ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №4

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе №5, Ваш номер в списке – 14. Тогда по табл.1 имеем:

5	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	B	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
14	5	1	3	–6	6	2	9	3

Таблица 1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты							
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
2	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*G*
3	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*F*	*A*	*G*
4	*B*	*A*	*C*	*K*	*D*	*F*	*M*	*G*
5	*C*	*D*	*A*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
6	*D*	*K*	*B*	*A*	*M*	*C*	*F*	*G*
7	*K*	*M*	*C*	*F*	*A*	*B*	*D*	*G*
8	*M*	*F*	*D*	*A*	*C*	*K*	*B*	*G*
9	*F*	*M*	*D*	*K*	*C*	*B*	*A*	*G*
10	*A*	*D*	*C*	*M*	*F*	*K*	*B*	*G*
11	*B*	*D*	*F*	*K*	*M*	*A*	*C*	*G*
12	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*G*
13	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*
14	*K*	*F*	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*G*
15	*M*	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*G*
16	*F*	*M*	*K*	*D*	*C*	*B*	*A*	*G*
17	*D*	*K*	*M*	*F*	*A*	*B*	*C*	*G*

Таблица 2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты							
	M	*K*	*D*	*C*	*B*	*F*	*A*	*G*
1	–2	1	4	5	3	–6	7	2
2	3	–2	1	–5	7	2	4	3
3	5	–3	4	1	2	–8	6	1
4	4	3	–2	1	6	3	5	2
5	8	–9	4	2	1	6	–2	1
6	3	4	–5	1	–3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	–9	1	3
8	5	1	3	–2	6	–8	–6	1
9	1	4	–3	2	9	–6	7	2
10	5	7	3	–6	1	–2	4	1
11	1	3	–5	2	6	4	9	2
12	9	–4	–1	–8	–3	6	5	1
13	2	–3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	–6	6	2	9	3
15	–4	–1	–8	9	–5	2	7	1
16	2	–3	3	1	–6	5	–1	2
17	–5	–4	2	4	–1	6	7	1
18	3	1	5	6	–4	2	9	2
19	2	4	–3	–5	–6	–5	8	1
20	1	–2	–7	8	3	5	–4	2
21	–8	–3	–1	6	4	1	–5	3
22	–2	–4	5	3	–6	7	6	1
23	1	9	–6	4	–2	–3	–1	2
24	3	–5	–1	3	6	–4	2	1
25	–1	–3	–6	4	1	–5	–4	2
26	9	–4	3	–5	2	1	6	2
27	7	6	–1	2	–3	8	–5	1
28	4	–1	5	–6	–4	7	3	3
29	–1	9	–3	–5	6	–8	2	1
30	2	1	9	3	–4	–1	6	2

Задача 1.

Дано: $|\bar{a}| = |F|$, $|\bar{b}| = |M|$, $|\bar{c}| = |A|$, $\left(\widehat{\bar{a}\bar{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\widehat{\bar{b}\bar{c}}\right) = \frac{\pi}{4}$; $\left(\widehat{\bar{a}\bar{c}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Найти: 1) $|D\bar{a} + C\bar{b}|$;

2) $\text{пр}_{M\bar{c}+K\bar{a}}\left(D\bar{a} + C\bar{b}\right)$;

3) Длину диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $C\bar{a} + B\bar{b}$ и $K\bar{b} + M\bar{a}$;

4) Площадь этого параллелограмма.

Задача 2. Дано: $\bar{a}$ (A, B, C); $\bar{b}$ (F, M, K); $\bar{c}$ (B, D, K).

Найти: 1) координаты вектора $\bar{d} = F\bar{a} + M\bar{b}$;

2) $(A\bar{a} + B\bar{c}, K\bar{b} + M\bar{d})$;

3) $[A\bar{a} + B\bar{c}, K\bar{b} + M\bar{d}]$;

4) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$;

Задача 3. Дано: точки $Q(A, B)$, $L(C, D)$, $P(C, F)$.

Найти: 1) проверить, не лежат ли точки на одной прямой;

2) уравнение прямой QL;

3) уравнение медианы, проведенной из вершины Q в треугольнике QLP;

4) уравнение высоты, проведенной из вершины Q;

5) координаты точки пересечения медиан в ΔQPL;

6) угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q;

7) расстояние о точки P до прямой QL.

Задача 4. Определить тип кривой, приведенной ниже, найти ее основные параметры, сделать чертеж в данной ДПСК:

1) $F^2x^2 + M^2y^2 - 2F^2Bx - 2M^2Ay + M^2A^2 + F^2B^2 = F^2M^2$;

2) $M^2x^2 - B^2y^2 - 2M^2Fx - 2KB^2y + M^2B^2 + M^2F^2 - B^2K^2 = 0$;

3) $Mx^2 + Cx + By + D = 0$;

4) $Ay^2 + Dx + Ky + F = 0$.

