



Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Учебно-методическое пособие

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет



Кафедра математики

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей

Под редакцией Б.Г. Разумейко

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

УДК 514.12+516.64
П40

Плужникова Е.Л., Разумейко Б.Г. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб.-метод. пособие. /Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 2001. – 226 с.

Содержит справочный материал по курсу «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», решение типовых задач по этому курсу, варианты домашнего задания, типовые варианты контрольных работ и варианты тестов, предназначенных для проверки усвоения пройденного материала. Подробно разобраны методы решения типовых задач домашнего задания. Предназначено для студентов всех специальностей.

© Московский государственный
институт стали и сплавов
(Технологический университет)
(МИСиС), 2001

ПЛУЖНИКОВА Елена Леонидовна
РАЗУМЕЙКО Борис Григорьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей

Рецензент проф. Е.А. Калашников

Редактор С.В. Фролова

Московский государственный институт стали и сплавов,
119991, Москва, Ленинский проспект, 4
Отпечатано в типографии издательства «Учеба» МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9

СОДЕРЖАНИЕ.

1. Аналитическая геометрия.....	6
1.1. Векторы	6
1.2. Прямая на плоскости.....	31
1.3. Плоскость в пространстве	49
1.4. Прямая в пространстве	59
1.5. Кривые 2-го порядка	108
1.6. Поверхности 2-го порядка	138
1.7. Домашнее задание	153
1.8. Вопросы для самопроверки.....	158
1.9. Типовые варианты контрольных работ.....	162
2. Линейная алгебра	164
2.1. Матрицы, операции над матрицами	164
2.2. Решение систем линейных уравнений	183
2.3. Линейное (векторное) пространство	205
2.4. Евклидово пространство.....	211
2.5. Линейные операторы	215
2.6. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора	217
2.7. Билинейные и квадратичные формы	232
2.8. Приведение кривой 2-го порядка к каноническому виду методом собственных значений.	240
2. 9. Домашнее задание	260
2.10.Вопросы для самопроверки.....	264
2.11.Типовой вариант контрольной работы.....	267
Рекомендуемая литература.....	269

1. Аналитическая геометрия

1.1. Векторы

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление (рис. 1.1). О любом отрезке $\overline{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет собой вектор $\vec{a}$, и получен приложением вектора $\vec{a}$ к точке A .

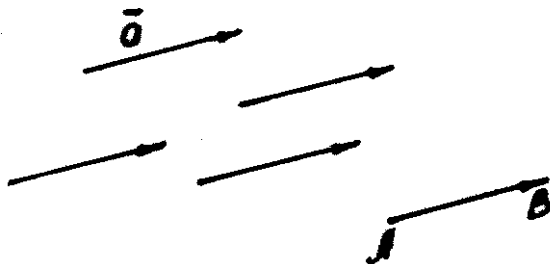


Рис. 1.1

$\vec{0}$ – нулевой вектор, т. е. вектор, длина которого равна нулю.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой (*сонаправленными*, если их направления совпадают; *противоположнонаправленными*, если их направления противоположны).

Три вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

$|\vec{a}|$ – длина вектора $\vec{a}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*.

Действия с векторами

1. Сумма векторов.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые приложены к одной точке. Суммой этих векторов $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор (рис. 1.2), идущий по диагонали параллелограмма из их общего начала (правило параллелограмма).

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}.$$

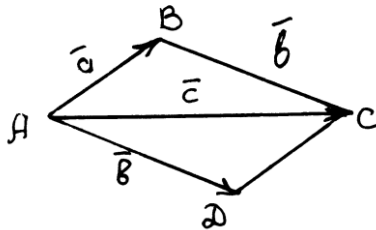


Рис. 1.2

Замечания

1. Сложить два вектора также можно по правилу треугольника (см. рис. 1.2). Если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$, то сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ – есть вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго. Результат при этом не изменится, так как $\vec{BC} = \vec{AD}$:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}.$$

2. Чтобы построить сумму векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, нужно к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить вектор $\vec{a}_2$, затем к концу вектора $\vec{a}_2$ приложить вектор $\vec{a}_3$, и т.д., пока не дойдем до вектора $\vec{a}_n$. Тогда суммой векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ будет вектор, соединяющий начало первого вектора $\vec{a}_1$ с концом последнего $\vec{a}_n$ (рис. 1.3):

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{A_1 A_{n+1}}.$$

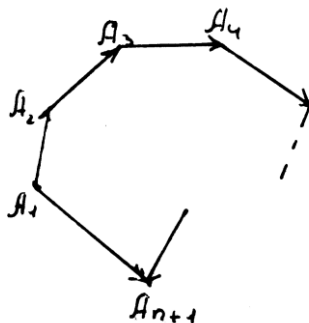


Рис. 1.3

2. Разность векторов.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одной точке, то *разность* этих векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ — это вектор, соединяющий конец второго вектора с концом первого (рис. 1.4):

$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

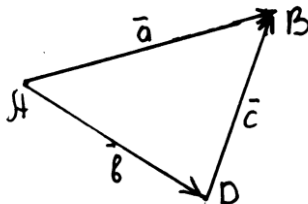


Рис. 1.4

3. Произведение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|;$$

2) $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$ (сонаправлены), если $\alpha > 0$;

$\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}$ (противоположнонаправлены), если $\alpha < 0$;

$\vec{b} = 0$, если $\alpha = 0$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, определяемое по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ может быть отрицательной, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой.

Свойства проекций

- $\text{пр}_{\vec{u}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = \text{пр}_{\vec{u}} \vec{a}_1 + \text{пр}_{\vec{u}} \vec{a}_2 + \dots + \text{пр}_{\vec{u}} \vec{a}_n$;
- $\text{пр}_{\vec{u}} \lambda \vec{a} = \lambda \cdot \text{пр}_{\vec{u}} \vec{a}$.

Базис и координаты вектора.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Базисом в пространстве геометрических векторов называется упорядоченная тройка некопланарных векторов.

Базис называется *прямоугольным*, если базисные векторы взаимноперпендикулярны и имеют единичную длину.

Зафиксируем в пространстве точку O и приложим к ней три взаимноперпендикулярных вектора единичной длины. По направлению этих векторов направим оси OX , OY и OZ , которые называются координатными осями. Первая – ось абсцисс, вторая – ось ординат, третья – ось аппликата. Векторы прямоугольного базиса принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Совокупность точки и прямоугольного базиса $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат (рис. 1.5), а точка M – произвольная точка пространства. Вектор $\vec{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M . Проведем через точку M плоскости, перпендикулярные координатным

осям. Любой вектор можно единственным образом разложить по базису $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

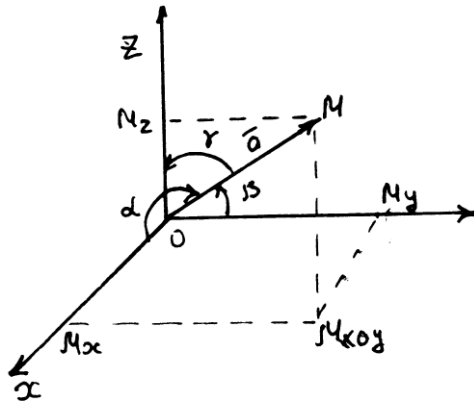


Рис. 1.5

Пусть x – проекция вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на ось OX , т. е. $x = |OM_x|$;

y – проекция вектора $\bar{a}$ на ось OY , т. е. $y = |OM_y|$;

z – проекция вектора $\bar{a}$ на ось OZ , т. е. $z = |OM_z|$.

Тогда разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где (x, y, z) – координаты вектора $\bar{a}$.

Пусть

α – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OX ;

β – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OY ;

γ – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OZ .

Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$ и могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}.$$

Очевидно, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Для нахождения длины вектора $\vec{a}$ используется формула:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в пространстве заданы 2 точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда координаты вектора $\vec{AB}$ находим, вычитая из координат точки B соответствующие координаты точки A :

$$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда координаты вектора $\vec{c}$, являющегося суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим, складывая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

Аналогично, координаты вектора $\vec{d}$, являющегося разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим по формуле:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);$$

координаты вектора $\vec{q}$, являющегося произведением вектора $\vec{a}$ на число α находим, умножая все координаты вектора $\vec{a}$ на число α :

$$\alpha \vec{a} = \vec{q} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Условие коллинеарности векторов: два вектора коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Два вектора совпадают, если равны их соответствующие ко-

$$\text{ординаты, т. е. } \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$

Заметив, что выражение $|\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ равно проекции вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, а выражение $|\bar{a}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ равно проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, получим следующую формулу для вычисления скалярного произведения:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0$ (условие перпендикулярности векторов);
- 2) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
- 3) $(\alpha \bar{a}, \bar{b}) = \alpha (\bar{a}, \bar{b}), \forall \alpha \in R$;
- 4) $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;
- 5) $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то скалярное произведение находится по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

а угол $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ между этими векторами –

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0, \text{ т.е. } x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Пример 1.1.

Даны три вектора $\bar{a} (1, 0, -1)$ $\bar{b} (-1, 2, 1)$ $\bar{c} (0, 3, 4)$.

Найти: 1) скалярное произведение вектора $\bar{a} - \bar{c}$ на вектор $\bar{b}$;

2) проекцию вектора $2\bar{a} + 3\bar{c}$ на вектор $\bar{b}$;

3) косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение

1) Найти скалярное произведение вектора $\bar{a} - \bar{c}$ на вектор $\bar{b}$.

Найдем координаты вектора $\bar{a} - \bar{c}$:

$$\bar{a} - \bar{c} = (1 - 0, 0 - 3, -1 - 4) = (1, -3, -5).$$

Координаты вектора $\bar{b}$:

$$\bar{b} (-1, 2, 1).$$

Тогда $(\bar{a} - \bar{c}, \bar{b}) = 1(-1) + (-3)2 + (-5)1 = -1 - 6 - 5 = -12$.

2) Найти проекцию вектора $2\bar{a} + 3\bar{c}$ на вектор $\bar{b}$.

Найдем координаты вектора $2\bar{a} + 3\bar{c}$:

$$2\bar{a} = (2, 0, -2); \quad 3\bar{c} = (0, 9, 12);$$

$$2\bar{a} + 3\bar{c} = (2 + 0, 0 + 9, -2 + 12) = (2, 9, 10).$$

Тогда проекция вектора $2\bar{a} + 3\bar{c}$ на вектор $\bar{b}$ равна:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\bar{b}}(2\bar{a} + 3\bar{c}) &= |2\bar{a} + 3\bar{c}| \cos(2\bar{a} + 3\bar{c}, \bar{b}) = \\ &= |2\bar{a} + 3\bar{c}| \frac{(\bar{a} + 3\bar{c}, \bar{b})}{|2\bar{a} + 3\bar{c}| |\bar{b}|} = \frac{(2\bar{a} + 3\bar{c}, \bar{b})}{|\bar{b}|}. \end{aligned}$$

Найдем скалярное произведение векторов $2\bar{a} + 3\bar{c}$ и $\bar{b}$:

$$(2\bar{a} + 3\bar{c}, \bar{b}) = 2(-1) + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = -2 + 18 + 10 = 26;$$

и длину вектора $\bar{b}$: $|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

Тогда

$$\text{пр}_{\bar{b}}(2\bar{a} + 3\bar{c}) = \frac{26}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{3}.$$

3) Найдем косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) &= \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Пример 1.2.

Дано: $|\bar{a}|=1$ $|\bar{b}|=2$; $\angle \bar{a}, \bar{b} = \frac{\pi}{4}$.

Найти: 1) скалярное произведение вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $2\bar{a} + \bar{b}$;

2) длину вектора $\bar{a} - \bar{b}$;

3) проекцию вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $\bar{b}$.

Решение

1) Найдем скалярное произведение вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $2\bar{a} + \bar{b}$.

$$\begin{aligned} (\bar{a} - \bar{b}, 2\bar{a} + \bar{b}) &= (\bar{a}, 2\bar{a} + \bar{b}) - (\bar{b}, 2\bar{a} + \bar{b}) = \\ &= 2(\bar{a}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{b}) - 2(\bar{b}, \bar{a}) - (\bar{b}, \bar{b}) = \\ &= 2|\bar{a}|^2 - (\bar{a}, \bar{b}) - |\bar{b}|^2 = 2 \cdot 1 - |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) - (2)^2 = \\ &= 2 - 2 \cos \frac{\pi}{4} - 4 = -2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2) Найдем длину вектора $\bar{a} - \bar{b}$:

$$\begin{aligned} |\bar{a} - \bar{b}| &= \sqrt{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b})} = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a}) - 2(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b})} = \\ &= \sqrt{|\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) + |\bar{b}|^2} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}} + 4 = \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$$

3) Найдем проекцию вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $\bar{b}$:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a} - \bar{b}) &= |\bar{a} - \bar{b}| \cos(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b}) = \\ &= |\bar{a} - \bar{b}| \frac{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b})}{|\bar{a} - \bar{b}| |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{(\bar{a}, \bar{b}) - (\bar{b}, \bar{b})}{2} = \\ &= \frac{|\bar{a}| |\bar{b}| \cos \frac{\pi}{4} - |\bar{b}|^2}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4}{2} = \frac{\sqrt{2} - 4}{2}. \end{aligned}$$

Пример 1.3.

Дано: $|\bar{a}| = 2$; $|\bar{b}| = 5$; $\bar{a}, \bar{b} = \frac{\pi}{3}$.

Найти: 1) длину вектора $|\bar{a} + 4\bar{b}|$;

2) проекцию вектора $(\bar{a} + 4\bar{b})$ на вектор $3\bar{b} - 5\bar{a}$;

3) длину диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $4\bar{a} + \bar{b}$ и $-5\bar{b} + 3\bar{a}$.

Решение

1) Найдем длину вектора $|\bar{a} + 4\bar{b}|$:

Для нахождения длины вектора воспользуемся формулами:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}; (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

$$\text{Тогда: } |\bar{a} + 4\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} + 4\bar{b}, \bar{a} + 4\bar{b})} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{По свойствам скалярного произведения:} \\ (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}) \\ (\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}) \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{(\bar{a}, \bar{a}) + (4\bar{b}, \bar{a}) + (\bar{a}, 4\bar{b}) + (4\bar{b}, 4\bar{b})} = \sqrt{|\bar{a}|^2 + 8(\bar{a}, \bar{b}) + 16|\bar{b}|^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 5 \cos \frac{\pi}{3} + 16 \cdot 5^2} = \sqrt{4 + 80 \cdot \frac{1}{2} + 400} = \\
&= \sqrt{4 + 40 + 400} = \sqrt{444} . \\
&|\bar{a} + 4\bar{b}| = \sqrt{444} .
\end{aligned}$$

2) Найдем проекцию вектора $(\bar{a} + 4\bar{b})$ на вектор $3\bar{b} - 5\bar{a}$.
Запишем формулу для нахождения проекции:

$$\text{пр}_{\bar{f}} \bar{d} = |\bar{d}| \cos(\bar{f}, \bar{d}), \text{ где } \cos(\bar{f}, \bar{d}) = \frac{(\bar{f}, \bar{d})}{|\bar{f}| |\bar{d}|} .$$

Тогда имеем:

$$\text{пр}_{\bar{f}} \bar{d} = |\bar{d}| \frac{(\bar{f}, \bar{d})}{|\bar{f}| |\bar{d}|} = \frac{(\bar{f}, \bar{d})}{|\bar{f}|} .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\text{пр}_{3\bar{b}-5\bar{a}}(\bar{a} + 4\bar{b}) &= \frac{(\bar{a} + 4\bar{b}, 3\bar{b} - 5\bar{a})}{|3\bar{b} - 5\bar{a}|} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Воспользуемся свойствами} \\ \text{скалярного произведения} \end{array} \right| = \frac{(\bar{a}, 3\bar{b}) - (\bar{a}, 5\bar{a}) + (4\bar{b}, 3\bar{b}) - (4\bar{b}, 5\bar{a})}{\sqrt{(3\bar{b} - 5\bar{a}, 3\bar{b} - 5\bar{a})}} = \\
&= \frac{3(\bar{a}, \bar{b}) - 5(\bar{a}, \bar{a}) + 12(\bar{b}, \bar{b}) - 20(\bar{b}, \bar{a})}{\sqrt{9(\bar{b}, \bar{b}) - 30(\bar{a}, \bar{b}) + 25(\bar{a}, \bar{a})}} = \\
&= \frac{-17|\bar{a}||\bar{b}| \cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right) - 5|\bar{a}|^2 + 12|\bar{b}|^2}{\sqrt{9|\bar{b}|^2 - 30|\bar{a}||\bar{b}| \cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right) + 25|\bar{a}|^2}} = \frac{-17 \cdot 2 \cdot 5 \cos \frac{\pi}{3} - 5 \cdot 4 + 12 \cdot 5 \cdot 5}{\sqrt{9 \cdot 25 - 30 \cdot 2 \cdot 5 \cos \frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4}} = \\
&= \frac{-170 \cdot \frac{1}{2} - 20 + 300}{\sqrt{225 - 300 \cdot \frac{1}{2} + 100}} = \frac{-85 - 280}{\sqrt{175}} = \frac{-365}{5\sqrt{7}} = \frac{-73}{\sqrt{7}} .
\end{aligned}$$

Получили:

$$\text{пр}_{3\bar{b}-5\bar{a}}(\bar{a}+4\bar{b})=\frac{-73}{\sqrt{7}}.$$

3) Найдем длины диагоналей параллелограмма построенного по векторам $4\bar{a}+\bar{b}$ и $-5\bar{b}+3\bar{a}$, где $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=5$,

$$\angle \bar{a}, \bar{b} = \pi/3.$$

Пусть $\overline{AB} = 4\bar{a} + \bar{b}$, $\overline{AD} = -5\bar{b} + 3\bar{a}$ (рис. 1.6).

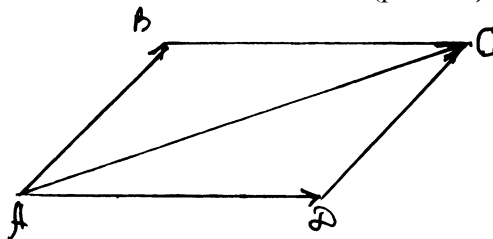


Рис. 1. 6.

Тогда

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 4\bar{a} + \bar{b} - 5\bar{b} + 3\bar{a} = 7\bar{a} - 4\bar{b};$$

$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = -5\bar{b} + 3\bar{a} - 4\bar{a} - \bar{b} = -\bar{a} - 6\bar{b}.$$

Найдем длину вектора $|\overline{AC}|$:

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= |7\bar{a} - 4\bar{b}| = \sqrt{(7\bar{a} - 4\bar{b}, 7\bar{a} - 4\bar{b})} = \\ &= \sqrt{49(\bar{a}, \bar{a}) - 56(\bar{a}, \bar{b}) + 16(\bar{b}, \bar{b})} = \sqrt{49|\bar{a}|^2 - 56|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\angle \bar{a}, \bar{b}) + 16|\bar{b}|^2} = \\ &= \sqrt{49 \cdot 4 - 56 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 25} = \sqrt{196 - 280 + 400} = \sqrt{316}. \end{aligned}$$

Найдем длину вектора $|\overline{BC}|$:

$$\begin{aligned}
 |\overline{BC}| &= |-\overline{a} - 6\overline{b}| = \sqrt{(-\overline{a} - 6\overline{b}, -\overline{a} - 6\overline{b})} = \\
 &= \sqrt{36(\overline{b}, \overline{b}) + 12(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{36|\overline{b}|^2 + 12|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b}) + |\overline{a}|^2} = \\
 &= \sqrt{36 \cdot 25 + 12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{900 + 120 + 4} = \sqrt{1024} = 32.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\overline{AC}| = \sqrt{316}; \quad |\overline{BC}| = 32.$$

Пример 1.4.

Дано: $\overline{a}(-3, 1, 4)$, $\overline{b}(2, 3, -5)$, $\overline{c}(1, 9, -5)$.

Найти: 1) координаты вектора $\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$;

2) $|\overline{d}|$, направляющие косинусы вектора $\overline{d}$, координаты орта $\overline{d}_0$ вектора $\overline{d}$, проекцию вектора $\overline{d}$ на базисные орты.

($\text{пр}_{\overline{i}} \overline{d}$, $\text{пр}_{\overline{j}} \overline{d}$, $\text{пр}_{\overline{k}} \overline{d}$);

3) скалярное произведение $(3\overline{a} + \overline{c}, -5\overline{b} + 3\overline{d})$;

4) косинус угла между векторами $3\overline{a} + \overline{c}$ и $5\overline{b} + 3\overline{d}$;

5) $\text{пр}_{\overline{a}} \overline{d}$ – проекцию вектора $\overline{d}$ на вектор $\overline{a}$.

Решение

1) Найдем координаты вектора $\overline{d}$.

Вектор $\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$, где $\overline{a}(-3, 1, 4)$, $\overline{b}(2, 3, -5)$.

Найдем координаты векторов $2\overline{a}$ и $3\overline{b}$:

$$2\overline{a}(-6, 2, 8), \quad 3\overline{b}(6, 9, -15);$$

Тогда координаты вектора $\overline{d}$:

$$\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = (-6 + 6, 2 + 9, 8 - 15) = (0, 11, -7);$$

Следовательно, вектор $\overline{d}(0, 11, -7)$.

