ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №4.

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе №5, Ваш номер в списке – 14. Тогда по табл.1 имеем:

5	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	B	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
14	5	1	3	–6	6	2	9	3

Таблица 1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты							
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
2	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*G*
3	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*F*	*A*	*G*
4	*B*	*A*	*C*	*K*	*D*	*F*	*M*	*G*
5	*C*	*D*	*A*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
6	*D*	*K*	*B*	*A*	*M*	*C*	*F*	*G*
7	*K*	*M*	*C*	*F*	*A*	*B*	*D*	*G*
8	*M*	*F*	*D*	*A*	*C*	*K*	*B*	*G*
9	*F*	*M*	*D*	*K*	*C*	*B*	*A*	*G*
10	*A*	*D*	*C*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
11	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
12	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*G*
13	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*
14	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*G*
15	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*G*
16	*F*	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*A*	*G*
17	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*

Таблица 2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
							G
1	–2	1	4	5	3	–6	7	2
2	3	–2	1	–5	7	2	4	3
3	5	–3	4	1	2	–8	6	1
4	4	3	–2	1	6	3	5	2
5	8	–9	4	2	1	6	–2	1
6	3	4	–5	1	–3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	–9	1	3
8	5	1	3	–2	6	–8	–6	1
9	1	4	–3	2	9	–6	7	2
10	5	7	3	–6	1	–2	4	1
11	1	3	–5	2	6	4	9	2
12	9	–4	–1	–8	–3	6	5	1
13	2	–3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	–6	6	2	9	3
15	–4	–1	–8	9	–5	2	7	1
16	2	–3	3	1	–6	5	–1	2
17	–5	–4	2	4	–1	6	7	1
18	3	1	5	6	–4	2	9	2
19	2	4	–3	–5	–6	–5	8	1
20	1	–2	–7	8	3	5	–4	2
21	–8	–3	–1	6	4	1	–5	3
22	–2	–4	5	3	–6	7	6	1
23	1	9	–6	4	–2	–3	–1	2
24	3	–5	–1	3	6	–4	2	1
25	–1	–3	–6	4	1	–5	–4	2
26	9	–4	3	–5	2	1	6	2
27	7	6	–1	2	–3	8	–5	1
28	4	–1	5	–6	–4	7	3	3
29	–1	9	–3	–5	6	–8	2	1
30	2	1	9	3	–4	–1	6	2

Задача 1. Даны матрицы:

$$I=\begin{pmatrix} A & B & C \\ 2A & F & K \\ -A & -B & M \end{pmatrix};\ J=\begin{pmatrix} -C & B & -D \\ M & K & M \\ A & F & -B \end{pmatrix};$$

$$H=\begin{pmatrix} C & -B & F \\ D & A & K \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $FI + MJ + E$, где F, N – числа из условия, E – единичная матрица;
2) $IJ - JI$;
3) HI;
4) J^{-1};
5) $JX = I$ (если $\det J = 0$, то $IX = J$);
6) $XJ = I$ (если $\det J = 0$, то $XI = J$).

Задача 2. Решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = K, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = G, \\ 3Ax_1 + (B+K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = D, \\ -3Ax_1 - (B+K)x_2 - (F+C)x_3 - (M+D)x_4 = A; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = 0, \\ 3Ax_1 + (B+K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = 0, \\ -3Ax_1 - (B+K)x_2 - (F+C)x_3 - (M+D)x_4 = 0; \end{cases}$$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора, а так же матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов (вариант зависит от G):

– если $G = 1$, то $A=\begin{pmatrix} A & F & 0 \\ F & A & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$;

$$– \text{если } G = 2, \text{ то } A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & D & K \\ 0 & K & M \end{pmatrix};$$

$$– \text{если } G = 3, \text{ то } A = \begin{pmatrix} C & K & 0 \\ K & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Пример выполнения домашнего задания №4

Номер по п/п	Коэффициенты							
	A	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
Произвольный номер	–3	1	4	9	–5	3	2	2

Задача 1. Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix};\ J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Найти $FI + MJ + E$.

После подстановки коэффициентов получаем:

$2I + 3J + E =$

$$= 2\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -12 & 4 & -10 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 3 & -27 \\ 9 & -15 & 9 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6-12 & 2+3 & 8-27 \\ -12+9 & 4-15 & -10+9 \\ 6-9 & -2+6 & 6-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 5 & -19 \\ -3 & -11 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-17} & \mathbf{5} & \mathbf{-19} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-10} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

$$2)\ IJ - JI = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3(-4)+3+4(-3) & -3+1(-5)+4\cdot 2 & -3(-9)+1\cdot 3+4(-1) \\ -6(-4)+2\cdot 3-5(-3) & -6+2(-5)-5\cdot 2 & -6(-9)+2\cdot 3-5(-1) \\ 3(-4)-1\cdot 3+3(-3) & 3-1(-5)+3\cdot 2 & 3(-9)-1\cdot 3+3(-1) \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -4(-3)+1(-6)-9\cdot 3 & -4+1\cdot 2-9(-1) & -4\cdot 4+1(-5)-9\cdot 3 \\ 3(-3)-5(-6)+3\cdot 3 & 3-5\cdot 2+3(-1) & 3\cdot 4-5(-5)+3\cdot 3 \\ -3(-3)+2(-6)-1\cdot 3 & -3+2\cdot 2+(-1)(-1) & -3\cdot 4+2(-5)-1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+3-12 & -3-5+8 & 27+3-4 \\ 24+6+15 & -6-10-10 & 54+6+5 \\ -12-3-9 & 3+5+6 & -27-3-3 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 12-6-27 & -4+2+9 & -16-5-27 \\ -9+30+9 & 3-10-3 & 12+25+9 \\ 9-12-3 & -3+4+1 & -12-10-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 26 \\ 45 & -26 & 65 \\ -24 & 14 & -33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -21 & 7 & -48 \\ 30 & -10 & 46 \\ -6 & 2 & -25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+21 & 0-7 & 26+48 \\ 45-30 & -26+10 & 65-46 \\ -24+6 & 14-2 & -33+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -7 & 74 \\ 15 & -16 & 19 \\ -18 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ H\cdot I =$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 9 & -3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ -6 & 2 & -5\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4(-3)-1(-6)+2\cdot 3 & 4-1\cdot 2+2(-1) & 4\cdot 4-1(-5)+2\cdot 3\\ 9(-3)-3(-6)-5\cdot 3 & 9-3\cdot 2-5(-1) & 9\cdot 4-3(-5)-5\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-12+6+6 & 4-2-2 & 16+5+6\\ -27+18-15 & 9-6+5 & 36+15-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 27\\ -24 & 8 & 36\end{pmatrix}.$$

4) J^{-1}.

$$J=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -9\\ 3 & -5 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\det J=-4\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}3 & -5\\ -3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-4(5-6)-(-3+9)-9(6-15)=4-6+81=79.$$

$\det J\neq 0\Rightarrow J^{-1}$ существует

$$J^{-1}=\frac{1}{\det J}\left(J^{\vee}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Найдем $J^{\vee}=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12} & J_{13}\\ J_{21} & J_{22} & J_{23}\\ J_{31} & J_{32} & J_{33}\end{pmatrix}$, где J_{ij} – это определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы J, и взятый со знаком «+», если $i+j$ – четное, и со знаком «–» если $i+j$ – нечетное. Найдем компоненты матрицы $J^{\vee}$:

$$J_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5-6=-1;$$

$$J_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-(3+9)=-6;$$

$$J_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -9\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1+18)=-17;$$

$$J_{22}=\begin{vmatrix}-4 & -9\\ -3 & -1\end{vmatrix}=4-27=-23;$$

$$J_{31}=\begin{vmatrix}1 & -9\\ -5 & 3\end{vmatrix}=3-45=-42;$$

$$J_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & -9\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-(-12+27)=-15;$$

$$J_{13}=\begin{vmatrix}3 & -5\\ -3 & 2\end{vmatrix}=6-15=-9;$$

$$J_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-(-8+3)=5;$$

$$J_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=20-3=17.$$

$$J^{\vee}=\begin{pmatrix}-1 & -6 & -9\\ -17 & -23 & 5\\ -42 & -15 & 17\end{pmatrix}\Rightarrow\left(J^{\vee}\right)^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}-1 & -17 & -42\\ -6 & -23 & -15\\ -9 & 5 & 17\end{pmatrix}.$$

$$J^{-1}=\frac{1}{79}\begin{pmatrix}-1 & -17 & -42\\ -6 & -23 & -15\\ -9 & 5 & 17\end{pmatrix}.$$

Проверка

$$J\cdot J^{-1}=\frac{1}{79}\begin{pmatrix}-4 & 1 & -9\\ 3 & -5 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -17 & -42\\ -6 & -23 & -15\\ -9 & 5 & 17\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix}-4(-1)+1(-6)-9(-9) & -4(-17)-23-9\cdot 5 & -4(-42)-15-9\cdot 17\\ 3(-1)-5(-6)+3(-9) & 3(-17)-5(-23)+3\cdot 5 & 3(-42)-5(-15)+3\cdot 17\\ -3(-1)+2(-6)-1(-9) & -3(-17)+2(-23)-1\cdot 5 & -3(-42)+2(-15)-17\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix}4-6+81 & 68-23-45 & 168-15-153\\ -3+30-27 & -51+115+15 & -126+75+51\\ 3-12+9 & 51-46-5 & 126-30-17\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix}79 & 0 & 0\\ 0 & 79 & 0\\ 0 & 0 & 79\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Матрица J^{-1} найдена верно.