Пример выполнения домашнего задания №4

Номер по п/п	Коэффициенты							
	A	*B*	*C*	*D*	*K*	*M*	*F*	*G*
Произвольный номер	–3	1	4	9	–5	3	2	2

Задача 1.

Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $|\bar{c}| = 3$,

$$\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \left(\bar{b}\,\hat{}\,\bar{c}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{c}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Найти:

1) $\left|9\bar{a} + 4\bar{b}\right|$

2) $\text{пр}_{3\bar{c}-5\bar{a}}\left(9\bar{a} + 4\bar{b}\right)$

3) Длины диагоналей параллелограмма, построен ного по векторам $4\bar{a} + \bar{b}$ и $-5\bar{b} + 3\bar{a}$

4) Площадь этого параллелограмма

Решение

1) $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$ $\qquad$ $\left(\bar{a},\bar{b}\right) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$

$$\left|9\bar{a} + 4\bar{b}\right| = \sqrt{\left(9\bar{a} + 4\bar{b}, 9\bar{a} + 4\bar{b}\right)} =$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуе мся свойствами скалярного происзведе ния} \\ (\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a}) \\ (\bar{a} + \bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})\end{array}\right|$$

$$= \sqrt{\left(9\bar{a},9\bar{a}\right) + \left(4\bar{b},9\bar{a}\right) + \left(9\bar{a},4\bar{b}\right) + \left(4\bar{b},4\bar{b}\right)} =$$

$$\sqrt{81\left|\overline{a}\right|^2+72\left(\overline{a},\overline{b}\right)+16\left|\overline{b}\right|^2}=$$

$$\sqrt{81\cdot 2\cdot 2+72\cdot 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3}+16\cdot 5^2}=\sqrt{324+720\cdot\frac{1}{2}+400}=$$

$$\sqrt{324+360+400}=\sqrt{1084}$$

Ответ: $\left|9\overline{a}+4\overline{b}\right|=\sqrt{1084}$

2)

$$пр_{3\overline{c}-5\overline{a}}\left(9\overline{a}+4\overline{b}\right)$$

Запишем формулу для нахождения проекции

$$пр_{\overline{f}}\overline{d}=\left|\overline{d}\right|\cos(\overline{f}\,\hat{,}\,\overline{d}),\ \text{где}\ \cos(\overline{f}\,\hat{,}\,\overline{d})=\frac{(\overline{f},\overline{d})}{\left|\overline{f}\right|\left|\overline{d}\right|}$$

$$пр_{\overline{f}}\overline{d}=\left|\overline{d}\right|\frac{(\overline{f},\overline{d})}{\left|\overline{f}\right|\left|\overline{d}\right|}=\frac{(\overline{f},\overline{d})}{\left|\overline{f}\right|}$$

Тогда

$$пр_{3\overline{c}-5\overline{a}}\left(9\overline{a}+4\overline{b}\right)=\frac{(9\overline{a}+4\overline{b},3\overline{c}-5\overline{a})}{\left|3\overline{c}-5\overline{a}\right|}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуемся свойствами}\\ \text{скалярного произведения}\end{array}\right|=$$

$$\frac{(9\overline{a},3\overline{c})+(9\overline{a},-5\overline{a})+(4\overline{b},3\overline{c})+(4\overline{b},-5\overline{a})}{\sqrt{\left(3\overline{c}-5\overline{a},3\overline{c}-5\overline{a}\right)}}=$$

$$\frac{27(\overline{a},\overline{c})-45(\overline{a},\overline{a})+12(\overline{b},\overline{c})-20(\overline{b},\overline{a})}{\sqrt{9\left(\overline{c},\overline{c}\right)-30\left(\overline{a},\overline{c}\right)+25\left(\overline{a},\overline{a}\right)}}=$$

$$\frac{27|\bar a||\bar c|\cos\left(\bar a\,\hat{,}\,\bar c\right)-45|\bar a|^2+12|\bar b||\bar c|\cos\left(\bar b\,\hat{,}\,\bar c\right)-20|\bar b||\bar a|\cos\left(\bar b\,\hat{,}\,\bar a\right)}{\sqrt{9|\bar c|^2-30|\bar a||\bar c|\cos\left(\bar a\,\hat{,}\,\bar c\right)+25|\bar a|^2}}$$