2) Найдем длину вектора $\overline{d}$ по формуле:

$$|\bar{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \text{ где } \bar{d}(x, y, z) .$$

$$\text{Тогда } |\bar{d}| = \sqrt{0+11^2 + (-7)^2} = \sqrt{121+49} = \sqrt{170} .$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{d}$ по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\bar{d}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\bar{d}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\bar{d}|} .$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{170}} = 0, \cos \beta = \frac{11}{\sqrt{170}}, \cos \gamma = -\frac{7}{\sqrt{170}} .$$

Найдем $\text{пр}_i \bar{d}$, $\text{пр}_j \bar{d}$, $\text{пр}_k \bar{d}$ по формулам:

$\text{пр}_i |\bar{d}| = x$, $\text{пр}_j |\bar{d}| = y$, $\text{пр}_k |\bar{d}| = z$ – проекции вектора $\bar{d}$ на базисные векторы.
Тогда

$$\text{пр}_i \bar{d} = 0, \text{пр}_j \bar{d} = 11, \text{пр}_k \bar{d} = -7 ;$$

Найдем координаты орта $\bar{d}_0$ вектора $\bar{d}$ по формуле:

$$\bar{d}_0 = \frac{1}{|\bar{d}|} \bar{d} .$$

Тогда

$$\bar{d}_0 = \left(0, \frac{11}{\sqrt{170}}, \frac{-7}{\sqrt{170}} \right) .$$

Итак,

$$|\bar{d}| = \sqrt{170}; \bar{d}_0 = \left(0, \frac{11}{\sqrt{170}}, \frac{-7}{\sqrt{170}} \right); \cos \alpha = 0, \cos \beta = \frac{11}{\sqrt{170}},$$

$$\cos \gamma = -\frac{7}{\sqrt{170}}; \text{пр}_i \bar{d} = 0, \text{пр}_j \bar{d} = 11, \text{пр}_k \bar{d} = -7 .$$

3) Найдем скалярное произведение $(3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d})$

Если известны координаты векторов $\bar{p}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{q}(x_2, y_2, z_2)$, то $(\bar{p}, \bar{q}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Найдем координаты векторов $\bar{p} = 3\bar{a} + \bar{c}$ и $\bar{q} = -5\bar{b} + 3\bar{d}$, где $\bar{a}(-3, 1, 4)$, $\bar{b}(2, 3, -5)$, $\bar{c}(1, 9, -5)$, $\bar{d}(0, 11, -7)$.

Координаты вектора $3\bar{a} = (-9, 3, 12)$.

Тогда $\bar{p} = (-9 + 1, 3 + 9, 12 - 5) = (-8, 12, 7)$.

Координаты векторов $-5\bar{b} = (-10, -15, 25)$ и $3\bar{d} = (0, 33, -21)$

Тогда $\bar{q} = (-10, -15 + 33, 25 - 21) = (-10, 18, 4)$;

Итак $\bar{p} = (-8, 12, 7)$ и $\bar{q} = (-10, 18, 4)$;

Следовательно, $(\bar{p}, \bar{q}) = -8(-10) + 12 \cdot 18 + 7 \cdot 4 = 80 + 216 + 28 = 324$.

$(3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d}) = 324$.

4) Найдем косинус угла между векторами

$\bar{p} = 3\bar{a} + \bar{c}$ и $\bar{q} = -5\bar{b} + 3\bar{d}$ по формуле: $\cos(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{p}||\bar{q}|}$,

$$\begin{aligned} \text{тогда } \cos(\bar{p}, \bar{q}) &= \frac{(3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d})}{|3\bar{a} + \bar{c}||-5\bar{b} + 3\bar{d}|} = \\ &= \frac{324}{\sqrt{(-8)^2 + 12^2 + 7^2} \sqrt{(-10)^2 + 18^2 + 4^2}} = \\ &= \frac{324}{\sqrt{64 + 144 + 49} \sqrt{100 + 324 + 16}} = \\ &= \frac{324}{\sqrt{257} \sqrt{440}} = \frac{324}{\sqrt{257} \cdot 2\sqrt{110}} = \frac{162}{\sqrt{257} \sqrt{110}}. \\ \cos(3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d}) &= \frac{162}{\sqrt{257} \sqrt{110}}. \end{aligned}$$

5) Найдем проекцию вектора $\bar{d}(0, 11, -7)$ на вектор $\bar{a}(-3, 1, 4)$ по формуле:

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{d} = |\bar{d}| \cos(\bar{a}, \bar{d}) = |\bar{d}| \frac{(\bar{a}, \bar{d})}{|\bar{a}||\bar{d}|} = \frac{(\bar{a}, \bar{d})}{|\bar{a}|}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\bar{a}(-3, 1, 4)$ и

$\bar{d}(0, 11, -7)$ и длину вектора $\bar{a}$:

$$(\bar{a}, \bar{d}) = -3 \cdot 0 + 1 \cdot 11 + 4(-7) = 11 - 28 = -17.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}.$$

Тогда

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{d} = \frac{-17}{\sqrt{26}}.$$

Определители 2-го и 3-го порядка

Квадратная таблица, состоящая из четырех чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей 2-го порядка*. Числа a_{ij} ($i, j = 1, 2$) – элементы матрицы A (i – номер строки, j – номер столбца). Пара чисел a_{11}, a_{22} образует *главную диагональ*, а пара чисел a_{12}, a_{21} образует *побочную диагональ* матрицы A .

Определителем 2-го порядка, соответствующим квадратной матрице A , называется число равное разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1.5.

Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5.$$

Матрицей 3-го порядка называется квадратная таблица, состоящая из 9 элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Ее элементы – a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), где i – номер строки, j – номер столбца. Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ*, числа a_{12}, a_{22}, a_{31} – образуют *побочную диагональ*.

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице A , называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Поясним схематически нахождение определителя. Берем произведение элементов, стоящих на главной диагонали. К нему прибавляем произведение элементов, лежащих на параллели выше главной диагонали и элемента из противоположного угла. Затем прибавляем произведение элементов, лежащих на параллели ниже главной диагонали и элемента из противоположного угла. А затем вычитаем три слагаемых, которые строятся таким же образом, но относительно побочной диагонали (рис. 1.7).

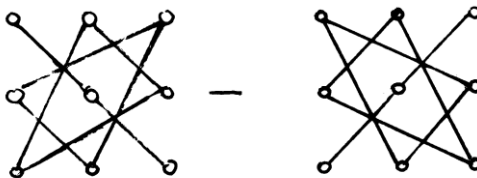


Рис. 1.7.

Пример 1.6.

Найти определитель матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - \\ - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 6 + 1 + 24 + 18 - 4 + 2 = \mathbf{47}.$$

Также определитель 3-го порядка можно вычислить с помощью разложения по элементам какой-нибудь строки или столбца. Например, по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для матрицы A из примера 1.6

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \\ = (6 - 4) + (2 + 1) + 3(8 + 6) = 2 + 3 + 42 = \mathbf{47}.$$

Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора переход от первого ко второму виден происходящим против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов – *левая*.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то такая тройка не относится ни к правым тройкам, ни к левым.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$, такой что:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т. е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Если хотя бы один из векторов равен $\vec{0}$, то векторное произведение по определению равно $\vec{0}$.

Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$.
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$ (условие коллинеарности векторов).

5. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна длине вектора векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение находят по формуле:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

Пример 1.7.

Даны три вектора $\vec{a}(1, 0, -1)$; $\vec{b}(-1, 2, 1)$; $\vec{c}(0, 3, 4)$.

Найти: 1) векторное произведение вектора $3\vec{a}$ на вектор $\vec{b} - \vec{c}$;

2) длину вектора векторного произведения векторов

$3\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$;

3) площадь параллелограмма, построенного на векторах

$3\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

Решение

1) Найдем координаты вектора $3\vec{a}$ и вектора $\vec{b} - \vec{c}$:

$3\vec{a} = (3, 0, -3)$;

$$\bar{b} - \bar{c} = (-1 - 0, 2 - 3, 1 - 4) = (-1, -1, -3)$$

Координаты вектора векторного произведения вектора $3\bar{a}$ на вектор $\bar{b} - \bar{c}$ найдем по формуле:

$$\begin{aligned} [3\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(0 \cdot (-3) - (-3)(-1)) - \bar{j}(3 \cdot (-3) - (-3)(-1)) + \\ &+ \bar{k}(3 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)) = -3\bar{i} + 12\bar{j} - 3\bar{k}. \end{aligned}$$

2) Найдем длину вектора векторного произведения векторов $3\bar{a}$ и $\bar{b} - \bar{c}$.

$$|[3\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}]| = \sqrt{(-3)^2 + (12)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 144 + 9} = \sqrt{162};$$

3) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\bar{a}$ и $\bar{b} - \bar{c}$ равна длине вектора их векторного произведения, найденного ранее:

$$.S = |[3\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}]| = \sqrt{162}.$$

Пример 1.8.

Дано: $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=2$, $\angle \bar{a}, \bar{b} = \frac{\pi}{3}$.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного по векторам $\overline{AB} = 4\bar{a} + \bar{b}$ и $\overline{AD} = -5\bar{b} + 3\bar{a}$.

Решение

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, равна длине вектора векторного произведения этих векторов:

$$S_{ABCD} = |[\overline{AB}, \overline{AD}]| = |[4\bar{a} + \bar{b}, -5\bar{b} + 3\bar{a}]|.$$

Для вычисления длины вектора $[4\bar{a} + \bar{b}, -5\bar{b} + 3\bar{a}]$ воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

$$\begin{aligned} [\bar{a}, \bar{b}] &= -[\bar{b}, \bar{a}]; \\ [\lambda \bar{a}, \bar{b}] &= \lambda [\bar{a}, \bar{b}]; \\ [\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] &= [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]; \\ [\bar{a}, \bar{a}] &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| [4\bar{a} + \bar{b}, 3\bar{a} - 5\bar{b}] \right| = \left| [4\bar{a}, 3\bar{a}] + [4\bar{a}, -5\bar{b}] + [\bar{b}, 3\bar{a}] + [\bar{b}, -5\bar{b}] \right| = \\
 & = \left| 12[\bar{a}, \bar{a}] - 20[\bar{a}, \bar{b}] + 3[\bar{b}, \bar{a}] - 5[\bar{b}, \bar{b}] \right| = \left| -20[\bar{a}, \bar{b}] - 3[\bar{a}, \bar{b}] \right| = \left| -23[\bar{a}, \bar{b}] \right| = \\
 & = 23 \left| \bar{a} \right| \left| \bar{b} \right| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 23 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 230 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 115 \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = 115 \sqrt{3}.$$

Пример 1.9.

Дано: $\left| \bar{a} \right| = 1, \left| \bar{b} \right| = 2, \angle \bar{a}, \bar{b} = \frac{\pi}{4}.$

Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} + \bar{b}$ и $3\bar{a} - 4\bar{b}$.

Решение

Пусть $\overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}; \overline{BC} = 3\bar{a} - 4\bar{b}.$

Тогда площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ равна половине длины вектора их векторного произведения.

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \left| [\bar{a} + \bar{b}, 3\bar{a} - 4\bar{b}] \right| = \left. \begin{array}{l} \text{воспользуемся} \\ \text{свойствами} \\ \text{векторного} \\ \text{произведения} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left| [\bar{a}, 3\bar{a}] + [\bar{b}, 3\bar{a}] - [\bar{a}, 4\bar{b}] - [\bar{b}, 4\bar{b}] \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left| 3[\bar{a}, \bar{a}] + 3[\bar{b}, \bar{a}] - 4[\bar{a}, \bar{b}] - 4[\bar{b}, \bar{b}] \right| = \left| \begin{array}{l} \text{так как } [\bar{a}, \bar{a}] = 0 \text{ и} \\ [\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}] \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left| -3[\bar{a}, \bar{b}] - 4[\bar{a}, \bar{b}] \right| = \frac{1}{2} \left| -7[\bar{a}, \bar{b}] \right| = \frac{7}{2} \left| [\bar{a}, \bar{b}] \right| = \\
 &= \frac{7}{2} \left| \bar{a} \right| \cdot \left| \bar{b} \right| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.10.

Дано: $\bar{a}(-3, 1, 4)$, $\bar{b}(2, 3, -5)$, $\bar{c}(1, 9, -5)$, $\bar{d}(0, 11, -7)$

Найти векторное произведение векторов $\bar{p} = -3\bar{a} + \bar{c}$ и $\bar{q} = -5\bar{b} + 3\bar{d}$.

Решение

Найдем координаты векторов $\bar{p} = -3\bar{a} + \bar{c}$ и $\bar{q} = -5\bar{b} + 3\bar{d}$:

$$\bar{p} = -3\bar{a} + \bar{c} = (10, 6, -17);$$

$$\bar{q} = -5\bar{b} + 3\bar{d} = (-10, 18, 4).$$

Координаты вектора векторного произведения векторов $\bar{p}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{q}(x_2, y_2, z_2)$ находим по формуле:

$$[\bar{p}, \bar{q}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\bar{p}, \bar{q}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 6 & -17 \\ -10 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \begin{vmatrix} 6 & -17 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 10 & -17 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ -10 & 18 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (24 + 306)\bar{i} - (40 - 170)\bar{j} + (180 + 60)\bar{k} = 330\bar{i} + 130\bar{j} + 240\bar{k}.$$

Следовательно,

$$[-3\bar{a} + \bar{c}, -5\bar{b} + 3\bar{d}] = 330\bar{i} + 130\bar{j} + 240\bar{k}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ принято обозначать символом $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Свойства смешанного произведения

$$1. (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{cases} V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{правая тройка,} \\ -V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{левая тройка,} \end{cases}$$

где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

2. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, если их смешанное произведение равно нулю, т.е. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

$$3. (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}).$$

Если векторы, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение может быть найдено по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.11.

Дано: $\bar{a}(-3, 1, 4)$, $\bar{b}(2, 3, -5)$, $\bar{c}(1, 9, -5)$, $\bar{d}(0, 11, -7)$.

Найти: 1) смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

2) выяснить образуют ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$

Решение

1) Если векторы заданы в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение этих векторов находим по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Координаты векторов $\bar{a}(-3, 1, 4)$, $\bar{b}(2, 3, -5)$ и $\bar{c}(1, 9, -5)$, тогда

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-15 + 45) - (-10 + 5) + 4(18 - 3) = -90 + 5 + 60 = -25.$$

Итак, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -25$.

2) Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ не равно нулю, следовательно, векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно независимы, а значит, **образуют базис в $\mathbb{R}^3$** .

Пример 1.12.

Установить, образуют ли приведенные ниже векторы в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис:

1) $\bar{a}(1, 2, 3); \bar{b}(-1, 0, 2); \bar{c}(-1, 3, 2);$

2) $\bar{a}(2, 1, 1); \bar{b}(5, 3, 5); \bar{c}(7, 4, 6).$

Решение

1) Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда они некопланарны, а значит, их смешанное произведение не равно нулю.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 4(-1) - 6 + 4 = -15 \neq 0$$

Следовательно, векторы не компланарны, а значит, они образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

2) Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(18 - 20) - (30 - 35) + (20 - 21) = -4 + 5 - 1 = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны, а значит, они не образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Пример 1.13.

Вычислить объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} (3, 4, 0)$,
 $\vec{b} (0, -3, 1)$, $\vec{c} (0, 2, 5)$.

Решение

$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}}$, где $V_{\text{пар.}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения:

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{array} \right| = 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(-15 - 2) = -51;$$

$$V_{\text{пар.}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 51.$$

Объем тетраэдра $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}}$, следовательно

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} 51 = \frac{17}{2}.$$

Пример 1.14.

Выяснить лежат ли точки $A (-1, 4, 2)$, $B (-3, 3, 1)$, $C (0, 2, 5)$ и

$D (4, 1, 5)$ в одной плоскости.

Решение

Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю.

Найдем координаты векторов: $\overline{AB} = (-2, -1, -1)$; $\overline{AC} = (1, -2, 3)$;
 $\overline{AD} = (5, -3, 3)$. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -2(-6+9)+1(3-15)-1(-3+10)=-25.$$

Смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ не равно нулю, следовательно, векторы некомпланарные, а значит, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

1.2. Прямая на плоскости

Виды уравнений прямой на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана одним из следующих ниже уравнений.

1. Прямая на плоскости однозначно задается точкой и вектором, перпендикулярным к этой прямой. Такой вектор называется *нормальным* вектором (рис. 1.8).

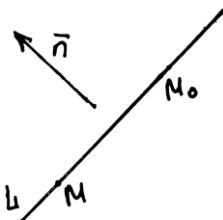


Рис. 1.8.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка, лежащая на прямой L ; а вектор $\overline{n}(A, B)$ – нормальный вектор прямой L . Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на этой прямой, вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ будет перпендикулярен вектору $\overline{n}$, а значит, их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$\overline{M_0M} \perp \overline{n} \Rightarrow (\overline{M_0M}; \overline{n}) = 0;$$

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 -$$

получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B)$.

2. Выведем из полученного выше уравнения общее уравнение прямой:

Пусть

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

Раскроем скобки:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим $(-Ax_0 - By_0) = C$, тогда получаем

$$Ax + By + C = 0 -$$

общее уравнение прямой на плоскости, где коэффициенты A, B - координаты нормального вектора.

3. Прямая на плоскости так же однозначно задается точкой и вектором, параллельным этой прямой. Такой вектор называется *направляющим* (рис. 1.9).

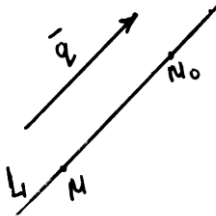


Рис. 1.9.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - точка, лежащая на прямой L ; а вектор $\vec{q}(l, m)$ - направляющий вектор этой прямой. Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на этой прямой, вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ будет коллинеарен вектору $\vec{q}(l, m)$; следовательно, координаты вектора $\overline{M_0M}$ будут пропорциональны координатам вектора $\vec{q}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} -$$

получили каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{q}(l, m)$.

4. Получим из канонического уравнения прямой параметрическое уравнение, введя параметр t :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t;$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l, m)$.

5. Если $C \neq 0$, то можно из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ получить уравнение прямой «в отрезках». Разделим общее уравнение $Ax + By = -C$ на коэффициент $(-C)$:

$$-\frac{A}{C}x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1.$$

Обозначим: $-\frac{C}{A} = a$; $-\frac{C}{B} = b$, тогда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 -$$

уравнение прямой в отрезках, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой от координатных осей (рис. 1.10).

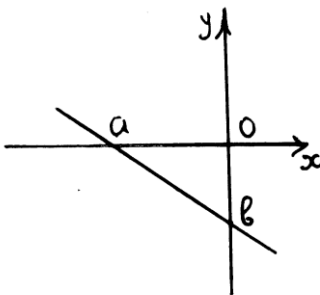


Рис. 1.10.

6. Если $B \neq 0$, то можно получить уравнение прямой с угловым коэффициентом. Из общего уравнения $Ax + By + C = 0$ выразим y через x :

$$By = -Ax - C;$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$, тогда

$$y = kx + b -$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом,
где k – угловой коэффициент прямой, или тангенс угла между прямой и осью OX , $k = \operatorname{tg}\alpha$;

b – ордината точки пересечения прямой с осью OY (рис. 1.11).

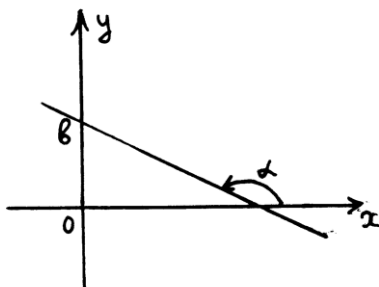


Рис. 1.11.

7. Найдем уравнение прямой L , проходящей через 2 точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости. Тогда $\vec{q} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ – направляющий вектор этой прямой, а точка $A(x_1, y_1) \in L$.

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{q}$ должны быть коллинеарны, а значит, их координаты должны быть пропорциональны (рис. 1.12):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} -$$

получили уравнение прямой, проходящей через точки A и B .

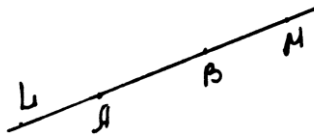


Рис. 1.12

Взаимное расположение прямых на плоскости

Прямые на плоскости могут совпадать, пересекаться или быть параллельными.

1. Пусть на плоскости заданы общими уравнениями две прямые L_1 и L_2 :

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ – нормальные векторы прямых L_1 и L_2 , соответственно.

Прямые на плоскости совпадают или параллельны, если их направляющие вектора коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны.

Следовательно, прямые:

а) совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

б) параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

в) пересекаются, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

2. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1};$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2};$$

Тогда, прямые:

а) совпадают, если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2};$

б) параллельны, если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{m_2};$

в) пересекаются, если $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2}$

3. Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$L_1: y = k_1x + b_1,$$

$$L_2: y = k_2x + b_2,$$

то эти прямые:

а) совпадают, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2;$

б) параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2;$

в) пересекаются, если $k_1 \neq k_2.$

Угол между прямыми на плоскости

1. Пусть на плоскости заданы прямые L_1 и L_2 общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда косинус наименьшего угла между двумя прямыми L_1 и L_2 на плоскости равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих прямых:

$$\cos\left(\widehat{\overline{L_1}, \overline{L_2}}\right) = \left| \cos\left(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}}\right) \right| = \frac{\left| \left(\overline{n_1}, \overline{n_2} \right) \right|}{\left| \overline{n_1} \right| \cdot \left| \overline{n_2} \right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

В случае если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, их нормальные векторы также перпендикулярны, а значит, скалярное произведение равно нулю.

изведение нормальных векторов должно быть равно нулю, т. е.
 $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$

2. Если прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1};$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2};$$

то косинус наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

$$\cos\left(\overline{\overline{L_1}}, \overline{\overline{L_2}}\right) = \left| \cos\left(\overline{\overline{q_1}}, \overline{\overline{q_2}}\right) \right| = \frac{\left| \left(\overline{\overline{q_1}}, \overline{\overline{q_2}}\right) \right|}{\left| \overline{\overline{q_1}} \right| \cdot \left| \overline{\overline{q_2}} \right|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2|}{\sqrt{l_1^2 + l_1'^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + m_2'^2}}$$

2. Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$\begin{aligned} L_1: y &= k_1 x + b_1, \\ L_2: y &= k_2 x + b_2, \end{aligned}$$

то тангенс наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 можно найти по формуле:

$$tg\left(\overline{\overline{L_1}}, \overline{\overline{L_2}}\right) = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|,$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2 .

Заметим, что если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка M_0 , не принадлежащая этой прямой

$$L: Ax + By + C = 0; M_0(x_0, y_0) \notin L,$$

тогда

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} -$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L .

Замечание. Расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости можно найти по последней формуле, если находить расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

Пример 1.15.

Написать уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(0, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(-1, 1)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен нормальному вектору $\vec{n}$: $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$ (рис. 1.13)

Следовательно, их скалярное произведение должно быть равно нулю: $(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0$.