5) Решить матричное уравнение: $JX = I$.

Домножим слева на J^{-1}:

$J^{-1}JX = J^{-1}I$; $X = J^{-1}I$;

$$J^{-1} = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$J^{-1}I = \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1(-3)-17(-6)-42\cdot 3 & -1+(-17)\cdot 2+42 & -4-17(-5)-42\cdot 3 \\ -6(-3)-23(-6)-15\cdot 3 & -6-23\cdot 2+15 & -6\cdot 4-23(-5)-15\cdot 3 \\ -9(-3)+5(-6)+17\cdot 3 & -9+5\cdot 2-17 & -9\cdot 4+5(-5)+17\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 3+102-126 & -1-34+42 & -4+85-126 \\ 18+138-45 & -6-46+15 & -24+115-45 \\ 27-30+51 & -9+10-17 & -36-25+51 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} -21 & 7 & -45 \\ 111 & -37 & 46 \\ 48 & -16 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/79 & 7/79 & -45/79 \\ 111/79 & -37/79 & 46/79 \\ 48/79 & -16/79 & -10/79 \end{pmatrix}.$$

6) Решить матричное уравнение $XJ = I$.

Домножим справа на J^{-1}.

$XJJ^{-1} = IJ^{-1}$;

$X = I\,J^{-1}$;

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{79}\begin{pmatrix} 3-6+4(-9) & -3(-17)-23+4\cdot 5 & -3(-42)-15+4\cdot 17 \\ -6(-1)+2(-6)-5(-9) & -6(-17)+2(-23)-5\cdot 5 & -6(-42)-15\cdot 2-5\cdot 17 \\ -3+6-9\cdot 3 & 3(-17)+23+3\cdot 5 & 3(-42)+15+17\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -3-36 & 51-23+20 & 126-15+68 \\ 6-12+45 & 102-46-25 & 252-30-85 \\ 3-27 & -51+23+15 & -126+15+51 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{79}\begin{pmatrix} -39 & 48 & 179 \\ 39 & 31 & 137 \\ -24 & -13 & -60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -39/79 & 48/79 & 179/79 \\ 39/79 & 31/79 & 137/79 \\ -24/79 & -13/79 & -60/79 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Решить системы линейных уравнений.

$$1)\quad \begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3+9x_4=-5, \\ -6x_1-5x_2++3x_3-3x_4=2, \\ -9x_1-4x_2+2x_3-3x_4=9, \\ 9x_1+4x_2-6x_3-12x_4=-3; \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 9 \\ 9 & 4 & -6 & 12 & -3 \end{array}\right)$$; из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3; к четвертой строке прибавим вторую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & -7 & -10 & -30 & 24 \\ 0 & 7 & 6 & 15 & 18 \end{array}\right)$$; из третьей строки вычтем вторую, к четвертой строке прибавим вторую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Последняя строка равносильна следующему уравнению:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=-6.$$

Следовательно, система несовместна, т. е. данная система решений не имеет.

2) $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0, \\ -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 0; \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 0 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{в предыдущем} \\ \text{примеребыло} \\ \text{получено} \end{array}\right| = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная, неопределенная.

$x_1,$ x_2, x_3 – базисные неизвестные; x_4 – свободное.

Выразим базисные неизвестные $x_1,$ x_2, x_3 через x_4.

Из третьей строки следует:

$$-4x_3 - 15x_4 = 0 \Rightarrow 4x_3 = -15x_4 \Rightarrow x_3 = -\frac{15}{4}x_4.$$

Из второй строки:

$$-7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 - 6(-\frac{15}{4}x_4) - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 + \frac{45}{2}x_4 = 15x_4;$$

$$7x_2 = \frac{45}{2}x_4 - 15x_4 = \frac{15}{2}x_4;$$

$$x_2 = \frac{15}{14}x_4.$$

Из первой строки: $-3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0$;

$$-3x_1 + \frac{15}{14}x_4 + 4\left(-\frac{15}{4}x_4\right) + 9x_4 = 0;$$

$$3x_1 = \frac{15}{14}x_4 - 15x_4 + 9x_4 = \frac{15}{14}x_4 - 6x_4 = \frac{15-84}{14}x_4 = -\frac{69}{14}x_4;$$

$$x_1 = -\frac{23}{14}x_4.$$

Пусть $x_4 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{23}{14}c \\ x_2 = \dfrac{15}{14}c \\ x_3 = \dfrac{-15}{4}c \\ x_4 = c. \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\dfrac{23}{14} \\ \dfrac{15}{14} \\ -\dfrac{15}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, а также матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$G = 2;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 \\ -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)((9-\lambda)^2 - 25) = 0;$$

$$1-\lambda = 0 \text{ или } (9-\lambda)^2 - 25 = 0;$$

$\lambda = 1.$ $\qquad$ $(9-\lambda)^2 = 25;$

$9-\lambda = \pm 5;$

$9-\lambda = 5, \lambda = 4$ или $9-\lambda = -5, \lambda = 14.$

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 14}$ – собственные значения линейного оператора.