$$=\frac{27\cdot2\cdot3\cos\frac{2\pi}{3}-45\cdot4+12\cdot5\cdot3\cos\frac{\pi}{4}-20\cdot5\cdot2\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{9\cdot9-30\cdot2\cdot3\cos\frac{2\pi}{3}+25\cdot4}}=$$

$$\frac{162\left(-\frac{1}{2}\right)-180+12\cdot15\frac{\sqrt2}{2}-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{81-180\left(-\frac{1}{2}\right)+100}}=$$

$$\frac{-81-180+90\sqrt2-100}{\sqrt{181+90}}=\frac{90\sqrt2-361}{\sqrt{271}}$$

Ответ: $\text{пр}_{3\bar c-5\bar a}\left(9\bar a+4\bar b\right)=\frac{90\sqrt2-361}{\sqrt{271}}$

3) Найти длину диагоналей параллелограмма построенного по векторам

$4\bar a+\bar b$ и $-5\bar b+3\bar a$, где $|\bar a|=2$, $|\bar b|=5$, $\overset{\Lambda}{\bar a,\bar b}=\pi/3$

Пусть $\overline{AB}=4\bar a+\bar b$ $\quad\overline{AD}=-5\bar b+3\bar a$ (рис 3.1)

Тогда

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=4\bar a+\bar b-5\bar b+3\bar a=7\bar a-4\bar b$

$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=-5\bar b+3\bar a-4\bar a-\bar b=-\bar a-6\bar b$

$|\overline{AC}|=|7\bar a-4\bar b|=\sqrt{\left(7\bar a-4\bar b,7\bar a-4\bar b\right)}=$

$\sqrt{49\left(\bar a,\bar a\right)-56\left(\bar a,\bar b\right)+16\left(\bar b,\bar b\right)}=$

$$\sqrt{49|\overline{a}|^2-56|\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)+16|\overline{b}|^2}=$$

$$\sqrt{49\cdot4-56\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}+16\cdot25}=\sqrt{196-280+400}=\sqrt{316}$$

$$|\overline{BC}|=|-\overline{a}-6\overline{b}|=\sqrt{\left(-\overline{a}-6\overline{b},-\overline{a}-6\overline{b}\right)}=$$

$$\sqrt{36(\overline{b},\overline{b})+12(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{a})}=$$

$$\sqrt{36|\overline{b}|^2+12|\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)+|\overline{a}|^2}=\sqrt{36\cdot25+12\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}+4}$$

$$=\sqrt{900+120+4}=\sqrt{1024}=32$$

Ответ: $|\overline{AC}|=\sqrt{316}$ $|\overline{BC}|=32$

4) Площадь параллелограмма ABCD

$$S_{ABCD}=\left|\left[\overline{AB},\overline{AD}\right]\right|=|[4\overline{a}+\overline{b},-5\overline{b}+3\overline{a}]|$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, равна длине вектора векторного произведения этих векторов.

Для вычисления длины вектора $|[4\overline{a}+\overline{b},-5\overline{b}+3\overline{a}]|$ воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

1) $[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}]$

2) $[\lambda\overline{a},\overline{b}]=\lambda[\overline{a},\overline{b}]$

3) $[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}]=[\overline{a},\overline{c}]+[\overline{b},\overline{c}]$

4) $[\overline{a},\overline{a}]=0$

Тогда

$$\left|\left[4\overline{a}+\overline{b},3\overline{a}-5\overline{b}\right]\right|=\left|\left[4\overline{a},3\overline{a}\right]+\left[4\overline{a},-5\overline{b}\right]+\left[\overline{b},3\overline{a}\right]+\left[\overline{b},-5\overline{b}\right]\right|=$$

$$\left|12[\overline{a},\overline{a}]-20[\overline{a},\overline{b}]+3[\overline{b},\overline{a}]-5[\overline{b},\overline{b}]\right|=\left|-20[\overline{a},\overline{b}]-3[\overline{a},\overline{b}]\right|=$$

$$\left|-23[\bar{a},\bar{b}]\right| == 23|\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right) = 23\cdot5\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 230\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 115$$

$\sqrt{3}$

Ответ $S_{ABCD}=115\sqrt{3}$

Задача 2.