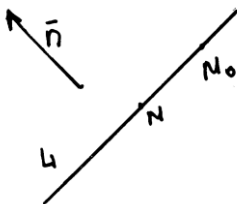


Рис. 1.13

Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{M_0M}$ и $\vec{n}$:

$$(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 1(x - 0) - 1(y - 2) = 0.$$

Тогда общее уравнение прямой:

$$x - y + 2 = 0.$$

Пример 1.16.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(6, 2)$ параллельно вектору $\vec{q}(0, -1)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{q}(0, -1)$ (рис. 1.14). Следовательно, их координаты должны быть пропорциональны.

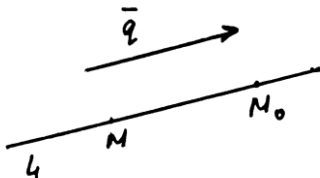


Рис. 1.14

$\overrightarrow{M_0M}(x - 6, y - 2)$ – координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$.

Тогда каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - 6}{0} = \frac{y - 2}{-1}.$$

Пример 1.17.

Написать уравнение прямой L , проходящей через точки $M_0(6, 2)$ и $M_1(0, 1)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , вектор $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_0}$ (рис. 1.15), а значит, их координаты должны быть пропорциональны.



Рис. 1.15

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M}(x-0, y-1); \overrightarrow{M_1M_0}(6-0, 2-1) = (6, 1)$$

Тогда каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x}{6} = \frac{y-1}{1}.$$

Пример 1.18.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(6, 2)$ параллельно прямой $L_1: 3x - y + 1 = 0$.

Решение

Вектор $\vec{n}_1(3, -1)$ – нормальный вектор прямой L_1 . Прямые L и L_1 параллельны, следовательно, вектор $\vec{n}_1$ перпендикулярен прямой L . А значит, для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_1$ (рис. 1.16). Следовательно, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}_1$ должно быть равно нулю.

Зная координаты векторов $\overrightarrow{M_0M}(x-6, y-2)$ и $\vec{n}_1(3, -1)$, найдем их скалярное произведение:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}_1) = 3(x-6) - 1(y-2) = 0;$$

$$3x - 18 - y + 2 = 0;$$

$$3x - y - 16 = 0 \text{ — общее уравнение прямой } L.$$

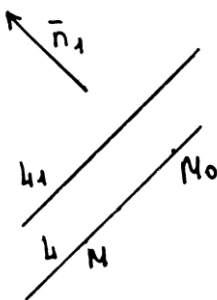


Рис. 1.16

Пример 1.19.

Написать уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(6, 2)$ перпендикулярно прямой $L_1: 3x - y + 1 = 0$.

Решение

Прямые L и L_1 перпендикулярны, следовательно, нормальный вектор прямой L_1 параллелен прямой L .

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L , вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{n}_1$ (рис. 1.17). Следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны.

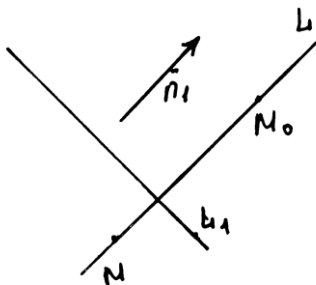


Рис. 1.17

Координаты векторов: $\overline{M_0M}(x - 6, y - 2)$; $\vec{n}_1(3, -1)$.

Тогда уравнение прямой: $\frac{x - 6}{3} = \frac{y - 2}{-1}$.

Пример 1.20. Даны координаты точек $Q(-3, 1)$, $L(4, 9)$, $P(3, 2)$.

- 1) Проверить, лежат ли точки на одной прямой;
- 2) написать уравнение прямой QL ;
- 3) написать уравнение медианы QM в треугольнике $\triangle QPL$;
- 4) написать уравнение высоты, проведенной из вершины Q ;
- 5) найти координаты точки пересечения медиан в $\triangle QPL$;
- 6) найти угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q .

Решение

- 1) Проверим, лежат ли точки на одной прямой.

Если точки Q, L, P лежат на одной прямой, то вектор $\overline{LP}$ коллинеарен вектору $\overline{QL}$, а значит, их координаты должны быть

пропорциональны (рис. 1.18). Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QL} = (4 - (-3), 9 - 1) = (7, 8)$ и $\overrightarrow{LP} = (3 - 4, 2 - 9) = (-1, -7)$. Координаты векторов $\overrightarrow{LP}$ и $\overrightarrow{QL}$ не пропорциональны, т.к. $\frac{-1}{7} \neq \frac{-7}{8}$, следовательно, векторы не коллинеарны, а значит, точки Q, L, P не лежат на одной прямой.

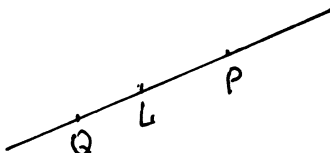


Рис. 1.18

2) Напишем уравнение прямой QL .

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QL , вектор $\overrightarrow{QM}$ должен быть коллинеарен вектору $\overrightarrow{QL}$ (рис. 1.19), а значит, их координаты должны быть пропорциональны. Координаты векторов: $\overrightarrow{QM} = (x + 3, y - 1)$; $\overrightarrow{QL} = (7, 8)$. Тогда

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y-1}{8} \text{ — каноническое уравнение прямой } QL.$$

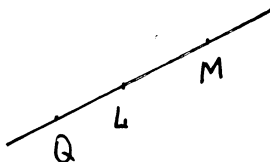


Рис. 1.19

3) Напишем уравнение медианы, проведенной из вершины Q в треугольнике QPL (рис. 1.20).

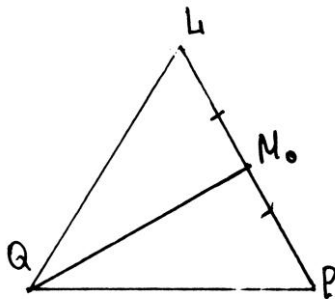


Рис. 1.20

Найдем координаты точки M_0 . Точка M_0 — середина отрезка LP , значит, ее координаты можно найти как среднее арифметическое координат точек L и P . Координаты точек, тогда координаты точки M_0 :

$$M_0\left(\frac{4+3}{2}, \frac{9+2}{2}\right) \Rightarrow M_0\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

Напишем уравнение прямой QM_0 . Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QM_0 , вектор $\overrightarrow{QM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{QM_0}$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QM_0}$ и $\overrightarrow{QM}$:

$$\overrightarrow{QM_0} = \left(\frac{7}{2} - (-3), \frac{11}{2} - 1\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right); \quad \overrightarrow{QM} = (x+3, y-1).$$

Запишем условие пропорциональности координат:

$$\frac{x+3}{13/2} = \frac{y-1}{9/2} \quad (\text{умножим на } (1/2)).$$

Получили:

$$\frac{x+3}{13} = \frac{y-1}{9} \quad - \text{ каноническое уравнение медианы } QM_0.$$

4) Напишем уравнение высоты, проведенной из вершины Q (рис. 1.21).

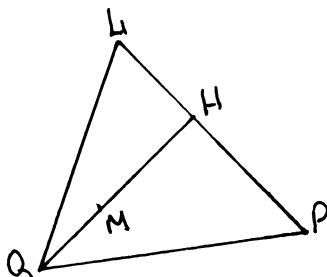


Рис. 1.21

Пусть QH – высота. Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой QH , вектор $\overrightarrow{QM}$ должен быть перпендикулярен вектору $\overrightarrow{LP}$, а значит, скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю, т.е. $(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{LP}) = 0$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QM}(x+3, y-1)$ и $\overrightarrow{LP}(-1, -7)$, тогда

$$(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{LP}) = -1(x+3) - 7(y-1) = 0;$$

$$x+3+7y-7=0;$$

$$x+7y-4=0.$$

$x+7y-4=0$ – получили уравнение высоты QH .

5) Найдем координаты точки пересечения медиан в $\triangle QPL$ (рис. 1.22).

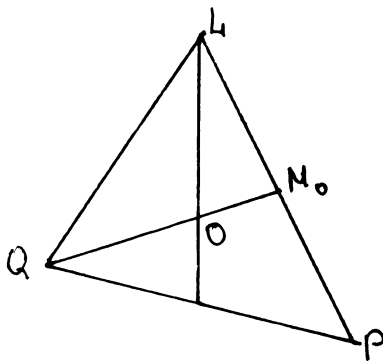


Рис. 1.22

Медианы треугольника делятся точкой их пересечения в соотношении 2:1, начиная от вершины:

$$\frac{|QO|}{|OM_0|} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{QO} = \frac{2}{3} \overline{QM_0};$$

Координаты вектора $\overline{QM_0}$ были найдены ранее. (см. п. 3 наст. задачи).

$$\overline{QM_0} = \left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2} \right) \Rightarrow \overline{QO} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{2}, \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{13}{3}, 3 \right).$$

Пусть $O(x, y)$, тогда координаты вектора $\overline{QO} = (x + 3, y - 1) = \left(\frac{13}{3}, 3 \right)$. Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты :

$$\begin{cases} x + 3 = \frac{13}{3} \\ y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3} \\ y = 4 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$O\left(\frac{4}{3}, 4\right) \text{ — точка пересечения медиан } \triangle QPL.$$

б) Найдем угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q (рис. 1.23).

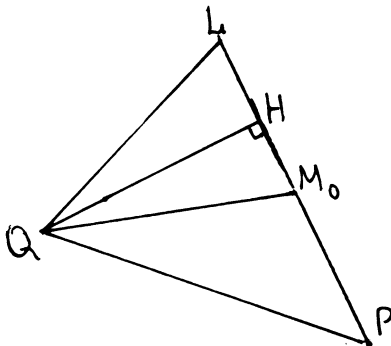


Рис. 1.23

Косинус наименьшего угла между прямыми равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих прямых: Урав-

нение прямой QH : $x + 7y - 4 = 0$, тогда, нормальный вектор этой прямой $\vec{n}_2(1, 7)$.

Напишем общее уравнение прямой QM_0 , используя каноническое уравнение (см. п. 2 наст. задачи).

$$\frac{x+3}{13} = \frac{y-1}{9}$$

По свойству пропорций получим

$$9(x+3) = 13(y-1).$$

Тогда имеем:

$$9x + 27 = 13y - 13 \Rightarrow$$

$9x - 13y + 40 = 0$ – общее уравнение прямой QM_0 . Следова-

тельно, нормальный вектор прямой QM_0 – вектор $\vec{n}_1(9, -13)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{QM_0, QH}) &= \left| \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \right| = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{|9 \cdot 1 - 13 \cdot 7|}{\sqrt{9^2 + (-13)^2} \sqrt{1 + 7^2}} = \frac{82}{\sqrt{81 + 169} \cdot \sqrt{50}} = \frac{82}{\sqrt{250} \cdot \sqrt{50}} = \frac{41}{25\sqrt{5}} \end{aligned}$$

.7) Найдем расстояние от точки P до прямой QL (рис. 1.24).

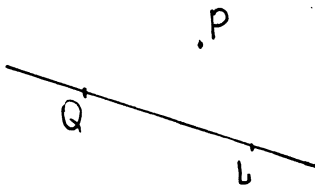


Рис. 1.24

Запишем уравнение прямой QL (см. п. 2 наст. задачи).

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y-1}{8}.$$

Перейдем к общему уравнению прямой:

$$8(x+3) = 7(y-1);$$

$$8x + 24 = 7y - 7$$

$8x - 7y + 31 = 0$ – получим общее уравнение прямой QL .

Точка $P(3, 2) \notin QL$.

Расстояние от точки до прямой на плоскости можно найти по формуле: $\rho(M, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где $L: Ax + By + C = 0$, $M(x_0, y_0)$.

В нашем случае

$$\rho(P, QL) = \frac{|8 \cdot 3 - 7 \cdot 2 + 31|}{\sqrt{8^2 + (-7)^2}} = \frac{|24 - 14 + 31|}{\sqrt{64 + 49}} = \frac{41}{\sqrt{113}}.$$

Пример 1.21.

Выяснить взаимное расположение прямых L_1 и L_2 . Если прямые пересекаются, то найти угол между ними и координаты точки их пересечения, а если параллельны, то найти расстояние между ними.

$$1) L_1: -x + 2y + 1 = 0;$$

$$L_2: 2x - 4y + 5 = 0;$$

$$2) L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1};$$

$$L_2: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{2}.$$

Решение

1) Запишем координаты нормальных векторов прямых L_1 и L_2 :

$\vec{n}_1(-1, 2)$ – нормальный вектор прямой L_1 ;

$\vec{n}_2(2, -4)$ – нормальный вектор прямой L_2 .

Найдем отношение координат нормальных векторов прямых:

$$-\frac{1}{2} = \frac{2}{-4}.$$

Так как координаты нормальных векторов пропорциональны, следовательно, векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, а значит, прямые L_1 и L_2 либо параллельны, либо совпадают.

Так как

$$-\frac{1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{1}{5}, \text{ то, прямые параллельны.}$$

Расстояние между прямыми найдем, как расстояние от точки M_1 , лежащей на прямой L_1 , до прямой L_2 по формуле:

$$\rho(M_1, L_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $L_2 : Ax + By + C = 0, M_1(x_0, y_0)$.

Найдем координаты точки M_1 , принадлежащей прямой L_1 . Для этого одну из координат, например y_0 , примем равной нулю ($y_0 = 0$), тогда $x_0 = 1$, значит точка $M_1(1, 0) \in L_1$.

Тогда

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(M_1, L_2) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

$$2) L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1};$$

$$L_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{2}.$$

Найдем направляющие векторы прямых L_1 и L_2 :

$$\vec{q}_1(2, -1); \vec{q}_2(0, 2).$$

Координаты направляющих векторов не пропорциональны:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{2}{-1}.$$

Следовательно, прямые L_1 и L_2 не параллельны, т.е., прямые L_1 и L_2 пересекаются. Косинус наименьшего угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых. (рис. 1.25):

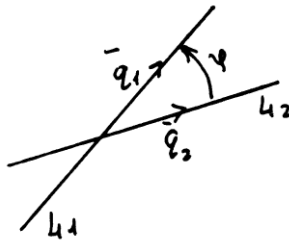


Рис. 1.25

Тогда

$$\cos(\angle L_1, L_2) = \left| \cos(\angle \vec{q}_1, \vec{q}_2) \right| = \frac{|\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle|}{\|\vec{q}_1\| \|\vec{q}_2\|} =$$

$$= \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{4+1}\sqrt{0+4}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Найдем координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 . Для этого получим общие уравнения этих прямых.

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} \Rightarrow -x+1 = 2y+6 \Rightarrow x+2y+5 = 0$$

$$L_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0.$$

Пусть точка $M(x_0, y_0)$ - точка пересечения прямых L_1 и L_2 . Тогда координаты точки M должны удовлетворять обоим уравнениям. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+5=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=1 \end{cases}.$$

Следовательно, точка $M(1, -3)$ точка пересечения прямых L_1 и L_2 .

1.3. Плоскость в пространстве

Виды уравнений плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве может быть задана одним из следующих ниже уравнений.

1. Плоскость в пространстве однозначно задается точкой и вектором, перпендикулярным этой плоскости. Такой вектор называется нормальным.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая плоскости P , а вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости P (рис. 1.26.). Тогда для любой точки M , лежащей в плоскости P , вектор $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, а значит, их скалярное произведение должно быть равным нулю.

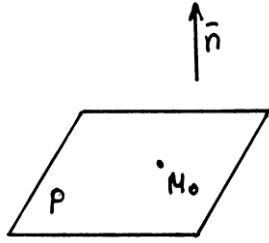


Рис. 1.26

$$\overline{M_0M} \perp \bar{n} \Rightarrow (\overline{M_0M} \cdot \bar{n}) = 0;$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 -$$

получили уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(A, B, C)$.

2. Выведем из полученного выше уравнения общее уравнение плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначим $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тогда получаем

$$Ax + By + Cz + D = 0 -$$

общее уравнение плоскости, где коэффициенты A, B и C - координаты вектора нормали.

3. Если $D \neq 0$, можно получить уравнение плоскости «в отрезках» из общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, разделив его на $(-D)$:

$$-\frac{A}{D}x + \left(-\frac{B}{D}\right)y + \left(-\frac{C}{D}\right)z = 1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$, тогда получаем уравнение плоскости в «отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных осей.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть в пространстве заданы две плоскости P_1 и P_2

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2 , соответственно.

Плоскости в пространстве могут совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Плоскости совпадают или параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны, а значит, координаты нормальных векторов должны быть пропорциональны. Следовательно, плоскости:

1) совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$

2) параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$

3) пересекаются – в остальных случаях.

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2 , соответственно.

Косинус наименьшего двугранного угла между плоскостями P_1 и P_2 равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих плоскостей:

$$\cos(\hat{P}_1, \hat{P}_2) = \left| \cos(\hat{n}_1, \hat{n}_2) \right| = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M(x_0, y_0, z_0)$ не лежащая в плоскости P .

Тогда $\rho(M, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – расстояние от точки

$M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P .

Замечание. Расстояние между двумя параллельными плоскостями можно найти по той же формуле, если находить расстояние от любой точки, принадлежащей одной плоскости, до другой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Пусть плоскость P проходит через точки $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$; $C(x_3, y_3, z_3)$.

Тогда для любой точки M , принадлежащей плоскости P , векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение должно быть равно нулю. Запишем координаты векторов:

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1); \\ \overline{AB} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1); \\ \overline{AC} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).\end{aligned}$$

Тогда смешанное произведение векторов $(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$. Его можно вычислить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв, данный определитель по элементам первой строки, получим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пример 1.22.

Написать уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно плоскости P_1 : $x - y + z - 3 = 0$.

Решение

Плоскость P параллельна плоскости P_1 , следовательно, нормальный вектор $\vec{n}_1$ плоскости P_1 перпендикулярен плоскости P (рис. 1.27).

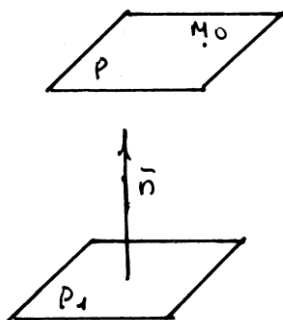


Рис. 1.27

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости P , вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_1$, следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\overrightarrow{M_0M}$ равно нулю.

Координаты нормального вектора $\vec{n}_1$, плоскости P_1 — это коэффициенты перед x, y и z в уравнении плоскости:

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1).$$

Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - 2, y, z + 3)$.

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\overrightarrow{M_0M}$:

$$(\vec{n}_1, \overrightarrow{M_0M}) = 1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot y + 1 \cdot (z + 3) = 0;$$

$$x - 2 - y + z + 3 = 0;$$

$$x - y + z + 1 = 0$$

уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно плоскости P_1 .

Пример 1.23.

Написать уравнение плоскости P , проходящей через точки $M_1(1, 2, -1)$ и $M_0(2, 0, -3)$ перпендикулярно плоскости $P_1: x - y + z - 3 = 0$.

Решение

Координаты нормального вектора $\vec{n}_1$ плоскости P_1 . — это коэффициенты перед x, y и z в уравнении плоскости:

$$\vec{n}_1(1, -1, 1).$$

Плоскости P и P_1 перпендикулярны, следовательно, вектор нормали плоскости P_1 параллелен плоскости P .

Точки $M_1(1, 2, -1)$ и $M_0(2, 0, -3)$ лежат в плоскости P . (рис. 1.28). Следовательно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости P , векторы $\overline{M_1M_0}$, $\overline{M_1M}$ и $\vec{n}_1$ должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение должно быть равно нулю

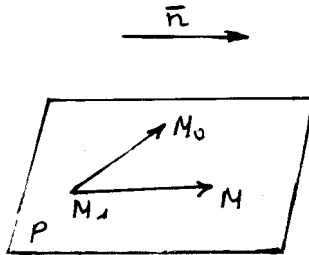


Рис. 1.28

Найдем координаты векторов $\overline{M_1M} = (x - 1, y - 2, z + 1)$ и $\overline{M_1M_0} = (2 - 1, 0 - 2, -3 + 1) = (1, -2, -2)$.

Тогда смешанное произведение векторов $\overline{M_1M_0}$, $\overline{M_1M}$ и $\vec{n}_1$:

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_0}, \vec{n}_1) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-2-2)(x-1) - (1+2)(y-2) + (-1+2)(z+1) = 0;$$

$$-4(x-1) - 3(y-2) + (z+1) = 0;$$

$$-4x + 4 - 3y + 6 + z + 1 = 0;$$

$$-4x - 3y + z + 11 = 0 \quad | :(-1).$$

$$4x + 3y - z - 11 = 0$$

– уравнение плоскости P , проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно плоскости P_1 .

Пример 1.24.

Написать уравнение плоскости P , проходящей через точки $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(0, 2, 1)$ параллельно вектору $\vec{a}(3, 2, 5)$.

Решение

Вектор $\overline{M_1M}$ лежит в плоскости P , а вектор $\vec{a}$ параллелен данной плоскости, следовательно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости P , векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\vec{a}$ должны быть компланарны (рис. 1.29), а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю.

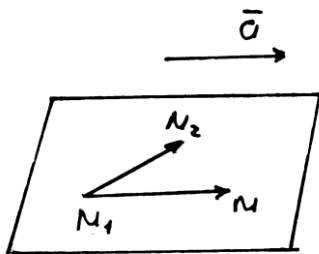


Рис. 1.29

Найдем координаты векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$:

$$\overline{M_1M_2} = (0-1, 2-2, 1+1) = (-1, 0, 2) \text{ и}$$

$$\overline{M_1M} = (x-1, y-2, z+1).$$

Тогда, смешанное произведение векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\vec{a}$:

$$(\overline{M_1 M}, \overline{M_1 M_2}, \overline{a}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по 1-й строке:

$$(x-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(0 \cdot 5 - 2 \cdot 2)(x-1) - (-5 - 2 \cdot 3)(y-2) + (-2 - 3 \cdot 0)(z+1) = 0;$$

$$-4(x-1) + 11(y-2) - 2(z+1) = 0;$$

$$-4x + 4 + 11y - 22 - 2z - 2 = 0;$$

$$\mathbf{-4x + 11y - 2z - 20 = 0}$$

уравнение плоскости P , проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\overline{a}$.

Пример 1.25.

Написать уравнение плоскости P , проходящей через три точки $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(0, 2, 3)$ и $M_3(1, -1, 0)$.