2) Найдем соответствующие им собственные векторы. Для этого решим следующие однородные системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) $\lambda = 1$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right)$; поменяем первую и третью строки местами –

$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; поменяем первый и третий столбцы местами –

$\left(\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; разделим первую строку на 8 –

$\left(\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ 1 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; ко второй строке прибавим первую, умноженную на 5 –

$\left(\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ 1 & -5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 39/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; разделим вторую строку на $\frac{39}{8}$ –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ 1 & -5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right);$$ из первой строки вычтем вторую, умноженную на $\left(-\frac{5}{8}\right)$ –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_3, x_2 – базисные неизвестные, x_1 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_1:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 1} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы определяются с точностью до числового множителя, поэтому возьмем $c = 1$.

$\bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$.

б) $\lambda = 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9-4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 9-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{к третьей строке} \\ \text{прибавим} \\ \text{вторую} \end{array}\right| =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{l} \text{первую строку} \\ \text{разделим на } (-3); \\ \text{вторую разделим на } 5 \end{array}\right| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $c = 1 \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ = 4.

б) λ = 14.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9-14 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 9-14 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{первую строку разделим на } (-13) \\ \text{из третьей строки вычтем вторую} \\ \text{вторую строку разделим на } (-5) \end{array} \right| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 3} = c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $c = 1 \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ = 14.

Итак,

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \overline{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 4, \overline{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 14, \overline{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Проверка

а) $\lambda = 1$; $\overline{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x} = \lambda\overline{x} \Rightarrow A\overline{x}_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}$; подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{x}_{\lambda 1}.$$

б) $\lambda = 4$; $\overline{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x}_{\lambda 2} = 4\overline{x}_{\lambda 2}$, подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9-5 \\ -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\overline{x}_{\lambda 2}$$

в) $\lambda = 14$; $\overline{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\overline{x}_{\lambda 3} = 14\overline{x}_{\lambda 3}$, подставим значения A и $\overline{x}_{\lambda 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9-15 \\ 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 14\overline{x}_{\lambda 3}.$$

3) Проверим ортогональность собственных векторов.

$(\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 2}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$

$(\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 3}) = 1 \cdot 0 + 0(-1) + 0 \cdot 1 = 0.$

$(\overline{x}_{\lambda 3}, \overline{x}_{\lambda 2}) = 0 \cdot 0 + 1(-1) + 1 \cdot 1 = 0.$

Пусть $\mathbb{B}' = \{\overline{x}_{\lambda 1}, \overline{x}_{\lambda 2}, \overline{x}_{\lambda 3}\}$ – ортогональный базис.

Найдем матрицу линейного оператора в этом базисе. Так как оператор самосопряженный, то его матрица в базисе из собственных векторов должна быть диагональной и на диагонали должны стоять соответствующие собственные значения.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Проверим это:

$A' = T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} A T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$ – формула преобразования матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathbb{B}$ к базису $\mathbb{B}'$.

$$\begin{cases} \overline{x}_{\lambda_1} = \overline{e}_1 \\ \overline{x}_{\lambda_2} = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{x}_{\lambda_2} = -\overline{e}_2 + \overline{e}_3. \end{cases}$$

Столбцами матрицы $T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$ являются соответствующие коэффициенты базисных векторов

$$T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$:

$$\det T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+1) = 2 \neq 0 .$$

$$T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \frac{1}{\det T_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}} \left(T^{\vee}\right)^{\mathrm{T}} .$$

Найдем компоненты матрицы $T^{\vee}$.

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,;\; T_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,;\; T_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$T_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;\; T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,;\; T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$T_{13}=\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0;\ T_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1;\ T_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

$$T^{\vee}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix};\ \left(T^{\vee}\right)^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}, \text{тогда}$$

$$A'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&9&-5\\0&-5&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&9-5&-5+9\\0&-9-5&5+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&4\\0&-14&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4+4&-4+4\\0&-14+14&14+14\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&8&0\\0&0&28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&14\end{pmatrix}.$$

Получили, что матрица линейного самосопряженного оператора в базисе из собственных векторов действительно диагональна и на диагонали стоят собственные значения.

$$\boldsymbol{A'}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{14}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\lambda=1,\ \bar{x}_{\lambda 1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \lambda=4,\ \bar{x}_{\lambda 2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\ \lambda=14,\ \bar{x}_{\lambda 3}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.}$$