Дано: $\bar{a}$ (-3,1,4), $\bar{b}$ (2,3,-5), $\bar{c}$ (1,9,-5)

Найти:

1) Координаты вектора $\bar{d}=2\bar{a}+3\bar{b}$
2) $(-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d})$
3) $[-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d}]$
4) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

Решение:

1) Координаты вектора $\bar{d}=2\bar{a}+3\bar{b}$

$2\bar{a}(-6,2,8)$, $3\bar{b}=(6,9,-15)$

$$2\bar{a}+3\bar{b}=(-6+6,2+9,8-15)=(0,11,-7)$$

$$\bar{d}=(0,11,-7)$$

Ответ: $\bar{d}(0,11,-7)$

2) $(-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d})$ скалярное произведение

Если $p(x_1,y_1,z_1)$

$\bar{q}(x_2,y_2,z_2)$, то $(\bar{p},\bar{q})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Найдем координаты векторов $-3\bar{a}+\bar{c}$ и $-5\bar{b}+3\bar{d}$

$-3\bar{a}=(9,-3,-12)$

$\bar{c}=(1,9,-5)$

$$-3\bar{a}+\bar{c}=(9+1,-3+9,-12-5)=(10,6,-17)$$

$$-5\bar{b}=(-10,-15,25)$$

$$3\bar{d}=(0,33,-21)$$

$$-5\bar{b}+3\bar{d}=(-10,-15+33,25-21)=(-10,18,4)$$

$$(-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d})=10(-10)+6\cdot 18-17\cdot 4=-100+108-$$

Ответ: $(-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d})=-60$

3) $[-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d}]-$ векторное произведение

Найдем координаты векторов $-3\bar{a}+\bar{c}$ и $-5\bar{b}+3\bar{c}$

$-3\bar{a}+\bar{c}=(10,6,-17)$

$-5\bar{b}+3\bar{d}=(-10,18,4)$

Векторное произведение – это вектор, координаты которого можно найти по следующей формуле:

Если $\bar{p}(x_1,y_1,z_1)$

$\bar{q}(x_2,y_2,z_2)$, то

$$[\bar{p},\bar{q}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=$$

$$=(y_1z_2-y_2z_1)\bar{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\bar{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\bar{k}$$

$$[-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 10 & 6 & -17\\ -10 & 18 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}6 & -17\\ 18 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}10 & \\ -10 & \end{vmatrix}$$

$$=(24+306)\bar{i}-(40-170)\bar{j}+(180+60)\bar{k}=330\bar{i}+130\bar{j}+240$$

Ответ: $[-3\bar{a}+\bar{c},-5\bar{b}+3\bar{d}]=330\bar{i}+130\bar{j}+240\bar{k}$

4) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ - смешанное произведение

Если $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$ $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$ $\bar{c}(x_3,y_3,z_3)$

то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$\bar{a}(-3,1,4) \qquad \bar{b}(2,3,-5) \qquad \bar{c}(1,9,-5)$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -3($$

$$+4(18-3) = -90 + 5 + 60 = -25$$

Ответ: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -25$

Задача 3.

Дано: точки $Q(-3, 1), L(4, 9), P(4, 2)$.

Решение

1) Проверить, не лежат ли точки на одной прямой.

Если точки Q, L, P лежат на одной прямой, то вектор $\overline{LP}$ коллинеарен вектору $\overline{QL}$, а значит их координаты должны быть пропорциональны (рис. 2.2). Координаты векторов: $\overline{QL}(4-(-3), 9-1) = (7, 8)$; $\overline{LP}(0, 2-9) = (0, -7)$;

$\frac{0}{7} \neq \frac{-7}{8} \Rightarrow$ векторы $\overline{QL}$ и $\overline{QP}$ не коллинеарны $\Rightarrow$ точки Q, L, P **не лежат на одной прямой**.

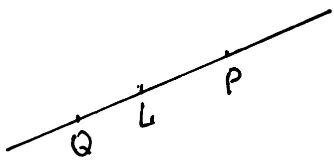

Рис. 2.2

2) Найти уравнение прямой QL.

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QL, вектор $\overline{QM}$ должен быть коллинеарен вектору $\overline{QL}$ (рис. 2.3), а значит, их координаты должны быть пропорциональны. Координаты векторов: $\overline{QM}(x+3,\ y-1);\overline{QL}(7,\ 8)$, тогда

$$\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{7}}=\frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{8}}$$ – уравнение прямой QL.

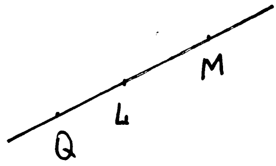

Рис. 2.3

3) Найти уравнение медианы, проведенной из вершины Q в ΔQPL (рис. 2.4).

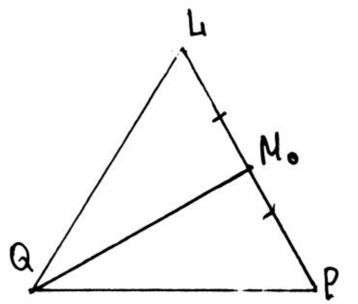

Рис. 2.4

Найдем координаты точки M_0.