Решение

Проверим, что точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой, для этого найдем координаты векторов:

$$\overline{M_1 M_2} = (0 - 1, 2 - 2, 3 + 1) = (-1, 0, 4);$$

$$\overline{M_1 M_3} = (1 - 1, -1 - 2, 0 + 1) = (0, -3, 1).$$

Векторы $\overline{M_1 M_2}$ и $\overline{M_1 M_3}$ не коллинеарные (так как их координаты не пропорциональны), значит, точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой.

Напишем уравнение плоскости P . Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости P , векторы $\overline{M_1 M}$, $\overline{M_1 M_2}$ и $\overline{M_1 M_3}$ должны быть компланарны (рис. 1.30), а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю:

$$(\overline{M_1 M}, \overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3}) = 0.$$

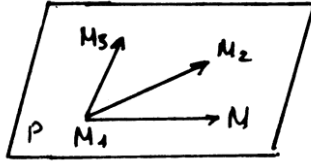


Рис. 1.30

Найдем координаты векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$:

$$\overline{M_1M} = (x-1, y-2, z+1);$$

$$\overline{M_1M_2} = (-1, 0, 4);$$

$$\overline{M_1M_3} = (0, -3, 1).$$

Тогда их смешанное произведение:

$$\begin{aligned} (\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) &= \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(0 \cdot 1 - (-3) \cdot 4) - (y-2)(-1 \cdot 4 - 0) + (z+1)(-1(-3) - 0) = \\ &= 12(x-1) + y-2 + 3(z+1) = 0; \\ 12x - 12 + y - 2 + 3z + 3 &= 0; \\ \mathbf{12x + y + 3z - 11 = 0} \end{aligned}$$

уравнение плоскости P , проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .

Пример 1.26.

Выяснить взаимное расположение плоскостей. Если плоскости параллельны, найти расстояние между ними, а если пересекаются, то — угол между ними.

- 1) $P_1: x - 3y + 4z - 1 = 0$,
 $P_2: -3x + 9y - 12z + 4 = 0$;
- 2) $P_1: 2x - 3y + z - 5 = 0$,
 $P_2: 9x + y - 4z - 1 = 0$.

Решение

- 1) Запишем координаты нормальных векторов плоскостей P_1 и P_2 .

$\vec{n}_1(1, -3, 4)$ – нормальный вектор плоскости P_1 ;

$\vec{n}_2(-3, 9, -12)$ – нормальный вектор плоскости P_2 .

$$\frac{1}{-3} = \frac{-3}{9} = \frac{4}{12} \neq -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{плоскости параллельны, так как ко-}$$

ординаты их нормальных векторов пропорциональны.

Найдем координаты точки M_1 , принадлежащей плоскости P_1 . Для этого примем y_0 и z_0 равными 0, тогда $x_0 = 1$: $M_1(1, 0, 0)$. Найдем расстояние между плоскостями P_1 и P_2 как расстояние от точки M_1 , лежащей в плоскости P_1 , до плоскости P_2 по формуле:

$$\rho(P_2, M_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

где $P_2: Ax + By + Cz + D = 0$, $M_1(x_0, y_0, z_0)$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \rho(P_1, P_2) &= \rho(M_1, P_2) = \frac{|-3 \cdot 1 + 9 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-12)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + 81 + 144}} = \frac{1}{\sqrt{234}}. \end{aligned}$$

$$2) P_1: 2x - 3y + z - 5 = 0,$$

$$P_2: 9x + y - 4z - 1 = 0.$$

Запишем координаты нормальных векторов плоскостей P_1 и P_2 .

$\vec{n}_1(2, -3, 1)$ – нормальный вектор плоскости P_1 ;

$\vec{n}_2(9, 1, -4)$ – нормальный вектор плоскости P_2 .

$$\frac{2}{9} \neq \frac{-3}{1}$$

Так как координаты нормальных векторов не пропорциональны, то **плоскости пересекаются**.

Косинус наименьшего двугранного угла между плоскостями P_1 и P_2 равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих плоскостей:

$$\begin{aligned}
 \cos(\hat{P}_1, \hat{P}_2) &= \left| \cos(\hat{\bar{n}}_1, \hat{\bar{n}}_2) \right| = \frac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} \\
 &= \frac{|2 \cdot 9 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{9^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \\
 &= \frac{|18 - 3 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 1} \sqrt{81 + 1 + 16}} = \frac{11}{\sqrt{14} \sqrt{98}} = \frac{11}{14\sqrt{7}}.
 \end{aligned}$$

1.4. Прямая в пространстве

Уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана одним из следующих ниже уравнений.

1. Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 . Это общее уравнение прямой в пространстве.

2. Прямая в пространстве однозначно задается точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, и вектором $\bar{q}(l, m, n)$, параллельным этой прямой. Такой вектор называется направляющим (рис. 1.31).

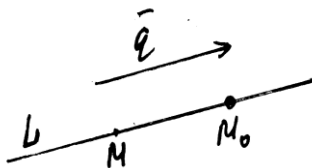


Рис. 1.31

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L , вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{q}$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны.

Координаты вектора:

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, тогда

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} =$$

каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{q} (l, m, n)$.

3. Из канонического уравнения прямой получим параметрическое уравнение, введя параметр $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{q} (l, m, n)$.

Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться или скрещиваться.

Две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда компланарны векторы $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$; где $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , соответственно, а вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ – вектор, соединяющий произвольную точку M_1 , лежащую на прямой L_1 , с точкой M_2 , лежащей на прямой L_2 .

Следовательно, если смешанное произведение векторов $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ равно нулю, то прямые лежат в одной плоскости.

Если прямые принадлежат одной плоскости, то они могут совпадать, пересекаться и быть параллельными.

Пусть заданы прямые L_1 и L_2 :

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1};$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2};$$

где точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на прямой L_1 , точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на прямой L_2 , а $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , соответственно:

Тогда прямые L_1 и L_2 :

1) скрещиваются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

2) пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

и вектор $\vec{q}_1$ не коллинеарен вектору $\vec{q}_2$, т. е. координаты этих векторов не пропорциональны;

3) параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ и точка } M_1(x_1, y_1, z_1) \notin L_2;$$

4) совпадают, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ и точка } M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_2.$$

Угол между прямыми в пространстве

Пусть заданы прямые L_1 и L_2

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

где точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на прямой L_1 , точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на прямой L_2 , а $\bar{q}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\bar{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 . (рис. 1.32).

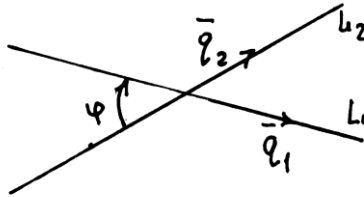


Рис. 1.32

Косинус наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

$$\cos(L_1, L_2) = \left| \cos(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \right| = \frac{|(\bar{q}_1, \bar{q}_2)|}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} =$$

$$= \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть задана прямая $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и точка $M(x_0, y_0, z_0) \notin L$, где $\vec{q}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой L (рис. 1.33).

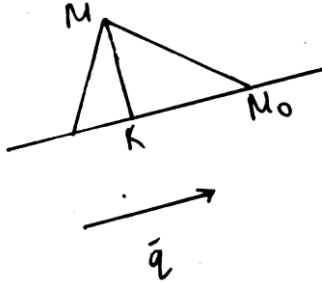


Рис. 1.33

Тогда расстояние от точки M до прямой L можно найти по формуле:

$$\rho(M, L) = |MK| = \frac{|\overrightarrow{[M_0M, \vec{q}]}|}{|\vec{q}|},$$

где $|\overrightarrow{[M_0M, \vec{q}]}|$ – длина вектора векторного произведения вектора

$\overrightarrow{M_0M}$ на вектор $\vec{q}$;

K – проекция точки M на прямую L .

Замечание. Расстояние между параллельными прямыми может быть найдено по этой же формуле, как расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве

Пусть заданы прямые L_1 и L_2

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1};$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

где точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на прямой L_1 , точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на прямой L_2 , а $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

Прямые L_1 и L_2 не лежат в одной плоскости, значит, смешанное произведение векторов $\overline{M_1M_2}$, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ не равно нулю.

Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left(\overline{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \right) \right|}{\left| \left[\vec{q}_1, \vec{q}_2 \right] \right|},$$

где $\left| \left(\overline{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \right) \right|$ – модуль смешанного произведения векторов $\overline{M_1M_2}$, $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

$\left| \left[\vec{q}_1, \vec{q}_2 \right] \right|$ – длина вектора векторного произведения векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы прямая

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \text{ и плоскость } P : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Точка $M(x_0, y_0, z_0) \in L$, вектор $\vec{q}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой L ; вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости P .

Прямая может пересекать плоскость, быть ей параллельной или лежать в плоскости.

1. Если прямая лежит в плоскости, (рис. 1.34), то нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости P перпендикулярен направляющему вектору $\vec{q}$ прямой L и точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.

Таким образом, прямая лежит в плоскости, если:

$$(\vec{n}, \vec{q}) = Al + Bm + Cn = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

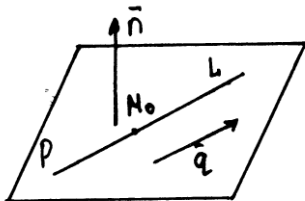


Рис. 1.34

2. Если прямая параллельна плоскости, (рис. 1.35), то нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости P перпендикулярен направляющему вектору $\vec{q}$ прямой L и точка $M(x_0, y_0, z_0) \notin P$.

Таким образом, прямая параллельна плоскости, если:

$$(\vec{n}, \vec{q}) = Al + Bm + Cn = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

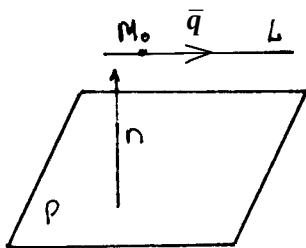


Рис. 1.35

3. Прямая пересекает плоскость (рис. 1.36), если векторы $\vec{n}$ и $\vec{q}$ не перпендикулярны, а значит их скалярное произведение не равно нулю:

$$(\vec{n}, \vec{q}) \neq 0, \text{ т. е. } Al + Bm + Cn \neq 0.$$

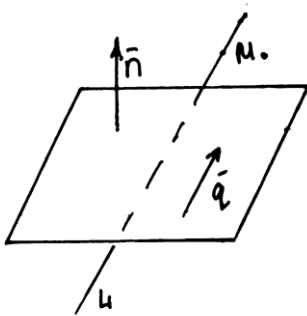


Рис. 1.36

Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы прямая

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0$,

где точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на прямой L , вектор $\vec{q}(l, m, n)$ направляющий вектор прямой L , вектор $\vec{n}(A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости P .

Синус наименьшего угла θ между прямой L и плоскостью P (рис. 1.37) равен модулю косинуса угла между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой:

$$\sin(\hat{L, P}) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{q}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

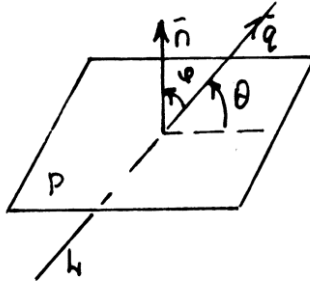


Рис. 1.37

Пример 1.27.

Написать уравнение прямой L , проходящей через точки $M_1(1, 2, -1)$ и $M_2(3, 0, 4)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L , вектор $\overline{M_1M}$ коллинеарен вектору $\overline{M_1M_2}$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны (рис. 1.38).



Рис. 1.38

Запишем координаты векторов $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M} = (x - 1, y - 2, z + 1);$$

$$\overline{M_1M_2} = (3 - 1, 0 - 2, 4 + 1) = (2, -2, 5).$$

Тогда уравнение прямой

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{5}.$$

Пример 1.28.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2, -1)$ параллельно вектору $\vec{a}(-4, 2, 3)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L , векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ должны быть коллинеарными, а значит, их координаты должны быть пропорциональны (рис. 1.39).

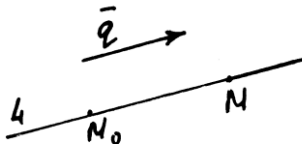


Рис. 1.39

Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - 1, y - 2, z + 1)$.

Тогда уравнение прямой

$$L: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

Пример 1.29.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2, -1)$ параллельно прямой $L_1: \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{3}$.

Решение

Вектор $\vec{q}_1(0, -4, 3)$ – направляющий вектор прямой L_1 .

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащий на прямой L , вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{q}_1$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны (рис. 1.40).

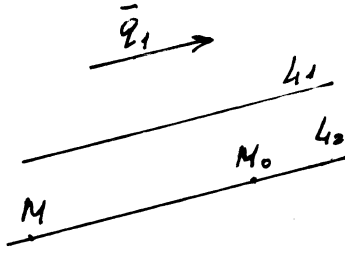


Рис. 1.40

Координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - 1, y - 2, z + 1)$,
тогда

$$L: \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{3}.$$

уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно прямой L_1 .

Пример 1.30.

Найти каноническое уравнение прямой $L: \begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0, \\ 2x - 3z + 5 = 0. \end{cases}$

Решение

Первый способ:

Напишем каноническое уравнение прямой L . Для этого надо найти координаты направляющего вектора $\vec{q}$ и координаты какой-либо точки, принадлежащей прямой L .

Найдем координаты точки M_0 , лежащей на прямой. Для этого мы можем одну из координат, например z_0 , взять равной нулю.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ принадлежит прямой L , тогда ее координаты должны удовлетворять уравнению данной прямой.

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ 2x_0 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ x_0 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -\frac{7}{2} \\ x_0 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_0\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) \in L.$$

Найдем координаты направляющего вектора $\vec{q}$.

$\vec{n}_1(1, -1, 4)$ – нормальный вектор плоскости $P_1: x - y + 4z - 1 = 0$;

$\vec{n}_2(2, 0, -3)$ – нормальный вектор плоскости $P_2: 2x - 3y + 5 = 0$
(рис. 1.41).

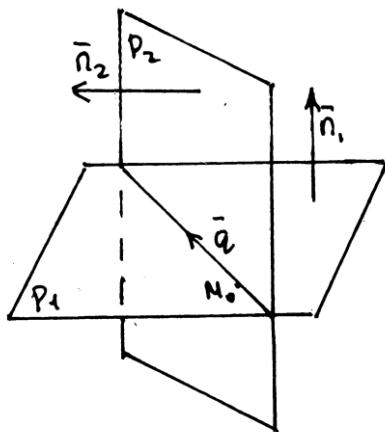


Рис. 1.41

Направляющий вектор $\vec{q}$ прямой L перпендикулярен векторам $\vec{n}_1(1, -1, 4)$ и $\vec{n}_2(2, 0, -3)$, следовательно, он коллинеарен вектору векторного произведения векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Найдем векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$[\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 \cdot (-3) - 4 \cdot 0)\bar{i} - (-3 - 4 \cdot 2)\bar{j} + (1 \cdot 0 - 2(-1))\bar{k} = 3\bar{i} + 11\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Итак, вектор $\bar{q}(3, 11, 2)$ - направляющий вектор прямой L ; а точка $M_0\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) \in L$, откуда получаем каноническое уравнение прямой L :

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{3} = \frac{y + \frac{7}{2}}{11} = \frac{z}{2}.$$

Второй способ:

$$\text{Пусть } L: \begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 2x - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения x и подставим его в первое уравнение:

$$L: \begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 2x - 3z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3z - 5}{2} - y + 4z - 1 = 0 \\ x = \frac{3z - 5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3z - 5 - 2y + 8z - 2 = 0 \\ 2x + 5 = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11z = 2y + 7 \\ 2x + 5 = 3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{2} = \frac{y + \frac{7}{2}}{11} \\ x + \frac{5}{2} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x + \frac{5}{2}}{3} = \frac{y + \frac{7}{2}}{11} = \frac{z}{2} - \text{каноническое уравнение прямой } L:$$

Третий способ.

Найдем координаты двух точек, лежащих на данной прямой.

Координаты точки $M_0\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) \in L$ были найдены ранее.

Найдем координаты еще одной точки, лежащей на прямой – $M_1(x_1, y_1, z_1)$

Пусть, например, $x_1 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} -y_1 + 4z_1 = 1 \\ -3z_1 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4z_1 - 1 \\ z_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{17}{3} \\ z_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \setminus$$

$$M_1\left(0, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right) \in L.$$

Найдем координаты вектора $\overline{M_1M_0}$:

$$\overline{M_1M_0} = \left(-\frac{5}{2} - 0; -\frac{7}{2} - \frac{17}{3}; 0 - \frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{55}{6}; -\frac{5}{3}\right).$$

Тогда в качестве направляющего вектора прямой мы можем взять любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{M_1M_0}$. Например, можем взять вектор $\vec{q}(3, 11, 2)$. Тогда каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{3} = \frac{y + \frac{7}{2}}{11} = \frac{z}{2}$$

Пример 1.31.

Выяснить взаимное расположение прямых L_1 и L_2 . Если прямые параллельны или скрещиваются, найти расстояние между ними; если пересекаются – то угол между ними и координаты точки их пересечения.

$$\begin{aligned} L_1 : \frac{x-1}{-4} &= \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{6}, \\ 1) \quad L_2 : \frac{x+4}{2} &= \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & L_1: \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-3}, \\
 2) & L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}; \\
 & L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}, \\
 3) & L_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}.
 \end{aligned}$$

Решение

$$\begin{aligned}
 1) & L_1: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{6}, \\
 & L_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-3}.
 \end{aligned}$$

Запишем координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 , и координаты точек, принадлежащих данным прямым:

$\vec{q}_1(-4, 2, 6)$ – направляющий вектор прямой L_1 ,

$\vec{q}_2(2, -1, -3)$ – направляющий вектор прямой L_2 ,

точка $M_1(1, -3, 2) \in L_1$, точка $M_2(-4, 1, -1) \in L_2$.

Заметим, что координаты векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ пропорциональны, т.к. $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-3}{6}$; следовательно, векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ коллинеарные.

Подставим координаты точки $M_1(1, -3, 2) \in L_1$ в уравнение прямой L_2 :

$$\frac{1+4}{2} \neq \frac{-3-1}{-1} \Rightarrow M_1 \notin L_2.$$

Следовательно, прямые параллельны.

Расстояние между ними можно найти, как расстояние от точки $M_1(1, -3, 2)$ до прямой L_2 .

Расстояние от точки M_1 до прямой L_2 можно найти по следующей формуле: $\rho(M_1, L_2) = \frac{\left| [M_2 M_1, \vec{q}_2] \right|}{\left| \vec{q}_2 \right|}$, где $\vec{q}_2$ – направляющий

вектор прямой L_2 ; M_2 – точка, принадлежащая прямой L_2 .

Найдем координаты вектора $\overline{M_2M_1}$:

$$\overline{M_2M_1} = (1+4, -3-1, 2+1) = (5, -4, 3).$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{M_2M_1}$ и $\overline{q_2}$:

$$\begin{aligned} [\overline{M_2M_1}, \overline{q_2}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (-4(-3) - 3(-1))\bar{i} - (5(-3) - 3 \cdot 2)\bar{j} + (5(-1) - (-4)2)\bar{k} = \\ &= (12+3)\bar{i} - (-15-6)\bar{j} + (-5+8)\bar{k} = 15\bar{i} + 21\bar{j} + 3\bar{k}. \end{aligned}$$

Найдем длину вектора векторного произведения векторов $\overline{M_2M_1}$ и $\overline{q_2}$:

$$|[\overline{M_2M_1}, \overline{q_2}]| = \sqrt{15^2 + 21^2 + 3^2} = 15\sqrt{3}.$$

Вычислим длину вектора $\overline{q_2}$:

$$|\overline{q_2}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$

Тогда

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

$$\begin{aligned} L_1 : \frac{x+1}{0} &= \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-3}; \\ 2) \quad L_2 : \frac{x-1}{2} &= \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}. \end{aligned}$$

Запишем координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 , и координаты точек, принадлежащих данным прямым:

$\overline{q_1}(0, 4, -3)$ – направляющий вектор прямой L_1 ,

$\overline{q_2}(2, -1, 1)$ – направляющий вектор прямой L_2 ,

точка $M_1(-1, -1, 2) \in L_1$, точка $M_2(1, 2, 0) \in L_2$.

Прямые лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны, а значит, смешанное произведение этих векторов равно нулю, т. е. $(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1M_2}) = 0$.

Найдем координаты вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1 M_2} = (1 + 1, 2 + 1, 0 - 2) = (2, 3, -2).$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ и $\overline{M_1 M_2}$:

$$(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(-2 \cdot 2 - 2) - 3(6 + 2) = -4(-6) - 3 \cdot 8 = 24 - 24 = 0.$$

$$(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2}) = 0$$

Следовательно, прямые лежат в одной плоскости.

Координаты векторов $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$ не пропорциональны, т. к.

$$\frac{0}{2} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow \overline{q_2} \text{ и } \overline{q_1} \text{ не коллинеарны, значит, прямые } L_1 \text{ и } L_2$$

пересекаются.

Найдем угол между прямыми L_1 и L_2 . Косинус наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

$$\begin{aligned} \cos(\angle L_1, L_2) &= \left| \cos(\angle \overline{q_1}, \overline{q_2}) \right| = \frac{|\langle \overline{q_1}, \overline{q_2} \rangle|}{|\overline{q_1}| |\overline{q_2}|} = \\ &= \frac{|0 \cdot 2 + 4(-1) + (-3)|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{7}{5\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Найдем координаты точки пересечения прямых. Перейдем к параметрическим уравнениям прямых. L_1 и L_2 :

$$L_1: \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-3} = t_1 \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} = t_2.$$

Выразим переменные x, y и z через параметры t_1 и t_2 :

$$L_1: \begin{cases} x = -1 \\ y = 4t_1 - 1 \\ z = -3t_1 + 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = 2t_2 + 1 \\ y = -t_2 + 2 \\ z = t_2 \end{cases}.$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка пересечения прямых L_1 и L_2 . Тогда координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям прямых L_1 и L_2 .

Тогда, имеем:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 4t_1 - 1 \\ z_0 = -3t_1 + 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_0 = 2t_2 + 1 \\ y_0 = -t_2 + 2 \\ z_0 = t_2 \end{cases}.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = 2t_2 + 1 \\ 4t_1 - 1 = 2 - t_2 \\ 2 - 3t_1 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = -1 \\ 4t_1 = 4 \\ -3t_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = -1 \\ t_1 = 1 \\ t_1 = 1 \end{cases}.$$

Подставив параметр $t_1 = 1$ в параметрическое уравнение первой прямой, получим координаты точки $M_0(-1, 3, -1)$.

