot \sin x}{x - \sin x}.$$

3. Провести полное исследование следующих функций и построить их графики:

$$1) y = \frac{e^{-x-2}}{x+2};$$

$$2) y = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$ функцию $y = \ln(8 + 2x - x^2)$.

$$5. \text{Вычислить предел: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + x + x^2) - 2x - x^2}{2 \sin x - 2x + x^3}.$$