$\overline{M_0P}=\frac{1}{2}\overline{LP}$, так как $\left|\overline{M_0P}\right|=\left|\overline{LM_0}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{LP}\right|$;

$\overline{LP}(0,-7)\Rightarrow\frac{1}{2}\overline{LP}=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$; $P(4,\ 2)$ – из условия.

Пусть $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$, тогда $\overline{M_0P}=(4-x_0,\ 2-x_0)=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$.

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты:

$$\begin{cases} 4 - x_0 = 0 \\ 2 - y_0 = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(4, \dfrac{11}{2}\right).$$

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QM_0, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{QM_0}$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны. Координаты векторов:

$$\overline{QM}_0 = \left(4-(-3), \frac{11}{2} - 1\right) = \left(7, \frac{9}{2}\right); \ \overline{QM} = (x+3,\ y-1);$$

$\dfrac{x+3}{7} = \dfrac{y-1}{9/2}$ умножим на (1/2) –

$\boldsymbol{\dfrac{x+3}{14} = \dfrac{y-1}{9}}$ – получили уравнение медианы QM_0.

4) Найти уравнение высоты, проведенной из вершины Q (рис. 2.5).

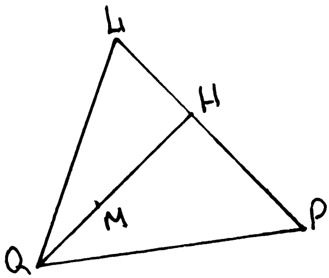

Рис. 2.5

QH – высота. Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QH вектор $\overline{QM}$ должен быть перпендикулярен вектору $\overline{LP}$, а значит $(\overline{QM}, \overline{LP}) = 0$.

Координаты векторов:

$\overline{QM}(x+3, y-1)$; $\overline{LP}(0,-7)$, тогда

$(\overline{QM}, \overline{LP}) = 0(x+3) - 7(y-1) = 0$;

$-7(y-1) = 0$;

$y - 1 = 0$

$\boldsymbol{y = 1}$ – получили уравнение высоты QH.

5) Найти координаты точки пересечения медиан в ΔQPL (рис. 2.6).

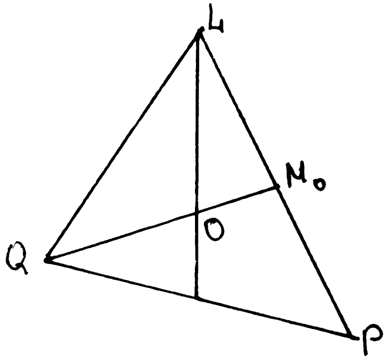

Рис. 2.6

Медианы треугольника делятся точкой их пересечения в соотношении 2:1:

$$\frac{|QO|}{|OM_0|} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{QO} = \frac{2}{3}\overline{QM}_0;$$

$$\overline{QM}\left(7, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \overline{QO}\left(\frac{2}{3}\cdot 7, \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{14}{3}, 3\right).$$

Пусть $O(x,\ y)$, тогда $\overline{QO} = (x+3, y-1) = \left(\frac{14}{3}, 3\right)$. Два вектора равны, если их соответствующие координаты равны:

$$\begin{cases} x+3 = \dfrac{14}{3} \\ y-1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} - 3 = \dfrac{5}{3}. \\ y = 4 \end{cases}$$

$\boldsymbol{O\left(\frac{5}{3}, 4\right)}$ – точка пересечения медиан ΔQPL.

6) Найти угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q (рис. 2.7).

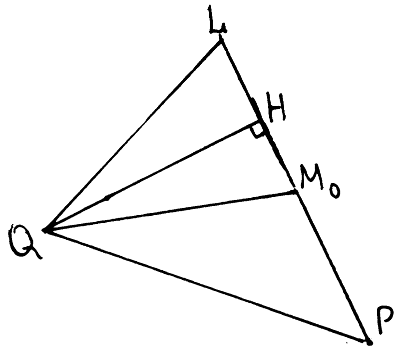

Рис. 2.7

Угол между прямыми на плоскости равен углу между их нормальными векторами. Уравнение прямой *QH*: $y = 1 \Rightarrow \bar{n}_2(0, 1)$.

Напишем общее уравнение прямой QM_0, используя каноническое уравнение (см. п. 2 наст. задачи).