Итак, точка $M_0(-1, 3, -1)$ - точка пересечения прямых L_1 и L_2 .

$$\begin{aligned} L_1: \frac{x+1}{2} &= \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}, \\ 3) \quad L_2: \frac{x-3}{-1} &= \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}. \end{aligned}$$

Запишем координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 , соответственно:

$$\overline{q_1}(2, 1, 0) \text{ и } \overline{q_2}(-1, 2, -3).$$

Координаты точек, принадлежащих данным прямым :

$$M_1(-1, 2, 0) \in L_1, \quad M_2(3, -1, 2) \in L_2.$$

Найдем координаты вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M_2} = (3 + 1, -1 - 2, 2 - 0) = (4, -3, 2).$$

Прямые лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны, т. е. $(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1M_2}) = 0$.

Найдем смешанное произведение векторов: $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ и $\overline{M_1M_2}$:

$$(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 9) - (-2 + 12) + \\ + 0(3 - 8) = -10 - 10 = -20 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов не равно нулю, следовательно, векторы $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$, $\overline{M_1 M_2}$ не компланарны, а значит, прямые L_1 и L_2 скрещиваются. Найдем расстояние между прямыми L_1 и L_2 по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2})|}{\|\overline{q_1}, \overline{q_2}\|}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\overline{q_1}$, и $\overline{q_2}$:

$$[\overline{q_1}, \overline{q_2}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3 - 0)\bar{i} - (-6 - 0)\bar{j} + (4 + 1)\bar{k} = \\ = -3\bar{i} + 6\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Длина вектора векторного произведения:

$$\|[\overline{q_1}, \overline{q_2}]\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}.$$

Модуль смешанного произведения векторов $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$, $\overline{M_1 M_2}$:

$$|(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2})| = 20,$$

тогда

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{M_1 M_2})|}{\|\overline{q_1}, \overline{q_2}\|} = \frac{20}{\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{7}.$$

Пример 1.32.

Дано: координаты точек $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

Найти: 1) проверить, что точки Q, L, P не лежат на одной прямой;

2) проверить, что точки Q, L, P, N не лежат в одной плоскости;

3) написать уравнение плоскости, проходящей через

точки Q, L, P ;

4) написать уравнение плоскости, проходящей через точку N , параллельно плоскости (QLP) ;

5) написать уравнение плоскости, проходящей через точку P параллельно векторам $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QN}$;

6) написать уравнение плоскости, проходящей через точки N и Q , перпендикулярно плоскости (QLP) ;

7) написать уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q , параллельно вектору $\overrightarrow{NP}$;

8) написать уравнение плоскости, проходящей через точку N , параллельно координатной плоскости XOY ;

9) написать общее, каноническое и параметрическое уравнение прямой QP ;

10) написать уравнение прямой, проходящей через точку Q параллельно оси OZ ;

11) написать уравнение медианы QM в $\triangle QPL$;

12) написать уравнение высоты QH в $\triangle QPL$;

13) написать уравнение прямой, проходящей через точку N параллельно прямой QP ;

14) написать уравнение высоты NH тетраэдра $QLPH$;

15) написать уравнение прямой, перпендикулярной прямым QP и QN и проходящей через точку L ;

16) найти угол между прямой QP и прямой LN ;

17) найти угол между прямой PN и плоскостью (QPL) ;

18) найти величину двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ) ;

19) найти площадь треугольника QPL ;

20) найти объем тетраэдра $QLNP$;

21) найти расстояние от точки N до прямой QP ;

22) найти расстояние от точки N до плоскости (QLP) ;

23) найти расстояние между прямыми QP и LN ;

24) найти координаты точки N_1 , симметричной точке N относительно прямой LP ;

25) найти координаты точки N_2 , симметричной точке N относительно плоскости QLP .

1) Проверить, что точки $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$ не лежат на одной прямой.

Решение

Если точки Q, L, P лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{QL}$ и $\overrightarrow{QP}$ коллинеарны, (рис. 1.42), а значит, их координаты должны быть пропорциональны

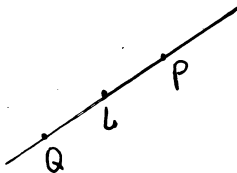


Рис. 1.42

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QL} = (9, 2, -4)$ и $\overrightarrow{QP} = (-3, -4, 2)$.

Координаты векторов $\overrightarrow{QL}$ и $\overrightarrow{QP}$ не пропорциональны, т. к.

$\frac{9}{-3} \neq \frac{2}{-4}$, следовательно, точки Q, L и P не лежат на одной прямой.

2) Проверить, что точки $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$ не лежат в одной плоскости.

Решение

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QL} = (9, 2, -4)$, $\overrightarrow{QP} = (-3, -4, 2)$, $\overrightarrow{QN} = (8, -1, 3)$.

Если точки Q, L, P и N лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{QL}$, $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QN}$ должны быть компланарны (рис. 1.43), а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю:

$$(\overrightarrow{QL}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QN}) = 0.$$

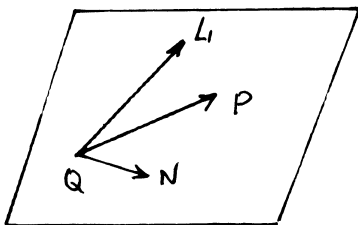


Рис. 1.43

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{QL}$, $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$:

$$\begin{aligned} (\overline{QL}, \overline{QP}, \overline{QN}) &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим} \\ \text{по первой} \\ \text{строке} \end{vmatrix} = \\ &= 9 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 9(-12 + 2) - 2(-9 - 16) - \\ &- 4(3 + 32) = -180 \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Следовательно, векторы $\overline{QN}$, $\overline{QP}$, $\overline{QL}$ не компланарны, а значит, точки Q , L , P и N не лежат в одной плоскости.

3) Написать общее уравнение плоскости проходящей через точки $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$.

Решение

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости (Q, L, P) , векторы $\overline{QL}$, $\overline{QP}$ и $\overline{QM}$ должны быть компланарны (рис. 1.44), а значит, смешанное произведение этих векторов должно быть равно нулю, т. е. $(\overline{QM}, \overline{QL}, \overline{QP}) = 0$.

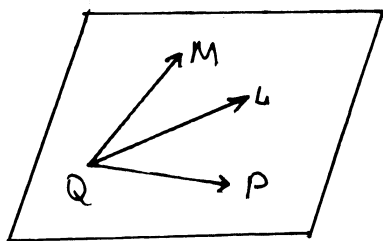


Рис. 1.44

Найдем координаты векторов:

$$\overline{QM} = (x + 9, y - 1, z + 1); \quad \overline{QL} = (9, 2, -4); \quad \overline{QP} = (-3, -4, 2).$$

Тогда

$$(\overline{QM}, \overline{QL}, \overline{QP}) = \begin{vmatrix} x+9 & y-1 & z+1 \\ 9 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(x+9) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x+9)(4-16) - (y-1)(18-12) + (z+1)(-36+6) = 0$$

$$-12(x+9) - 6(y-1) - 30(z+1) = 0 \text{ разделим на } (-6):$$

$$2(x+9) + y - 1 + 5(z+1) = 0;$$

$$2x + y + 5z + 22 = 0;$$

$2x + y + 5z + 22 = 0$ – получим общее уравнение плоскости (QLP).

4) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $N(-1, 0, 2)$ параллельно плоскости (QLP) (рис. 1.45).

Решение

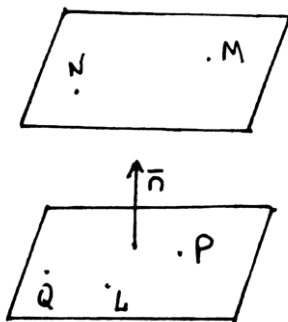


Рис. 1.45

Уравнение плоскости (QLP): $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3),

Тогда вектор $\vec{n}(2, 1, 5)$ – вектор нормали плоскости (QLP).

Искомая плоскость параллельна плоскости (QLP), следовательно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в этой плоскости, вектор $\vec{NM}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}(2, 1, 5)$, а значит их скалярное произведение равно нулю;

$$(\vec{NM}, \vec{n}) = 0.$$

Найдем координаты вектора $\vec{NM}$:

$$\vec{NM} = (x + 1, y, z - 2).$$

Тогда скалярное произведение векторов:

$$(\vec{NM}, \vec{n}) = 2(x + 1) + y + 5(z - 2) = 0$$

$$2x + 2 + y + 5z - 10 = 0;$$

$2x + y + 5z - 8 = 0$ – получим уравнение плоскости параллельной плоскости (QLP) и проходящей через точку N .

5) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку L , параллельно векторам $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$, где $Q(-9, 1, -1)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$; $L(0, 3, -5)$.

Решение

Запишем координаты векторов: $\overline{QP}(-3, -4, 2)$ и $\overline{QN}(8, -1, 3)$.

Векторы $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$ параллельны искомой плоскости и для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в этой плоскости, вектор $\overline{LM}$ лежит в этой плоскости, следовательно, векторы $\overline{QP}$, $\overline{QN}$, $\overline{LM}$ должны быть компланарными, а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю.

Координаты вектора $\overline{LM} = (x + 12, y + 3, z - 1)$, тогда

$$(\overline{LM}, \overline{QP}, \overline{QN}) = \begin{vmatrix} x+12 & y+3 & z-1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(x+12) \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+12)(-12+2) - (y+3)(-9-16) + (z-1)(3+32) = 0;$$

$$-10(x+12) + 25(y+3) + 35(z-1) = 0; \text{ разделим на } -5:$$

$$2x - 5y - 7z + 16 = 0;$$

$2x - 5y - 7z + 16 = 0$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точку L параллельно векторам $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$.

6) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки Q и N , перпендикулярно плоскости (QLP) (рис. 1.46), где $Q(-9, 1, -1)$; $N(-1, 0, 2)$.

Решение

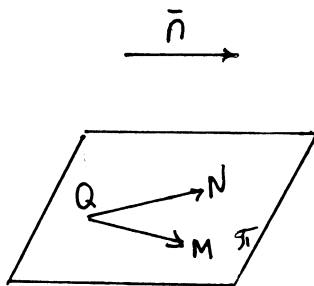


Рис. 1.46

Уравнение плоскости (QLP): $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3);
 где вектор $\vec{n}(2, 1, 5)$ - вектор нормали плоскости (QLP).

Точки Q и N принадлежат искомой плоскости π , значит, вектор $\overrightarrow{QN}(8, -1, 3)$ лежит в этой плоскости.

Плоскость π перпендикулярна плоскости (QLP), а значит вектор нормали $\vec{n}(2, 1, 5)$ плоскости (QLP) параллелен плоскости π . Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π , вектор $\overrightarrow{QM}(x + 9, y - 1, z + 1)$ также лежит в этой плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{QM}$ и $\vec{n}$ должны быть компланарны, а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю.

$$(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}, \vec{n}) = 0, \text{ или}$$

$$(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}, \vec{n}) = \begin{vmatrix} x+9 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(x+9) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+9)(3+5) - (y-1)(6-40) + (z+1)(-2-8) = 0;$$

$$8(x+9) + 34(y-1) - 10(z+1) = 0 \text{ разделим на 2:}$$

$$4(x+9) + 17(y-1) - 5(z+1) = 0;$$

$$4x + 17y - 5z + 14 = 0;$$

$4x + 17y - 5z + 14 = 0$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точки Q и N , перпендикулярно плоскости (QLP) .

7) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$Q(-9, 1, -1)$ и $L(0, 3, -5)$ параллельно вектору $\overline{NP}$

где $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

Решение

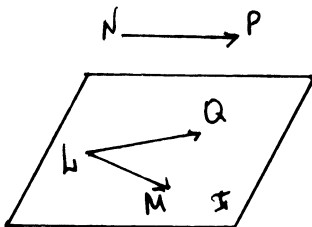


Рис. 1.47

Вектор $\overline{NP}$ параллелен искомой плоскости π (рис. 1.47). Тогда для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π , векторы $\overline{QL}$, $\overline{NP}$, $\overline{LM}$ должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение должно быть равно нулю. Найдем координаты векторов:

$$\overline{QL} = (9, 2, -4); \quad \overline{NP} = (-11, -3, -1); \quad \overline{LM} = (x, y-3, z+5).$$

Тогда смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{LM}, \overline{QL}, \overline{NP}) = \begin{vmatrix} x & y-3 & z+5 \\ 9 & 2 & -4 \\ -11 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$x \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -11 & -1 \end{vmatrix} + (z+5) \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x(-2-12) - (y-3)(-9-44) + (z+5)(-27+22) = 0;$$

$$-14x + 53(y-3) - 5(z+5) = 0;$$

$$-14x + 53y - 5z - 184 = 0.$$

$14x - 53y + 5z + 184 = 0$ – получили уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q параллельно вектору $\overline{NP}$.

8) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $N(-1, 0, 2)$, параллельно координатной плоскости XOY .

Решение

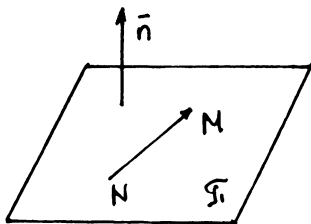


Рис. 1.48

Уравнение плоскости XOY : $z = 0$; вектор $\bar{n}(0, 0, 1)$ – вектор нормали плоскости XOY .

Искомая плоскость π параллельна плоскости XOY , следовательно, плоскость π перпендикулярна вектору $\bar{n}(0, 0, 1)$. Тогда для любой точки $M(x, y, z)$ лежащей в плоскости π , вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}(0, 0, 1)$ (рис. 1.48), а значит, их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$\overline{NM} \perp \bar{n} \Rightarrow (\overline{NM}, \bar{n}) = 0;$$

$$\overline{NM}(x-1, y, z-2);$$

$$0 \cdot (x-1) + 0 \cdot y + 1 \cdot (z-2) = 0.$$

$z - 2 = 0$ – получим уравнение плоскости, проходящей через точку N параллельно плоскости XOY .

9) Написать общее, каноническое и параметрическое уравнения прямой QP , где $Q(-9, 1, -1)$; $P(-12, -3, 1)$.

Решение

Найдем координаты векторов:

$$\overline{QM} = (x+9, y-1, z+1); \overline{QP} = (-3, -4, 2).$$

Для любой точки $M(x, y, z)$ лежащей на прямой QP вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\overline{QP}$ (рис. 1.49), а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны. Тогда:

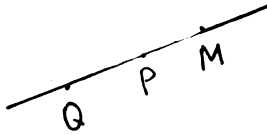


Рис. 1.49

$\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$ – получили каноническое уравнение прямой QP .

Напишем параметрическое уравнение прямой. Введем параметр t :

$$\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} = t.$$

Выразив переменные x, y и z через t , получим:

$$\begin{cases} x = -9 - 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{– параметрическое уравнение прямой } QP.$$

Напишем общее уравнение прямой QP – как линии пересечения плоскостей (QNP) и (QPL) (рис. 1.50).

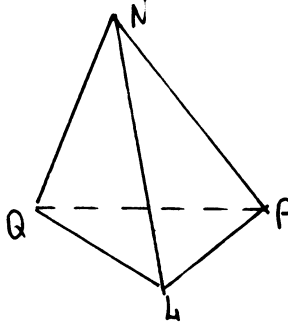


Рис. 1.50

Уравнение плоскости (QLP) : $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3).

Напишем уравнение плоскости (QNP) . Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости (QNP) , векторы $\overline{QM}$, $\overline{QP}$ и $\overline{QN}$

должны быть компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю, т. е. $(\overline{QM}, \overline{QP}, \overline{QN}) = 0$. Найдем координаты векторов $\overline{QM} = (x + 3, y - 1, z - 4)$; $\overline{QP} = (6, 1, -9)$; $\overline{QN} = (0, 8, -2)$. Тогда их смешанное произведение:

$$(\overline{QM}, \overline{QP}, \overline{QN}) = \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+3)(-12+2) - (y-1)(-9-16) + (z+1)(3+32) = 0;$$

$$-10(x+3) + 25(y-1) + 35(z+1) = 0 - \text{разделим на } -5;$$

$$2(x+3) - 5(y-1) - 7(z+1) = 0;$$

$$2x + 6 - 5y + 5 - 7z - 7 = 0.$$

$$2x - 5y - 7z + 4 = 0 - \text{уравнение плоскости } (QNP);$$

$$\begin{cases} 2x - 5y - 7z + 4 = 0 \\ 2x + y + 5z + 22 = 0 \end{cases} - \text{общее уравнение прямой } QP.$$

10) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $Q(-9, 1, -1)$ параллельно оси OZ

Решение

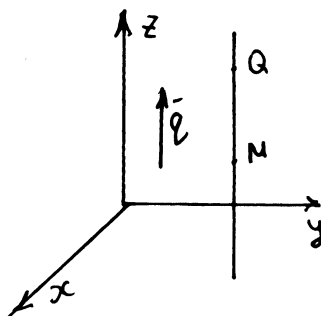


Рис. 1.51

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на искомой прямой, вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\vec{q}(0, 0, 1)$ (рис. 1.51), а значит, ко-

ординаты векторов $\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{QM}$ должны быть пропорциональны.
Найдем координаты вектора $\overrightarrow{QM} = (x + 9, y - 1, z + 1)$.

Тогда

$$\frac{x+9}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1} \quad - \text{ каноническое уравнение прямой,}$$

проходящей через точку Q параллельно оси OZ .

11) Написать уравнение медианы QM_0 в треугольнике QPL , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$.

Решение

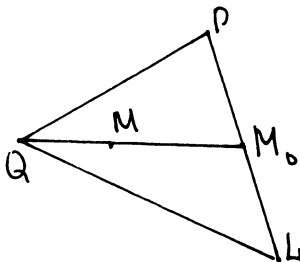


Рис. 1.52

Найдем координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка M_0 - середина отрезка PL , следовательно, ее координаты можно найти как среднее арифметическое соответствующих координат точек P и L .

$$\text{Тогда } M_0 = \left(\frac{-12+0}{2}, \frac{-3+3}{2}, \frac{1-5}{2} \right) \Rightarrow M_0(-6, 0, -2).$$

Напишем уравнение медианы. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QM}$ и $\overrightarrow{QM_0}$:

$$\overrightarrow{QM} = (x + 9, y - 1, z + 1);$$

$$\overrightarrow{QM_0} = (-6 + 9, 0 - 1, -2 + 1) = (3, -1, -1).$$

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой QM_0 , вектор $\overrightarrow{QM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{QM_0}$ (рис. 1.52), а значит, координаты векторов $\overrightarrow{QM}$ и $\overrightarrow{QM_0}$ должны быть пропорциональны, т. е.

$$\frac{x+9}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1} \quad - \text{ уравнение медианы } QM_0 \text{ в } \triangle QPL.$$

12) Написать уравнение высоты QH_1 в треугольнике QPL где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$ (рис. 1.53).

Решение

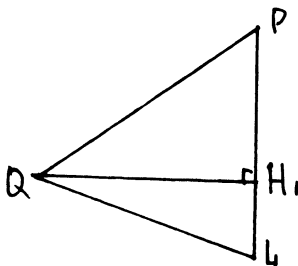


Рис. 1.53

Уравнение плоскости (QPL): $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3).

Через точку Q проведем плоскость π , перпендикулярную прямой PL .

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π , вектор $\overline{QM}$ будет перпендикулярен вектору $\overline{PL}$, а значит, их скалярное произведение должно быть равно нулю, т.е. $(\overline{QM}, \overline{PL}) = 0$.

Найдем координаты векторов $\overline{QM}$ и $\overline{PL}$:

$$\overline{QM} = (x + 9, y - 1, z + 1) \quad \overline{PL} = (12, 6, -6).$$

Тогда

$$(\overline{QM}, \overline{PL}) = 12(x + 9) + 6(y - 1) - 6(z + 1) = 0;$$

разделим на 6:

$$2(x + 9) + y - 1 - (z + 1) = 0;$$

$$2x + 18 + y - 1 - z - 1 = 0$$

$$2x + y - z + 16 = 0 \text{ — уравнение плоскости } \pi.$$

Тогда прямая QH_1 — это линия пресечения плоскостей (QPL) и π . Получили общее уравнение прямой QH_1 :

$$QH_1 : \begin{cases} 2x + y + 5z + 22 = 0, \\ 2x + y - z + 16 = 0. \end{cases}$$

Напишем каноническое уравнение этой прямой.

$\vec{n}_1(2, 1, 5)$ — нормальный вектор плоскости (QPL);

$\bar{n}_2(2, 1, -1)$ – нормальный вектор плоскости π .

Прямая QH_1 перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, а значит, направляющий вектор прямой QH_1 коллинеарен вектору векторного произведения векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$. Найдем векторное произведение векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$[\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-1-5) - \bar{j}(-2-10) + \bar{k}(2-2) = -6\bar{i} + 12\bar{j}.$$

Вектор $\bar{q}$ коллинеарен вектору векторного произведения векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, следовательно, вектор $\bar{q}(-1, 2, 0)$ – направляющий вектор прямой QH_1 .

Прямая QH_1 параллельна вектору $\bar{q}$, а значит, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой QH_1 , вектор $\overline{QM}$ коллинеарен вектору $\bar{q}$, следовательно, их координаты должны быть пропорциональны. Координаты векторов $\overline{QM} = (x+9, y-1, z+1)$, $\bar{q}(-1, 2, 0)$.

Тогда:

$$\frac{x+9}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{0} \quad - \text{ каноническое уравнение прямой}$$

QH_1 .

13) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $N(-1, 0, 2)$ параллельно прямой $\overline{QP}$, где $Q(-9, 1, -1)$; $P(-12, -3, 1)$.

Решение

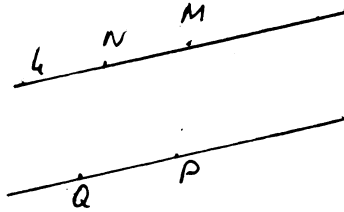


Рис. 1.54

Уравнение прямой $\overline{QP}$: $\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$ (см. п. 9).