$\frac{x+3}{14} = \frac{y-1}{9}$ умножим на 9 и на 14 –

$9(x+3) = 14(y-1)$;

$9x + 27 = 14y - 14$;

$9x - 14y + 41 = 0$ – общее уравнение прямой QM_0 $\Rightarrow$ $\bar{n}_1(9, -14)$.

$$\mathbf{cos}\left(\widehat{\boldsymbol{QM_0}, \boldsymbol{QH}}\right) = \left|\cos(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2})\right| = \frac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} =$$

$$= \frac{|9 \cdot 0 - 14 \cdot 1|}{\sqrt{9^2 + (-14)^2}\sqrt{0+1}} = \frac{14}{\sqrt{81+196}} = \frac{\mathbf{14}}{\sqrt{\mathbf{277}}}.$$

7) Найти расстояние от точки *P* до прямой *QL* (рис. 2.8).

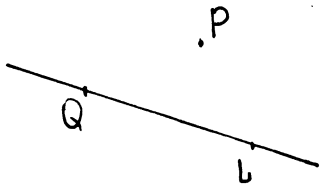

Рис. 2.8

Запишем уравнение прямой QL (см. п. 2 наст. задачи).

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y-1}{8}.$$

Перейдем к общему уравнению прямой:

$8(x + 3) = 7(y – 1)$;

$8x + 24 = 7y – 7$

$8x – 7y + 31 = 0$ – получим общее уравнение прямой QL.

Точка $P(4, 2) \notin QL$.

Используем формулу нахождения расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой на плоскости. Пусть $L: Ax+By+C=0$, тогда

$$\rho(M,L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

В нашем случае

$$\boldsymbol{\rho(P,QL)}=\frac{|8\cdot 4-7\cdot 2+31|}{\sqrt{8^2+(-7)^2}}=\frac{|32-14+31|}{\sqrt{64+49}}=\frac{\mathbf{49}}{\sqrt{\mathbf{113}}}.$$

Задача 4.

Определить тип кривой, найти её основные параметры, сделать чертеж:

1) $4x^2+9y^2-8x+54y+81+4=36$;

Решение

$4x^2+9y^2-8x+54y=-49.$

Выделим полный квадрат по x и по y:

$4x^2-8x+9y^2+54y=-49$;

$4(x^2-2x)+9(y^2+6y)=-49$;

$4((x-1)^2-1)+9((y+3)^2-9)=-49$;

$4(x-1)^2-4+9(y+3)^2-81=-49$;

$4(x-1)^2+9(y+3)^2=36$ разделим на 36;

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'$, которая получается из исходной декартовой

системы координат *XOY* параллельным переносом осей *OX* и *OY*:
$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 3. \end{cases}$$

Тогда $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$ – каноническое уравнение эллипса.

Найдем основные параметры эллипса:

$a = 3$ – большая полуось, $b = 2$ – малая полуось,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ – расстояние от центра до фокуса;

$F_1(-c,\, 0)$, $F_2(c,\, 0)$ – фокусы,

$F_1(-\sqrt{5},\, 0)$, $F_2(\sqrt{5},\, 0)$.

$E = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ – эксцентриситет;

$d : x' = \pm\frac{a}{E}$ – уравнения директрис;

директрисы $d_1 : x' = -\frac{3 \cdot 3}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$, $d_2 : x' = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

Найдем центр, вершины, фокусы, директрисы эллипса в исходной *XOY* системе координат, пользуясь формулами:
$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 3 \end{cases}$$
и результаты запишем в таблицу:

Параметры эллипса	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}=1$	$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$
Центр	$O'(0;0)$	$O'(1;-3)$
Вершины	$A_1(-3;0)$ $A_2(3;0)$ $B_1(0;-2)$ $B_2(0;2)$	$A_1(-2;-3)$ $A_2(4;-3)$ $B_1(1;-5)$ $B_2(1;-1)$
Фокусы	$F_1(-\sqrt{5};0)$ $F_2(\sqrt{5};0)$	$F_1(-\sqrt{5}+1;-3)$ $F_2(\sqrt{5}+1;-3)$
Директрисы	$x'=\frac{9}{\sqrt{5}}$; $x'=-\frac{9}{\sqrt{5}}$	$x=1+\frac{9}{\sqrt{5}}$; $x=1-\frac{9}{\sqrt{5}}$

Построим эллипс (рис. 2.35)

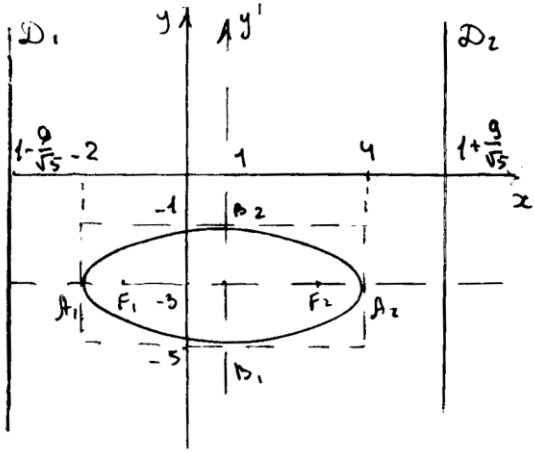

Рис. 2.35

2) $9x^2-y^2-36x+10y+9+36-25=0$;

$9x^2-y^2-36x+10y+20=0$.

Выделим полный квадрат по x и по y:

$9(x^2-4)-(y^2-10y)+20=0$;

$9((x-2)^2-4)-((y-5)^2-25)+20=0$;

$$9(x-2)^2-36-(y-5)^2+25+20=0;$$

$$9(x-2)^2-(y-5)^2+9=0;$$

$9(x-2)^2-(y-5)^2=-9$ разделим на 9;

$$(x-2)^2-\frac{(y-5)^2}{9}=-1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'$, которая получается из исходной декартовой прямоугольной системы координат параллельным переносом осей OX и OY:

$$\begin{cases} x'=x-2, \\ y'=y-5. \end{cases}$$

$\dfrac{(x')^2}{1}-\dfrac{(y')^2}{3^2}=-1$ – каноническое уравнение гиперболы, сопряженной к гиперболе $\dfrac{(x')^2}{1}-\dfrac{(y')^2}{3^2}=1$.

Найдем основные параметры гиперболы:

a = 3 – действительная полуось,

b = 1 – мнимая полуось,

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ – расстояние от центра до фокуса,

$F_1(0,-c),\ F_2(0,c)$ – фокусы,

$$F_1(0,-\sqrt{10}), F_2(0,\sqrt{10}).$$

$$E=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3};$$

$x'=\pm\dfrac{b}{a}y'$ – уравнения асимптот;

Тогда $x'=\pm\dfrac{1}{3}y$;

$$d: y'=\pm\frac{a}{E};$$

$$d_1: y'=-\frac{3\cdot 3}{\sqrt{10}}=-\frac{9}{10};$$

$d_2: y'=\dfrac{9}{\sqrt{10}}$ – директрисы гиперболы

Найдем центр, вершину, фокусы, директрисы, асимптоты в сходной (XOY) системе координат, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 5. \end{cases}$$

Найдем уравнения асимптот в системе координат XOY.

$$x' = \frac{1}{3}y' \text{ и } x' = -\frac{1}{3}y';$$

$$3(x-2) = y - 5 \text{ и } 3(x-2) = -y + 5;$$

$$3x = y + 1 \quad\quad \text{ и } 3x = 11 - y.$$

Результат запишем в таблицу:

Параметры гиперболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{9} = -1$	$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{9} = -1$
Центр	$O'(0;\,0)$	$O'(2;\,5)$
Вершины	$A_1(0;\,-3)$ $A_2(0;\,3)$	$A_1(2;\,2)$ $A_2(2;\,8)$
Фокусы	$F_1(0;\,-\sqrt{10})$ $F_2(0;\,\sqrt{10})$	$F_1(2;\,5-\sqrt{10})$ $F_2(2;\,5+\sqrt{10})$
Директрисы	$y' = -\frac{9}{\sqrt{10}}$ $y' = \frac{9}{\sqrt{10}}$	$x = 5 - \frac{9}{\sqrt{10}}$ $x = 5 + \frac{9}{\sqrt{10}}$
Асимптоты	$x' = \frac{1}{3}y'$ $x' = -\frac{1}{3}y'$	$3x = y + 1$ $3x + y = 11$

Построим гиперболу (рис. 2.36).

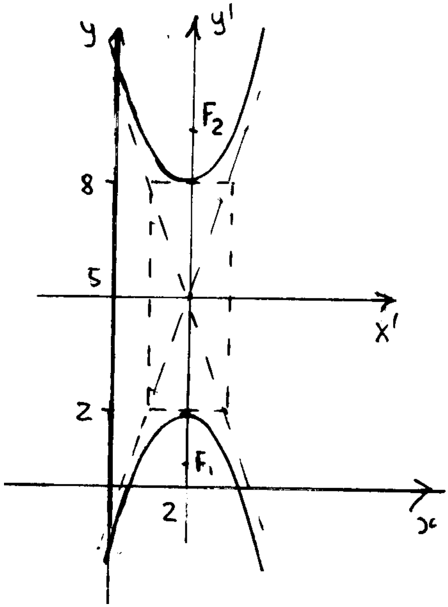

Рис. 2.36

3) $3x^2+4x+y+9=0$.