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой L , вектор $\overline{NM}$ $(x+1, y, z-2)$ коллинеарен вектору $\overline{QP}(-3, -4, 2)$ (рис. 1.54), а значит, их координаты должны быть пропорциональны.

Тогда

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{2} \quad \text{— каноническое уравнение прямой, про-}$$

ходящей через точку N параллельно прямой QP .

14) Написать уравнение высоты NH тетраэдра $QLPN$, где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

Решение

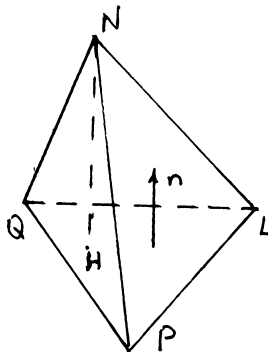


Рис. 1.55

Уравнение плоскости (QPL) : $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3), вектор $\vec{n}(2, 1, 5)$ — нормальный вектор плоскости QLP .

Прямая NH перпендикулярна плоскости (QPL) (рис. 1.55), а значит, она параллельна вектору нормальному вектору $\vec{n}$ плоскости QPL .

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой NH , вектор $\overrightarrow{NM} = (x + 1, y, z - 2)$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{n} (2, 1, 5)$, а значит, координаты этих векторов должны быть пропорциональны.

Тогда

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{5} \text{ – каноническое уравнение высоты } NH.$$

15) Написать уравнение прямой ℓ , перпендикулярной прямым QP и QN и проходящей через точку L , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

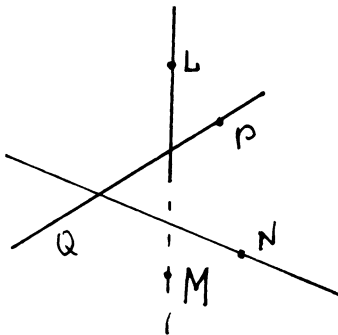


Рис. 1.56

Прямая ℓ перпендикулярна прямым QP и QN (рис. 1.56), а значит, она параллельна вектору векторного произведения векторов $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QN}$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{QP} = (-3, -4, 2)$ и $\overrightarrow{QN} = (8, -1, 3)$.

Тогда их векторное произведение:

$$[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QN}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-12+2) - \bar{j}(-9-16) + \bar{k}(3+32) = -10\bar{i} + 25\bar{j} + 35\bar{k}.$$

$$[\overline{QP}, \overline{QN}] = (-10, 25, 35).$$

Направляющий вектор $\bar{q}$ прямой ℓ коллинеарен вектору векторного произведения векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, следовательно, вектор $\bar{q}(2, -5, -7)$ – направляющий вектор прямой QH_1 .

Тогда для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой ℓ , вектор $\overline{LM}$ должен быть коллинеарен вектору $\bar{q}$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны.

Координаты векторов: $\overline{LM} = (x, y-3, z+5)$, $\bar{q}(2, -5, -7)$.

Тогда

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{-7} \text{ – каноническое уравнение прямой, про-}$$

ходящей через точку L перпендикулярно прямым QP и QN .

16) Найти угол между прямой QP и прямой LN , где

$Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

$$\text{Уравнение прямой } QP: \frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} \text{ (см. п. 9).}$$

Напишем уравнение прямой LN .

Для любой точки $M(x, y, z)$ вектор $\overline{LM}$ должен быть коллинеарен вектору $\overline{LN}$ (рис. 1.57), а значит, их координаты должны быть пропорциональны.

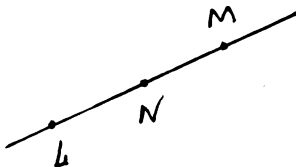


Рис. 1.57

Найдем координаты векторов $\overline{LM} = (x, y-3, z+5)$, $\overline{LN} = (-1, -3, 7)$.

Тогда

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+5}{7} - \text{уравнение прямой } LN.$$

Косинус угла между прямыми в пространстве равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых.

Так как

$\vec{q}_1(-3, -4, 2)$ – направляющий вектор прямой QP .

$\vec{q}_2(-1, -3, 7)$ – направляющий вектор прямой LN , то

$$\begin{aligned} \cos(\angle QP, LN) &= \left| \cos(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \right| = \frac{|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \\ &= \frac{|-3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 7|}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 7^2}} = \\ &= \frac{|3 + 12 + 14|}{\sqrt{9 + 16 + 4} \cdot \sqrt{1 + 9 + 49}} = \frac{29}{\sqrt{29} \sqrt{59}} = \sqrt{\frac{29}{59}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{29}{59}} - \text{угол между прямыми } QP \text{ и } LN.$$

17) Найти угол между прямой PN и плоскостью (QPL) , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

Уравнение плоскости (QPL) : $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3), вектор $\vec{n}(2, 1, 5)$ – нормальный вектор плоскости (QPL) .

Напишем уравнение прямой PN . Найдем координаты векторов $\vec{PN} = (11, 3, 1)$, $\vec{PM} = (x+12, y+3, z-1)$.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой PN , вектор $\vec{PM}$ коллинеарен вектору $\vec{PN}$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны.

Тогда

$$\frac{x+12}{11} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1} - \text{уравнение прямой } PN.$$

Вектор $\vec{q}(11, 3, 1)$ – направляющий вектор прямой PN .

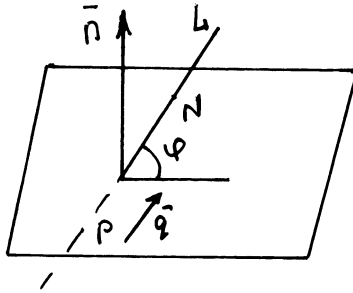


Рис. 1.58

Пусть φ – угол между прямой PN и плоскостью (QPL) , (рис. 1.58). Тогда синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin((QPL)^\wedge, PN) = \left| \cos(\bar{q}, \bar{n}) \right| = \frac{|(\bar{q}, \bar{n})|}{|\bar{q}| \cdot |\bar{n}|} = \\ &= \frac{|2 \cdot 11 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1 + 5^2} \sqrt{11^2 + 3^2 + 1}} = \frac{|22 + 3 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 25} \sqrt{121 + 9 + 1}} = \\ &= \frac{30}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{131}} = \sqrt{\frac{30}{131}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{30}{131}} \text{ – угол между плоскостью } (QPL) \text{ и прямой}$$

PN .

18) Найти величину двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ) , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$;

$N(-1, 0, 2)$.

. Решение

Уравнение плоскости (QPL) : $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п.3), вектор $\bar{n}_1(2, 1, 5)$ – нормальный вектор плоскости (QLP) .

Уравнение плоскости (QPN) : $2x - 5y - 7z + 16 = 0$ (см. п. 9), вектор $\bar{n}_2(2, -5, -7)$ – нормальный вектор плоскости (QPN) .

Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих плоскостей.

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos(\widehat{(QPL)}, \widehat{(QPN)}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_1}, \widehat{\vec{n}_2}) \right| = \\ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-7)|}{\sqrt{2^2 + 1 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-7)^2}} = \\ &= \frac{|4 - 5 - 35|}{\sqrt{4 + 1 + 25} \sqrt{4 + 25 + 49}} = \frac{36}{\sqrt{30} \sqrt{78}} = \frac{36}{2\sqrt{15} \sqrt{39}} = \frac{18}{\sqrt{585}}\end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi = \arccos \frac{18}{\sqrt{585}} - \text{величина двугранного угла между плоскостями } (QPL) \text{ и } (NPQ).$$

19) Найти площадь треугольника QLP , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$.

. Решение

$S_{\Delta QLP} = \frac{1}{2} S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QL}$ (рис. 1.59), а площадь параллелограмма равна длине вектора векторного произведения векторов $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QL}$, тогда

$$S_{\Delta QLP} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{QL} \cdot \overrightarrow{QP}|;$$

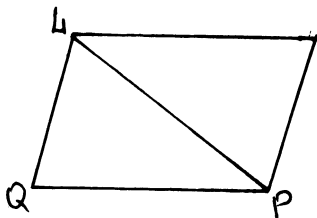


Рис. 1.59

Найдем координаты векторов $\overline{QL} = (9, 2, -4)$ и $\overline{QP} = (-3, -4, 2)$. Тогда их векторное произведение:

$$[\overline{QL}, \overline{QP}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 9 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = ;$$

$$-12\bar{i} - 6\bar{j} - 30\bar{k}.$$

Найдем длину вектора векторного произведения векторов $\overline{QP}$ и $\overline{QL}$:

$$|[\overline{QL}, \overline{QP}]| = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2 + (-30)^2} = \sqrt{1080} = 6\sqrt{30}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle QLP} = \frac{6\sqrt{30}}{2}.$$

Итак, $S_{\triangle QLP} = 3\sqrt{30}$ - площадь треугольника QLP

20) Найти объем тетраэдра $QLNP$, где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

$V_{QLNP} = \frac{1}{6}V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{QL}, \overline{QN}$ и $\overline{QP}$. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{QL}, \overline{QN}$ и $\overline{QP}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов.

$$V = |(\overline{QL}, \overline{QN}, \overline{QP})| = 180 \text{ (см. п.2)}$$

Тогда

$$V = 180 \Rightarrow V_{QLNP} = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30.$$

21) Найти расстояние от точки N до прямой QP (рис. 1.60), где $Q(-9, 1, -1)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

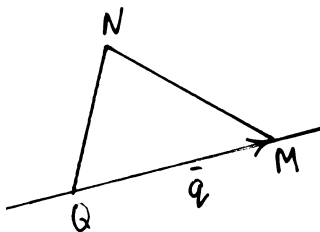


Рис. 1.60

1 способ

Уравнение прямой QP : $\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$ (см. п. 9).

$\bar{q} = \overrightarrow{QP} = (-3, -4, 2)$ – направляющий вектор прямой QP .

$$S_{\triangle NQM} = \frac{1}{2} |\bar{q}| h = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{QN}, \bar{q}]| \Rightarrow h = \frac{|[\overrightarrow{QN}, \bar{q}]|}{|\bar{q}|}.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{QN} = (8, -1, 3)$.

Найдем координаты вектора векторного произведения векторов $\overrightarrow{QN}$ и $\bar{q}$:

$$[\overrightarrow{QN}, \bar{q}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & -1 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 + 12)\bar{i} - \bar{j}(16 + 9) + \bar{k}(-32 - 3) = 10\bar{i} - 25\bar{j} - 35\bar{k}.$$

Найдем длину получившегося вектора:

$$|[\overrightarrow{QN}, \bar{q}]| = \sqrt{(10)^2 + (-25)^2 + (-35)^2} =$$

$$= \sqrt{100 + 625 + 1225} = \sqrt{1950}.$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}.$$

Тогда

$$h = \frac{\sqrt{1950}}{\sqrt{29}}.$$

2 способ

Напишем уравнение плоскости π , проходящей через точку N перпендикулярно прямой QP (рис. 1.61).

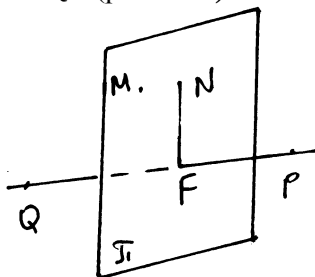


Рис. 1.61

Уравнение прямой QP : $\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$. (см. п. 9), вектор $\vec{q}(-3, -4, 2)$ – направляющий вектор прямой QP .

Плоскость π перпендикулярна прямой QP , а значит, направляющий вектор $\vec{q}$ прямой QP перпендикулярен плоскости π . Тогда, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π , вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\vec{q}$, а значит их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(\overline{NM}, \vec{q}) = 0$.

Найдем координаты вектора $\overline{NM} = (x+1, y, z-2)$. Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{NM}$ и $\vec{q}$:

$$-3(x+1) - 4y + 2(z-2) = 0;$$

$$-3x - 3 - 4y + 2z - 4 = 0.$$

Тогда

$-3x - 4y + 2z - 7 = 0$ – уравнение плоскости π , проходящей через точку N перпендикулярно прямой QP .

Найдем координаты точки F – точки пересечения прямой QP и плоскости π .

Для этого запишем параметрическое уравнение прямой QP :

$$\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} = t;$$

$$\begin{cases} x = -9 - 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Точка $F(x_0, y_0, z_0)$ лежит на прямой QP , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$$x_0 = -9 - 3t_0; y_0 = 1 - 4t_0; z_0 = -1 + 2t_0.$$

Точка F также лежит в плоскости π , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$-3x_0 - 4y_0 + 2z_0 - 7 = 0.$$

Тогда имеем:

$$-3(-9 - 3t_0) - 4(1 - 4t_0) + 2(2t_0 - 1) - 7 = 0;$$

$$27 + 9t_0 - 4 + 16t_0 + 4t_0 - 2 - 7 = 0;$$

$$29t_0 - 14 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{14}{29}.$$

Найдем координаты точки F :

$$\begin{cases} x_0 = -9 + 3 \cdot \frac{14}{29} = -\frac{219}{29} \\ y_0 = 1 + \frac{56}{29} = \frac{85}{29} \\ z_0 = -1 - \frac{28}{29} = -\frac{57}{29} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{219}{29}, \frac{85}{29}, -\frac{57}{29}\right),$$

Координаты точки $N(-1, 0, 2)$.

Найдем координаты вектора $\overline{NF}$:

$$\overline{NF}\left(-\frac{219}{29} + 1, \frac{85}{29}, -\frac{57}{29} - 2\right) = \left(-\frac{190}{29}, \frac{85}{29}, -\frac{115}{29}\right);$$

Найдем длину вектора $\overline{NF}$:

$$\rho(N, (QP)) = |\overline{NF}| = \sqrt{\left(-\frac{190}{29}\right)^2 + \left(\frac{85}{29}\right)^2 + \left(-\frac{115}{29}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{56550}}{29} = \sqrt{\frac{1950}{29}}.$$

22) Найти расстояние от точки N до плоскости (QLP) (рис. 1.62), где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

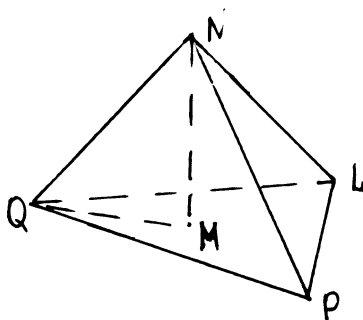


Рис. 1.62

1 способ

В п. 19 и 20 были найдены объем тетраэдра $QLNP$ и площадь треугольника QLP :

$$V_{QLNP} = 30;$$

$$S_{\triangle QLP} = \frac{6\sqrt{30}}{2}$$

$$V_{QLNP} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{QLNP}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 2}{6\sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$

Следовательно,

$|\overline{NM}| = \sqrt{30}$ – расстояние от точки N до плоскости (QLP)

2 способ

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π , заданной уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Координаты точки $N(-1, 0, 2)$, уравнение плоскости (QPL): $2x + y + 5z + 22 = 0$. Следовательно,

$$\rho(N, QLP) = \frac{|2(-1) + 0 + 5 \cdot 2 + 22|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{|-2 + 10 + 22|}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$

3 способ

Треугольник QMN – прямоугольный (рис. 1.63), следовательно, $|NM| = |QN| \cos(\angle QNM)$. Так как координаты вектора $\overrightarrow{ON} = (8, -1, 3)$, то его длина:

$$|QN| = \sqrt{64 + 1 + 9} = \sqrt{74}.$$

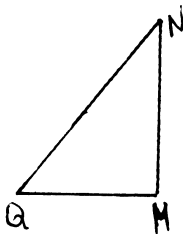


Рис. 1.63

$$\cos \angle QNM = \left| \cos(\overrightarrow{QN}, \hat{\overrightarrow{n}}) \right|, \text{ где } \overrightarrow{n}(2, 1, 5) - \text{нормальный}$$

вектор плоскости (QLP).

Тогда

$$\cos \angle QNM = \frac{|\overrightarrow{QN} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{QN}| |\overrightarrow{n}|} = \frac{|8 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5|}{\sqrt{64 + 1 + 9} \sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{30}{\sqrt{74} \sqrt{30}};$$

Следовательно,

$$|NM| = \sqrt{74} \frac{30}{\sqrt{74} \sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$

23) Найти расстояние между прямыми QP и LN , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

Уравнение прямой QP : $\frac{x+9}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$ (см. п. 9);

Вектор $\vec{q}_1(-3, -4, 2)$ – направляющий вектор прямой QP .

Напишем уравнение прямой LN . Найдем координаты вектора $\vec{LN}(-1, -3, 7)$. Тогда для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой LN , вектор $\vec{LM}$ коллинеарен вектору $\vec{LN}$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны. Следовательно,

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+5}{7} \quad \text{– каноническое уравнение прямой } LN.$$

Вектор $\vec{q}_2(-1, -3, 7)$ – направляющий вектор прямой LN .

Выясним взаимное расположение прямых QP и LN .

Прямые QP и LN лежат в одной плоскости, тогда и только тогда, когда векторы $\vec{LN}$, $\vec{QP}$, $\vec{QL}$ – компланарны (рис. 1.64), а значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $(\vec{LN}, \vec{QP}, \vec{QL}) = 0$.

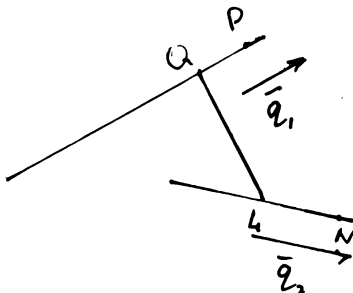


Рис. 1.64

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{LN}$, $\vec{QP}$, $\vec{QL}$:

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{QL}) = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

Разложим определитель элементами первой строки:

$$9 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 9(-28 + 6) - 2(-21 + 2) - 4(9 - 4) = -198 + 38 - 20 = 180 \neq 0$$

Следовательно, прямые не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются.

Тогда, расстояние между ними можно найти по формуле:

$$\rho(QP, LN) = \frac{|(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{QL})|}{\|[\bar{q}_1 \bar{q}_2]\|};$$

где $|(\overline{LN}, \overline{QP}, \overline{QL})|$ - модуль смешанного произведения векторов $\overline{LN}, \overline{QP}, \overline{QL}$; а $|\overline{[\bar{q}_1 \bar{q}_2]}|$ - длина вектора векторного произведения направляющих векторов прямых

$$|(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{QL})| = 180;$$

$$[\bar{q}_1, \bar{q}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-28 + 6)\bar{i} - (-21 + 2)\bar{j} + (9 - 4)\bar{k} = -22\bar{i} + 19\bar{j} - 5\bar{k};$$

$$|\overline{[\bar{q}_1 \bar{q}_2]}| = \sqrt{(-22)^2 + 19^2 + (-5)^2} = \sqrt{484 + 361 + 25} = \sqrt{870};$$

$$\rho(QP, LN) = \frac{180}{\sqrt{870}}.$$

24) Найти координаты точки N_1 , симметричной точке N относительно прямой LP , где $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

• Решение

Напишем уравнение прямой LP . Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой LP , вектор $\overline{LM}$ коллинеарен вектору $\overline{LP}$, а значит, их координаты должны быть пропорциональны. Найдем координаты векторов $\overline{LP} = (-12, -6, 6)$, $\overline{LM} = (x, y - 3, z + 5)$. Тогда уравнение

прямой LP : $\frac{x}{-12} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+5}{6}$, а вектор $\overline{q}(2, 1, -1)$ - направляющий вектор прямой LP .

Напишем уравнение плоскости π , проходящей через точку N перпендикулярно прямой LP . Так как плоскость π перпендикулярна прямой LP , то вектор $\vec{q}(2, 1, -1)$ перпендикулярен плоскости π . Следовательно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π , вектор $\overline{NM}$ перпендикулярен вектору $\vec{q}$, а значит, их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(\overline{NM}, \vec{q}) = 0$.

Найдем координаты вектора $\overline{NM} = (x+1, y, z-2)$. Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{NM}$ и $\vec{q}$:

$$2(x+1) + y - (z-2) = 0.$$

Тогда

$2x + y - z + 4 = 0$ - уравнение плоскости π , проходящей через точку N перпендикулярно прямой LP .

Найдем координаты точки F - точки пересечения прямой LP и плоскости π .

Для этого запишем параметрическое уравнение прямой LP :

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{-1} = t;$$

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = -5 - t. \end{cases}$$

Точка $F(x_0, y_0, z_0)$ лежит на прямой LP , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$$x_0 = 2t_0; y_0 = 3 + t_0; z_0 = -5 - t_0.$$

Точка F также лежит в плоскости π , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$2x_0 + y_0 - z_0 + 4 = 0.$$

Тогда имеем:

$$2 \cdot 2t_0 + 3 + t_0 - (-5 - t_0) + 4 = 0;$$

$$4t_0 + 3 + t_0 + 5 + t_0 + 4 = 0;$$

$$6t_0 + 12 = 0 \Rightarrow t_0 = -2.$$

Найдем координаты точки F :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \cdot (-2) = -4 \\ y_0 = 3 - 2 = 1 \\ z_0 = -5 + 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow F(-4, 1, -3).$$

Найдем координаты точки N_1 - симметричной точке N относительно прямой LP . Точка F - середина отрезка NN_1 , следовательно, координаты точки F являются средним арифметическим координат точек N_1 и N . Пусть координаты точки $N_1 (x, y, z)$. Тогда;

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = -4 \\ \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{z+2}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \\ z = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $N_1(-7, 2, -8)$ – точка, симметричная точке N относительно прямой LP .

25) Найти координаты точки N_2 , симметричной точке N относительно плоскости (QLP) , где $Q(-9, 1, -1)$; $L(0, 3, -5)$; $P(-12, -3, 1)$; $N(-1, 0, 2)$.

. Решение

Уравнение плоскости (QLP) : $2x + y + 5z + 22 = 0$ (см. п. 3).

Через точку N проведем прямую NN_3 перпендикулярно плоскости (QLP) . Так как вектор $\vec{n}(2, 1, 5)$ перпендикулярен плоскости (QLP) , то прямая (NN_3) параллельна вектору $\vec{n}$, следовательно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой NN_3 , вектор $\overrightarrow{NM}(x+3, y-9, z-2)$ коллинеарен вектору $\vec{n}$, а значит, координаты векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ должны быть пропорциональны (рис. 1.65).