Выделим полный квадрат по x:

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)+y+9=0;$$

$$3\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)=-y-9;$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=-y-9;$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=-y-\frac{23}{3};$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\left(-y-\frac{23}{3}\right);$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX и OY:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{2}{3}; \\ y' = -y - \dfrac{23}{3}. \end{cases}$$

$(x')^2 = \dfrac{1}{3} y'$ – каноническое уравнение параболы.

Найдем основные параметры параболы:

$p = \dfrac{1}{6}$ – параметр;

$F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$; $F\left(0, \dfrac{1}{12}\right)$ – фокус;

$d : y' = -\dfrac{p}{2}$; $y' = -\dfrac{1}{12}$ – директриса.

Найдем вершину, фокус и директрису в исходной XOY системе координат, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{2}{3}, \\ y = -y' - \dfrac{23}{3} \end{cases}$$

и результаты запишем в таблицу:

Параметры параболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$(x')^2 = \dfrac{1}{3} y'$	$3x^2 + 4x + y + 9 = 0$
Вершина	$O'(0{,}0)$	$O'\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{23}{3}\right)$
Фокусы	$F\left(0, \dfrac{1}{12}\right)$	$F\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{93}{12}\right)$
Директрисы	$y' = -\dfrac{1}{12}$	$y = -\dfrac{91}{12}$

Построим параболу (рис. 2.37).

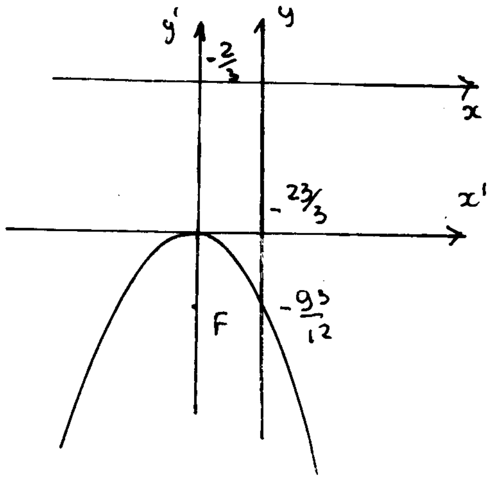

Рис. 2.37

4) $-3y^2+9x-5y+2=0$.

Выделим полный квадрат по y:

$$-3\left(y^2+\frac{5}{3}\right)+9x+2=0;$$

$$-3\left(\left(y+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right)+9x+2=0;$$

$$-3\left(y+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{25}{12}+9x+2=0;$$

$$-36\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=-108x-24-25;$$

$$-36\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=-108x-49;$$

$$36\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=108\left(x+\frac{49}{108}\right);$$

$$\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=3\left(x+\frac{49}{108}\right).$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX и OY:

$$\begin{cases} y' = y + \dfrac{5}{6}, \\ x' = x + \dfrac{49}{108}. \end{cases}$$

$(y')^2 = 3x'$ – каноническое уравнение параболы.

Найдем основные параметры параболы:

$$p = \frac{3}{2};\ F = \left(\frac{p}{2}, 0\right);$$

$$F = \left(\frac{3}{4}, 0\right) \text{ – фокус;}$$

$$D : y = -\frac{p}{2};$$

$$D : y' = -\frac{3}{4} \text{ – директриса.}$$

Найдем вершину, фокус и директрису параболы в системе координат XOY, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{49}{108}, \\ y = y' - \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

результаты запишем в таблицу:

Параметры параболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$(y')^2 = 3x'$	$-3y^2 + 9x - 5y + 2 = 0$
Вершина	$O'(0,0)$	$O'\left(-\dfrac{49}{108}, -\dfrac{5}{6}\right)$
Фокус	$F\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$	$F\left(\dfrac{8}{27}, -\dfrac{5}{6}\right)$
Директриса	$y' = -\dfrac{3}{4}$	$y = -\dfrac{19}{12}$

Построим параболу (рис. 2.38).

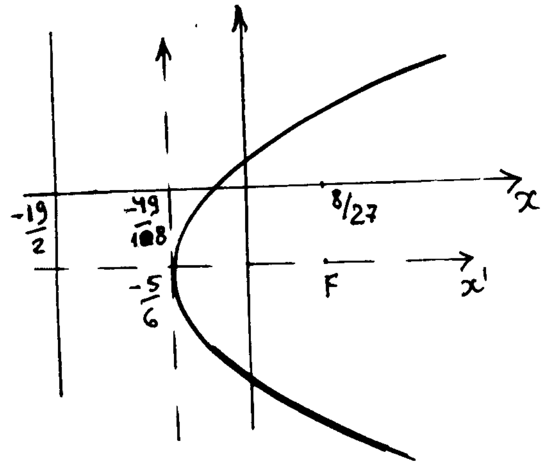

Рис. 2.38