Тогда:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{5} \text{ – уравнение прямой } NN_3.$$

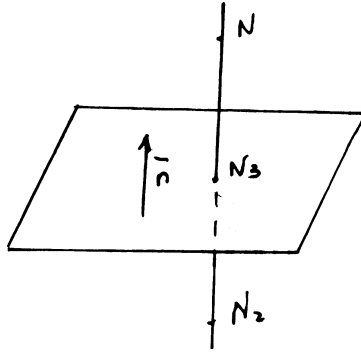


Рис. 1.65

Напишем параметрическое уравнение этой прямой:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{5} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2 + 5t. \end{cases}$$

Найдем проекцию точки N на плоскость (QLP) . Точка N_3 лежит на прямой NN_3 , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$$x_0 = -1 + 2t_0; y_0 = t_0; z_0 = 2 + 5t_0.$$

Точка N_3 также лежит в плоскости (QLP) , значит, ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$2x_0 + y + 5z_0 + 22 = 0.$$

Тогда имеем:

$$2 \cdot (-1 + 2t_0) + t_0 + 5(2 + 5t_0) + 22 = 0;$$

$$-2 + 4t_0 + t_0 + 10 + 25t_0 + 22 = 0;$$

$$30t_0 + 30 = 0 \Rightarrow t_0 = -1.$$

Найдем координаты точки N_3 :

$$\begin{cases} x_0 = -1 - 2 = -3 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 2 - 5 = -3 \end{cases} \Rightarrow N_3(-3, -1, -3).$$

Найдем координаты точки N_2 - симметричной точке N относительно плоскости (QLP) . Точка N_2 - середина отрезка NN_3 , следова-

тельно, координаты точки N_2 являются средним арифметическим координат точек N_3 и N . Пусть координаты точки N_2 (x, y, z) . Тогда;

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = -3 \\ \frac{y}{2} = -1 \\ \frac{z+2}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

Следовательно, точка $N_2(-5, -2, -8)$ – точка, симметричная точке N относительно плоскости QLP .

1.5. Кривые 2-го порядка

Алгебраической *кривой 2-го порядка* называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением вида:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \text{ где } A^2 + B^2 + C^2 > 0 \quad (1)$$

Классификация кривых 2-го порядка

Для любой кривой 2-го порядка всегда можно подобрать такую новую декартову прямоугольную систему координат, в которой уравнение (1) примет вид канонического уравнения кривой. Ниже приведены канонические уравнения основных кривых 2-го порядка.

1. Эллипс

Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

где a – большая полуось; b – малая полуось (рис. 1.66).

Запишем основные параметры эллипса.

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ – *вершины* эллипса;

точка $O(0, 0)$ – *центр* эллипса;

оси OX , OY – *оси симметрии*;

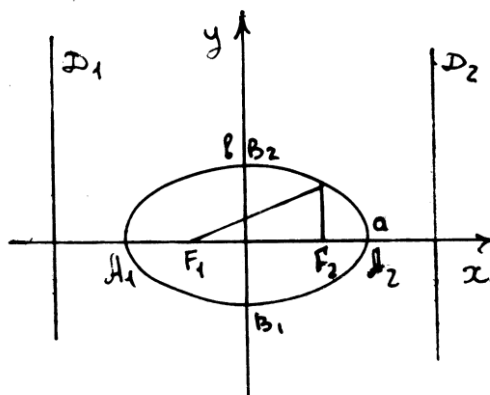


Рис. 1.66

число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – расстояние от центра до фокуса;

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы.

Пусть M – произвольная точка, лежащая на эллипсе, тогда

$\overline{F_1M}$, $\overline{F_2M}$ – фокальные радиус-векторы точки M .

$r_1 = |\overline{F_1M}|$, $r_2 = |\overline{F_2M}|$ – фокальные радиусы точки M ;

Число $E = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет ($0 \leq E < 1$).

При $a = b$ получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ радиуса a (фокус окружности совпадает с центром; а эксцентриситет равен нулю).

Прямые $D_1 : x = -\frac{a}{E}$, $D_2 : x = \frac{a}{E}$ – директрисы эллипса.

Фокальное свойство эллипса

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a -$$

сумма расстояний от любой точки M , лежащей на эллипсе, до фокусов есть величина постоянная и равная $2a$.

Директориальное свойство эллипса

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M, D_1)} = \frac{|F_2M|}{\rho(M, D_2)} = E,$$

где $\rho(M, D_1)$ – расстояние от произвольной точки M , лежащей на эллипсе, до директрисы $D_1: x = -\frac{a}{E}$;

$\rho(M, D_2)$ – расстояние от произвольной точки M , лежащей на эллипсе, до директрисы $D_2: x = \frac{a}{E}$.

Для любой точки M , лежащей на эллипсе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная E .

2. Гипербола

Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

где a – действительная полуось, b – мнимая полуось (рис. 1.67).

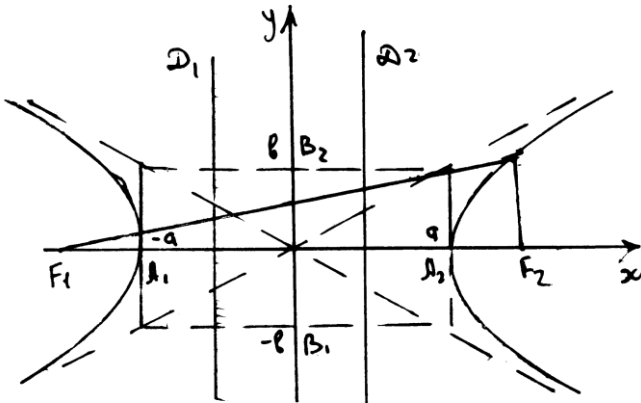


Рис. 1.67

Запишем основные параметры гиперболы.

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – вершины гиперболы;
 точка $O(0, 0)$ – центр гиперболы;
 оси OX , OY – оси симметрии;

прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты;

Число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – расстояние от центра до фокуса;

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы гиперболы.

Пусть $M(x, y)$ – точка, лежащая на гиперболе, тогда

$\overline{F_1M}$, $\overline{F_2M}$ – фокальные радиус-векторы точки M ;

$r_1 = |\overline{F_1M}|$, $r_2 = |\overline{F_2M}|$ – фокальные радиусы точки M .

Число $E = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет, $E > 1$.

Если $a = b$, то гипербола является равносторонней.

Прямые $D_1 : x = -\frac{a}{E}$, $D_2 : x = \frac{a}{E}$ – директрисы гиперболы.

Фокальное свойство гиперболы

$$\left| |\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| \right| = 2a -$$

модуль разности расстояний от любой точки M , лежащей на гиперболе, до фокусов есть величина постоянная и равна $2a$.

Директориальное свойство гиперболы

$$\frac{|\overline{F_1M}|}{\rho(M, D_1)} = \frac{|\overline{F_2M}|}{\rho(M, D_2)} = E,$$

где $\rho(M, D_1)$, $\rho(M, D_2)$ – расстояние от произвольной точки M , лежащей на гиперболе, до соответствующей директрисы.

Для любой точки M , лежащей на гиперболе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная E .

Уравнение гиперболы, сопряженной гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеет вид (рис. 1.68):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

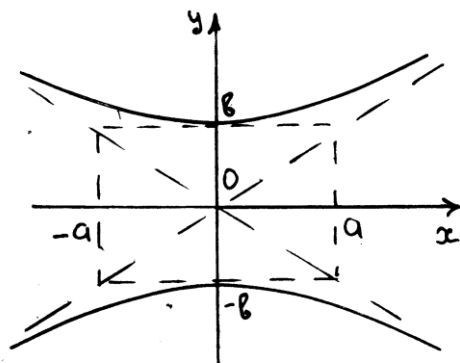


Рис. 1.68

3. Парабола (рис. 1.69)

Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px \quad (p > 0).$$

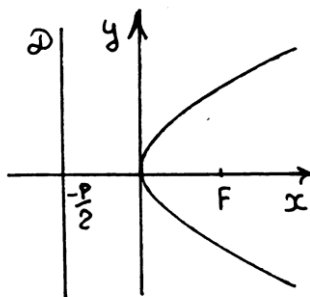


Рис. 1.69

Запишем основные параметры параболы:

Число p – *параметр*;

точка $O(0, 0)$ – *вершина параболы*;

ось Ox – *ось симметрии*;

точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на параболе, тогда $\overline{FM}$ – фокальный радиус-вектор точки M ;

Прямая $D: x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболы.

Директориальное свойство параболы

$$\frac{|FM|}{\rho(M, D)} = 1,$$

где $\rho(M, D)$ – расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на параболе, до директрисы.

Для любой точки M , лежащей на параболе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная и равная 1.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс (не определяет никакого действительного образа).

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точка с координатами $(0, 0)$ (рис. 1.70).

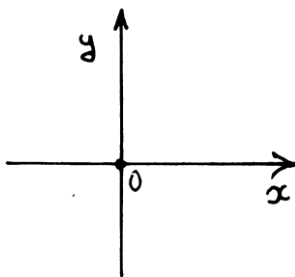


Рис. 1.70

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых (рис. 1.71),

где $y = \pm \frac{b}{a}x$ – уравнения прямых.

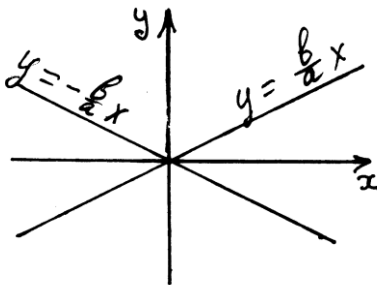


Рис. 1.71

7. $y^2 = b^2$ – пара параллельных прямых (рис. 1.72).

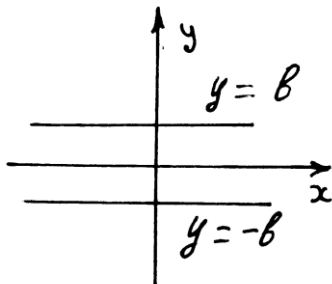


Рис. 1.72

8. $y^2 = -b^2$ – пара мнимых, параллельных прямых (не определяет никакого действительного образа).

9. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых (ось OX).

Пример 1.34.

Написать каноническое уравнение эллипса, найти недостающие параметры, сделать чертеж.

а) $a = 5$, $b = 4$;

б) $c = 2$, $E = 2/3$;

в) $b = 3$, $E = \frac{1}{\sqrt{10}}$;

г) $\rho(D_1, D_2) = 8$ – расстояние между директрисами,

$$E = 3/4;$$

$$\text{д) } c = 0; a = 2.$$

Решение

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

а) $a = 5$, $b = 4$ – полуоси эллипса.

Тогда:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ – каноническое уравнение искомого эллипса.}$$

Найдем основные параметры эллипса.

Точка $O(0, 0)$ – центр эллипса;

$a = 5$ – большая полуось; $b = 4$ – малая полуось;

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ – расстояние от центра до фокуса;}$$

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса; тогда

$$F_1(-3, 0), F_2(3, 0).$$

Точки $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, 4)$, $B_2(0, 4)$ – вершины эллипса;

$$E = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \text{ – эксцентриситет эллипса.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы эллипса, тогда $D_1: x = -\frac{25}{3}$;

$$D_2: x = \frac{25}{3}.$$

Изобразим эллипс на координатной плоскости (рис. 1.73).

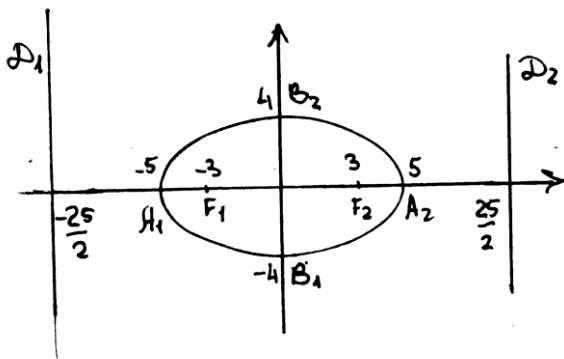


Рис. 1.73

б) $c = 2, E = 2/3$.

Найдем полуоси эллипса. Из формулы для нахождения эксцентриситета выразим a :

$$E = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{E} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 - \text{большая полуось.}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2;$$

$$b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} - \text{малая полуось.}$$

Тогда

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 - \text{каноническое уравнение искомого эллипса.}$$

Найдем основные параметры эллипса.

Точка $O(0, 0)$ – центр; точки $A_1(-3, 0), A_2(3, 0), B_1(0, -\sqrt{5}), B_2(0, \sqrt{5})$ – вершины.

Точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса, тогда $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$;

$$E = \frac{2}{3} - \text{эксцентриситет.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы, тогда

$$D_1: x = -\frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{9}{2}; D_2: x = \frac{9}{2}.$$

Изобразим эллипс на координатной плоскости (рис. 1.74).

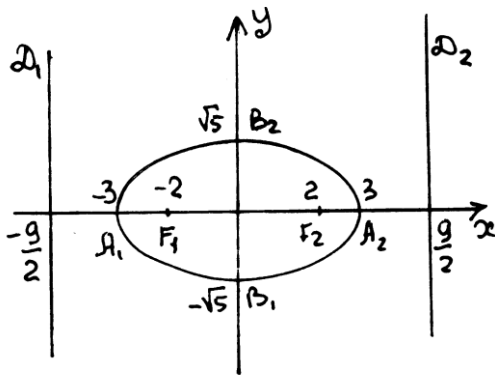


Рис. 1.74

$$\text{в) } b = 3, E = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Найдем большую полуось эллипса. В формулу для нахождения эксцентриситета подставим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:

$$E = \frac{c}{a}, \text{ тогда}$$

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Возведем уравнение в квадрат:

$$a^2 E^2 = a^2 - b^2.$$

Подставим значения из условия задачи: $E = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $b = 3$, тогда:

$$a^2 \cdot \frac{1}{10} = a^2 - 9;$$

$$a^2 = 10a^2 - 90;$$

$$a^2 = 10;$$

$$a = \pm\sqrt{10}$$

Так как $a > 0$, то $a = \sqrt{10}$ – большая полуось.

Тогда

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ – каноническое уравнение искомого эллипса.}$$

Найдем основные параметры эллипса.

Точка $O(0, 0)$ – центр; точки $A_1(-\sqrt{10}, 0)$, $A_2(\sqrt{10}, 0)$,
 $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$ – вершины эллипса.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{10 - 9} = 1$ – расстояние от центра до фокуса.

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса, тогда
 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$.

$$E = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ – эксцентриситет.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы, тогда

$$D_1: x = -\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{1} = -10; D_2: x = 10.$$

Изобразим эллипс на координатной плоскости (рис. 1.75).

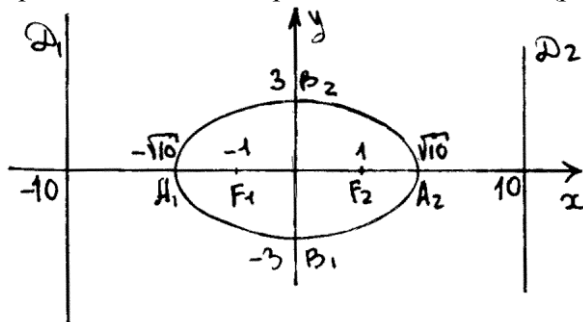


Рис. 1.75

$$\text{г) } \rho(D_1, D_2) = 8, \quad E = \frac{3}{4}.$$

Найдем полуоси эллипса.

Так как уравнения директрис; $D: x = \pm \frac{a}{E}$, то расстояние между ними:

$$\rho(D_1, D_2) = \frac{a}{E} + \frac{a}{E} = \frac{2a}{E} = 8.$$

По условию задачи $E = \frac{3}{4}$, следовательно,

$$\frac{2a \cdot 4}{3} = 8 \Rightarrow a = 3 - \text{большая полуось.}$$

По формуле для нахождения эксцентриситета:

$$E = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot E = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Так как

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ то}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - \frac{81}{16} = \frac{63}{16} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{63}}{4} - \text{малая полуось.}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{63}{16}} = 1 - \text{каноническое уравнение искомого эллипса.}$$

Найдем основные параметры.

Точка $O(0, 0)$ – центр; точки $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$, $B_1(0, -\frac{\sqrt{63}}{4})$,

$B_2(0, \frac{\sqrt{63}}{4})$ – вершины эллипса.

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы, тогда

$$F_1(-\frac{9}{4}, 0), F_2(\frac{9}{4}, 0).$$

$$E = \frac{3}{4} - \text{эксцентриситет.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы, тогда

$$D_1: x = -\frac{3 \cdot 4}{3} = -\frac{12}{3} = -4; D_2: x = \frac{12}{3} = 4.$$

Изобразим эллипс на координатной плоскости (рис. 1.76).

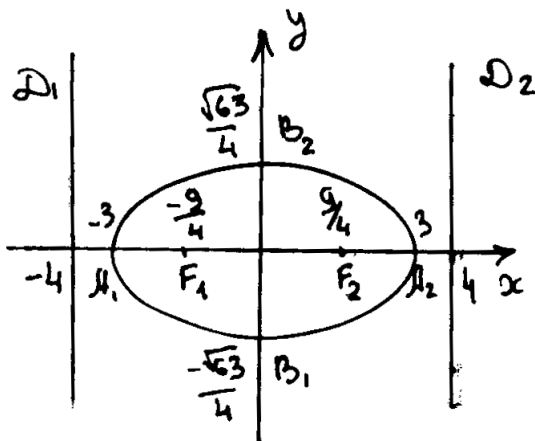


Рис. 1.76

д) $c = 0$; $a = 2$.

$$c = 0 \Rightarrow a = b.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 - \text{окружность радиуса 2.}$$

$F(0, 0)$ – фокус; $E = 0$.

Изобразим окружность на координатной плоскости (рис. 1.77).

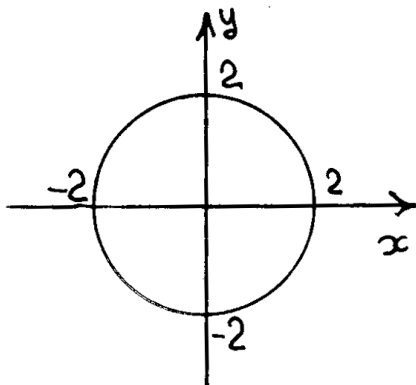


Рис. 1.77

Пример 1.35.

Написать каноническое уравнение гиперболы, найти недостающие параметры, сделать чертеж.

а) $a = 3; b = 4;$

б) $b = 3; c = 4;$

в) $E = \frac{3}{4}; c = 2;$

г) $\rho(D_1, D_2) = 4, E = 3, \rho(D_1, D_2)$ – расстояние между директрисами;

д) $y = \pm \frac{3}{2}x$ – уравнения асимптот, $c = 2.$

Решение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – каноническое уравнение гиперболы.}$$

а) $a = 3, b = 4.$

Тогда

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ – каноническое уравнение искомой гиперболы.}$$

Найдем основные параметры гиперболы.

$a = 3$ – действительная полуось;

$b = 4$ – мнимая полуось.

Точка $O(0, 0)$ – центр; точки $A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$ – вершины.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ – расстояние от центра до фокуса.

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы гиперболы, тогда

$$F_1(-5, 0), F_2(5, 0).$$

$$E = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \text{ – эксцентриситет.}$$

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты, тогда $y = \pm \frac{4}{3}x$.

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы гиперболы, тогда

$$D_1: x = -\frac{3 \cdot 3}{5} = -\frac{9}{5}; D_2: x = \frac{9}{5}.$$

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.78).

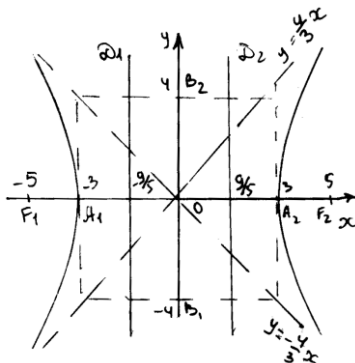


Рис. 1.78

б) $b = 3, c = 4$.

Найдем действительную полуось:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow; a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}.$$

Тогда

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ – каноническое уравнение искомой гиперболы.}$$

Найдем основные параметры гиперболы.

Точка $O(0, 0)$ – центр;

$a = \sqrt{7}$ – действительная полуось;

$b = 3$ – мнимая полуось;

точки $A_1(-\sqrt{7}, 0)$, $A_2(\sqrt{7}, 0)$ – вершины;

точки $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ – фокусы.

$$E = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{7}} - \text{эксцентриситет.}$$

$$\text{Прямые } y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}x - \text{асимптоты.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы гиперболы, тогда в нашем случае

$$D_1: x = -\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{4} = -\frac{7}{4}; D_2: x = \frac{7}{4}.$$

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.79).

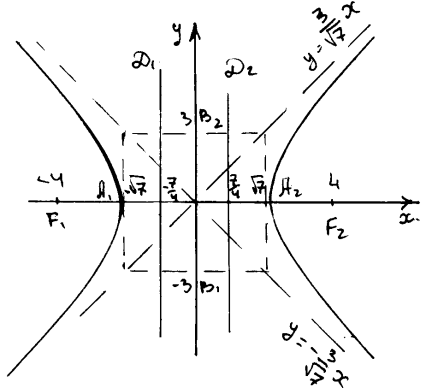


Рис. 1.79

в) $E = 4/3$; $c = 2$.

Найдем действительную и мнимую полуоси. Из формулы для нахождения эксцентриситета выразим a

$$E = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{E}; a = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2} - \text{действительная полуось.}$$

Значение мнимой полуоси найдем по формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Тогда}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4};$$

$b = \frac{\sqrt{7}}{2}$ – мнимая полуось.

$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$ – каноническое уравнение искомой гиперболой.

Найдем основные параметры гиперболой.

Точка $O(0,0)$ – центр; точки $A_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $A_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ – вершины гиперболой; точки $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ – фокусы.

Уравнение асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7} \cdot 2}{2 \cdot 3}x;$$

прямые $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x$ – асимптоты гиперболой.

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы гиперболой, в нашем случае

$$D_1: x = -\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} = -\frac{9}{8}; \quad D_2: x = \frac{9}{8}.$$

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.80).

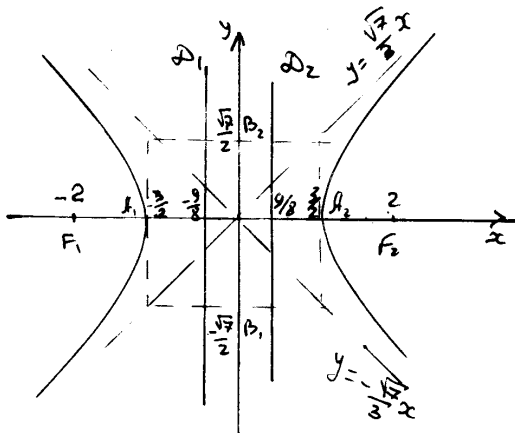


Рис. 1.80

г) $E = 3$.

$\rho(D_1, D_2) = 4$ – расстояние между директрисами.

Найдем действительную и мнимую полуоси.

$D: x = \pm \frac{a}{E}$ – уравнения директрис, тогда расстояние между

директрисами: $\rho(D_1, D_2) = \frac{a}{E} + \frac{a}{E} = \frac{2a}{E} = 4$.

Так как $E = 3 \Rightarrow$

$$\frac{2a}{3} = 4 \Rightarrow a = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ – действительная полуось;}$$

$$E = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot E = 3 \cdot 6 = 18;$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 18^2 - 36 = 288;$$

$$b = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \text{ – мнимая полуось.}$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{288} = 1 \text{ – каноническое уравнение искомой гиперболы.}$$

Найдем основные параметры гиперболы.

Точка $O(0, 0)$ – центр; точки $A_1(-6, 0)$, $A_2(6, 0)$ – вершины гиперболы.

$c = 18 \Rightarrow$ точки $F_1(-18, 0)$, $F_2(18, 0)$ – фокусы;

$E = 3$ – эксцентриситет.

Уравнение асимптот: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

$$y = \pm \frac{12\sqrt{2}}{6} x; \text{ тогда прямые } y = \pm 2\sqrt{2}x \text{ – асимптоты гиперболы.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы гиперболы; в настоящем случае –

$$D_1: x = -\frac{6}{3} = -2; D_2: x = 2.$$

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.81).

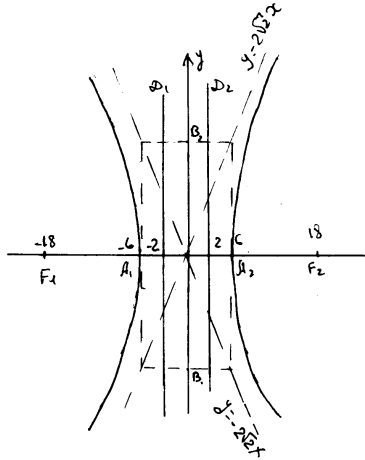


Рис. 1.81

д) $y = \pm \frac{2}{3}x$; $c = 2$.

Найдем действительную и мнимую полуоси.

Прямые $y = \pm \frac{2}{3}x$ – асимптоты гиперболы. Так как уравне-

ние асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$, то имеем $\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – расстояние от центра до фокуса $\Rightarrow$

$c^2 = a^2 + b^2$; по условию $c = 2 \Rightarrow$

$$4 = a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2;$$

$$4 = a^2 + \frac{9}{4}a^2;$$

$$16 = 13a^2;$$

$a = \frac{4}{\sqrt{13}}$ – действительная полуось.

$b = \frac{3}{2}a = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot \sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$ – мнимая полуось.

$$\frac{x^2}{\frac{16}{13}} - \frac{y^2}{\frac{36}{13}} = 1 \text{ — каноническое уравнение искомой гипер-}$$

болы.

Найдем основные параметры гиперболы.

Точка $O(0, 0)$ — центр; точки $A_1\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, 0\right)$, $A_2\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, 0\right)$ —

вершины гиперболы.

$c = 2 \Rightarrow$ точки $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ — фокусы;

$$E = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ — эксцентриситет.}$$

Прямые $D: x = \pm \frac{a}{E}$ — директрисы гиперболы, в нашем слу-

чае — $D_1: x = -\frac{4 \cdot 2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{8}{13}$; $D_2: x = \frac{8}{13}$.

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.82).

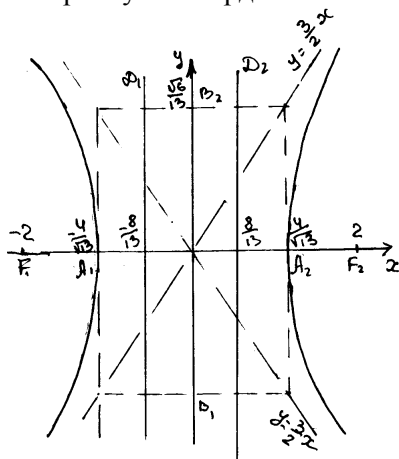


Рис. 1.82

Пример 1.36.

Определить тип кривой, найти её основные параметры, сделать чертеж: в данной ДПСК

$$1) 4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0;$$

$$2) 9x^2 - y^2 - 36x + 10y + 20 = 0;$$

$$3) 3x^2 + 4x + y + 9 = 0;$$

$$4) -3y^2 + 9x - 5y + 2 = 0.$$

Решение

$$1) 4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полный квадрат по x и по y :

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y + 49 = 0;$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) + 49 = 0;$$

$$4((x-1)^2 - 1) + 9((y+3)^2 - 9) = -49;$$

$$4(x-1)^2 - 4 + 9(y+3)^2 - 81 = -49;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 = 36 \text{ разделим на } 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'$, которая получается из исходной декартовой системы координат XOY параллельным переносом осей OX и OY :
$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 3. \end{cases}$$

Тогда $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$ – каноническое уравнение эллипса.

Найдем основные параметры эллипса:

$a = 3$ – большая полуось, $b = 2$ – малая полуось,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ – расстояние от центра до фокуса;

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы, тогда

$$F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0).$$

$$E = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1 \text{ – эксцентриситет.}$$

Прямые $d : x' = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы; в нашем случае–

$$d_1 : x' = -\frac{3 \cdot 3}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{5}}, \quad d_2 : x' = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Найдем центр, вершины, фокусы, директрисы эллипса в исходной XOY системе координат, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

и результаты запишем в таблицу:

Параметры эллипса	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$
Центр	$O'(0; 0)$	$O'(1; -3)$
Вершины	$A_1(-3; 0)$ $A_2(3; 0)$ $B_1(0; -2)$ $B_2(0; 2)$	$A_1(-2; -3)$ $A_2(4; -3)$ $B_1(1; -5)$ $B_2(1; -1)$
Фокусы	$F_1(-\sqrt{5}; 0)$ $F_2(\sqrt{5}; 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+1; -3)$ $F_2(\sqrt{5}+1; -3)$
Директрисы	$x' = \frac{9}{\sqrt{5}}; x' = -\frac{9}{\sqrt{5}}$	$x = 1 + \frac{9}{\sqrt{5}}; x = 1 - \frac{9}{\sqrt{5}}$

Изобразим эллипс на координатной плоскости (рис. 1.83).

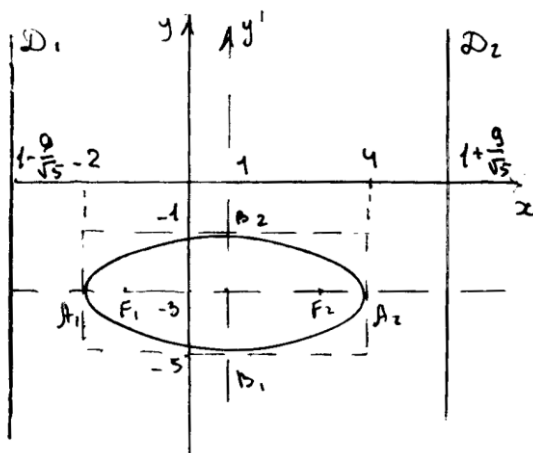


Рис. 1.83

$$2) 9x^2 - y^2 - 36x + 10y + 20 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полный квадрат по переменным x и y :

$$9(x^2 - 4) - (y^2 - 10y) + 20 = 0;$$

$$9((x-2)^2 - 4) - ((y-5)^2 - 25) + 20 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - 36 - (y-5)^2 + 25 + 20 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - (y-5)^2 + 9 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - (y-5)^2 = -9 \text{ разделим на } 9;$$

$$(x-2)^2 - \frac{(y-5)^2}{9} = -1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'$, которая получается из исходной декартовой прямоугольной системы координат параллельным переносом осей OX и OY :

$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 5. \end{cases}$$

$$\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{3^2} = -1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы, со-}$$

$$\text{пряженной к гиперболе } \frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1.$$

Найдем основные параметры гиперболы:

$a = 3$ – действительная полуось,

$b = 1$ – мнимая полуось,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ – расстояние от центра до фокуса,

Точки $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ – фокусы, тогда

$F_1(0, -\sqrt{10})$, $F_2(0, \sqrt{10})$.

$$E = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3};$$

Прямые $x' = \pm \frac{b}{a} y'$ – асимптоты; тогда $x' = \pm \frac{1}{3} y'$.

Прямые $d: y' = \pm \frac{a}{E}$ – директрисы; тогда

$$d_1: y' = -\frac{3 \cdot 3}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{10};$$

$$d_2: y' = \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

Найдем центр, вершину, фокусы, директрисы, асимптоты в сходной (XOY) системе координат, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 5. \end{cases}$$

Найдем уравнения асимптот в системе координат XOY .

$$x' = \frac{1}{3} y' \text{ и } x' = -\frac{1}{3} y';$$

$$3(x-2) = y-5 \text{ и } 3(x-2) = -y+5;$$

$$3x = y+1 \text{ и } 3x = 11-y.$$

Результаты запишем в таблицу:

Параметры гиперболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{9} = -1$	$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{9} = -1$
Центр	$O'(0; 0)$	$O'(2; 5)$
Вершины	$A_1(0; -3)$	$A_1(2; 2)$
	$A_2(0; 3)$	$A_2(2; 8)$

Фокусы	$F_1(0; -\sqrt{10})$ $F_2(0; \sqrt{10})$	$F_1(2; 5 - \sqrt{10})$ $F_2(2; 5 + \sqrt{10})$
Директрисы	$y' = -\frac{9}{\sqrt{10}}$ $y' = \frac{9}{\sqrt{10}}$	$x = 5 - \frac{9}{\sqrt{10}}$ $x = 5 + \frac{9}{\sqrt{10}}$
Асимптоты	$x' = \frac{1}{3}y'$ $x' = -\frac{1}{3}y'$	$3x = y + 1$ $3x + y = 11$

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 1.84).

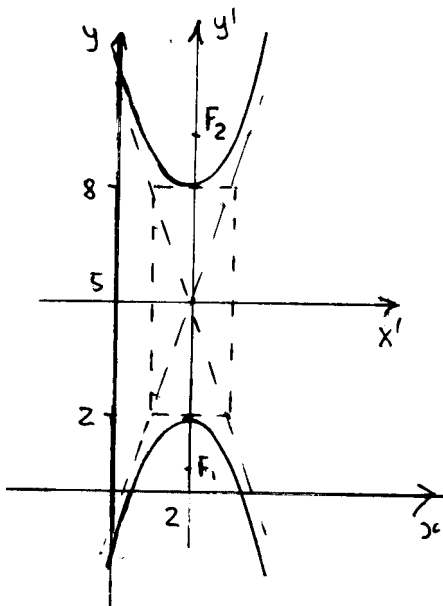


Рис. 1.84

3) $3x^2 + 4x + y + 9 = 0$.

Выделим полный квадрат по x :

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + y + 9 = 0;$$

$$3\left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) = -y - 9;$$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = -y - 9;$$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -y - \frac{23}{3};$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}\left(y + \frac{23}{3}\right);$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX и OY :

$$\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3}; \\ y' = y + \frac{23}{3}. \end{cases}$$

$$(x')^2 = -\frac{1}{3}y' - \text{каноническое уравнение параболы.}$$

Найдем основные параметры параболы.

$$p = \frac{1}{6} - \text{параметр.}$$

$$\text{Точка } F\left(0, \frac{p}{2}\right), \text{ тогда } F\left(0, \frac{1}{12}\right) - \text{фокус.}$$

$$\text{Прямая } d: y' = -\frac{p}{2} - \text{директриса, тогда } y' = -\frac{1}{12}.$$

Найдем вершину, фокус и директрису в исходной XOY системе координат, пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' - \frac{2}{3}, \\ y = y' - \frac{23}{3} \end{cases}$$

и результаты запишем в таблицу:

Параметры параболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$(x')^2 = \frac{1}{3}y'$	$3x^2 + 4x + y + 9 = 0$
Вершина	$O'(0,0)$	$O'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{23}{3}\right)$
Фокусы	$F\left(0, \frac{1}{12}\right)$	$F\left(-\frac{2}{3}, -\frac{93}{12}\right)$
Директрисы	$y' = -\frac{1}{12}$	$y = -\frac{91}{12}$

Изобразим параболу на координатной плоскости (рис. 1.85).

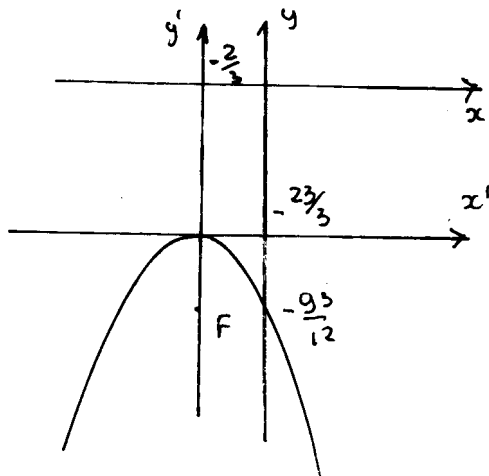


Рис. 1.85

4) $-3y^2 + 9x - 5y + 2 = 0$.

Выделим полный квадрат по y :

$$-3\left(y^2 + \frac{5}{3}\right) + 9x + 2 = 0;$$

$$-3\left(\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) + 9x + 2 = 0;$$

$$-3\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} + 9x + 2 = 0;$$

$$-36\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = -108x - 24 - 25;$$

$$-36\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = -108x - 49;$$

$$36\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = 108\left(x + \frac{49}{108}\right);$$

$$\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = 3\left(x + \frac{49}{108}\right).$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX и OY :

$$\begin{cases} y' = y + \frac{5}{6}, \\ x' = x + \frac{49}{108}. \end{cases}$$

$(y')^2 = 3x'$ – каноническое уравнение параболы.

Найдем основные параметры параболы.

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $p = \frac{3}{2} \Rightarrow$ точка $F = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ – фокус.

Прямая $D: y = -\frac{p}{2}$ – директриса, тогда $D: y' = -\frac{3}{4}$.

Найдем вершину, фокус и директрису параболы в системе координат XOY , пользуясь формулами:

$$\begin{cases} x = x' - \frac{49}{108}, \\ y = y' - \frac{5}{6} \end{cases}$$

результаты запишем в таблицу:

Параметры параболы	Система координат	
	каноническая $X'O'Y'$	исходная XOY
Уравнение	$(y')^2 = 3x'$	$-3y^2 + 9x - 5y + 2 = 0$
Вершина	$O'(0,0)$	$O'\left(-\frac{49}{108}, -\frac{5}{6}\right)$
Фокус	$F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$	$F\left(\frac{8}{27}, -\frac{5}{6}\right)$
Директриса	$y' = -\frac{3}{4}$	$y = -\frac{19}{12}$

Изобразим параболу на координатной плоскости (рис. 1.86).

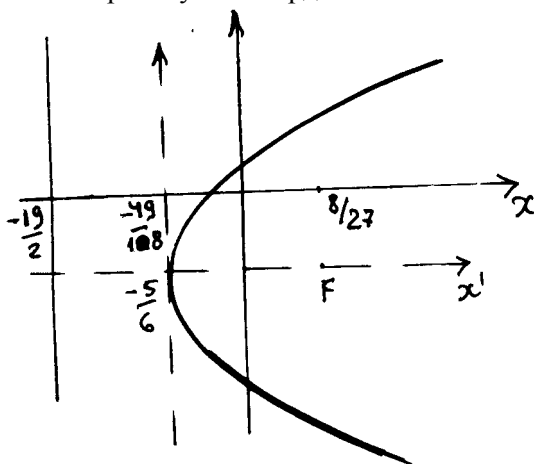


Рис. 1.86

Пример 1.37.

Точка $M(1, -2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F(-2, 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

Решение

Для любой точки M , лежащей на гиперболе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная E .

Найдем расстояние от точки $M(1, -2)$ до фокуса $F(-2, 2)$.

Координаты вектора $\overline{FM} = (3, -4)$, его длина $|\overline{FM}| = \sqrt{9+16} = 5$.

Найдем расстояние от точки $M(1, -2)$ до прямой $d: 2x - y - 1 = 0$, по формуле:

$$\rho(M, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } \ell: Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

$$M(x_0, y_0).$$

$$\text{Тогда } \rho(M, d) = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Найдем эксцентриситет:

$$E = \frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, d)} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Пусть точка $N(x, y)$ - произвольная точка, лежащая на гиперболе,

$$\text{тогда } \frac{|\overline{FN}|}{\rho(N, d)} = E = \frac{5\sqrt{5}}{3};$$

$$\frac{|\overline{FN}|}{\rho(N, d)} = \frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \cdot \sqrt{5}}{|2x - y - 1|} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Разделим тождество на $\sqrt{5}$:

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}}{|2x - y - 1|} = \frac{5}{3}$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{(x+2)^2 + (y-2)^2}{(2x - y - 1)^2} = \frac{25}{9}.$$

Перемножим по свойству пропорции:

$$9(x+2)^2 + 9(y-2)^2 = 25(2x - y - 1)^2.$$

Раскроем скобки:

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 - 36y + 36 = 100x^2 + 25y^2 + 25 - 100xy - 100x + 50y$$

Тогда

$91x^2 + 16y^2 - 100xy - 136x + 86y - 47 = 0$ - уравнение искомой гиперболы.

1.6. Поверхности 2-го порядка

Алгебраической *поверхностью 2-го порядка* называется поверхность, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + M = 0, \quad (2)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$.

Классификация поверхностей 2-го порядка

Для любой поверхности 2-го порядка всегда можно подобрать такую новую декартову прямоугольную систему координат, в которой уравнение (2) примет вид канонического уравнения поверхности. Ниже приведены канонические уравнения основных поверхностей 2-го порядка.

1. Эллипсоид (рис. 1.87) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c – полуоси эллипсоида.

В сечении плоскостью $z = 0$ получаем эллипс, описываемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

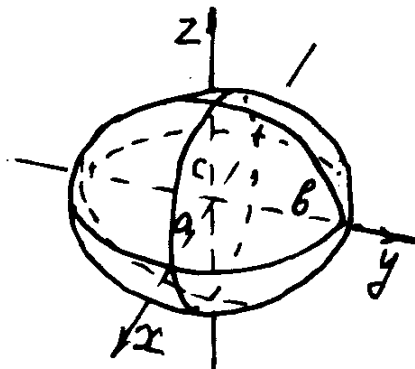


Рис. 1.87

2. Однополостный гиперболоид (рис. 1.88) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В сечении плоскостью $z = 0$ получаем эллипс, описываемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

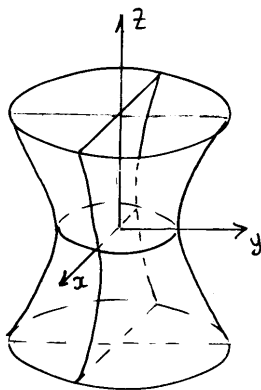


Рис. 1.88

3. Двуполостный гиперболоид (рис. 1.89) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

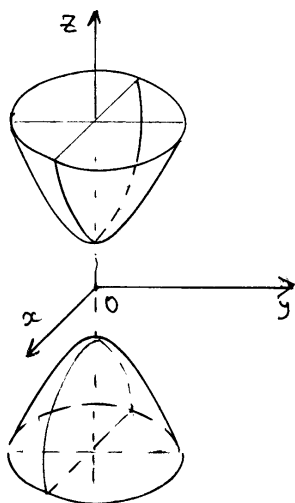


Рис. 1.89

4. Конус второго порядка (рис. 1.90) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

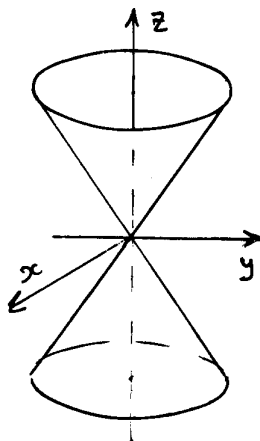


Рис. 1.90

5. Эллиптический параболоид (рис. 1.91) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

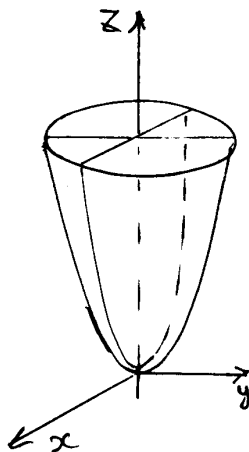


Рис. 1.91

6. Гиперболический параболоид (рис. 1.92) –

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

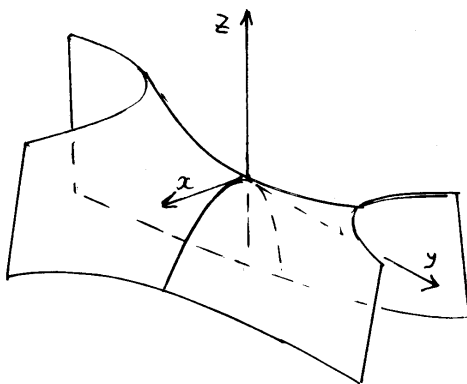


Рис. 1.92

7. Эллиптический цилиндр второго порядка (рис. 1.93) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

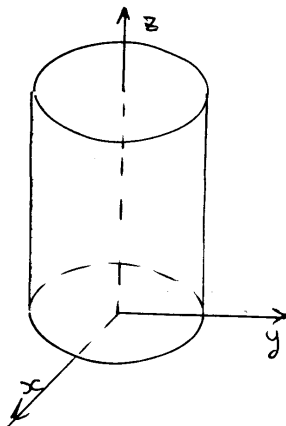


Рис. 1.93

8. Гиперболический цилиндр второго порядка (рис. 1.94) –

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

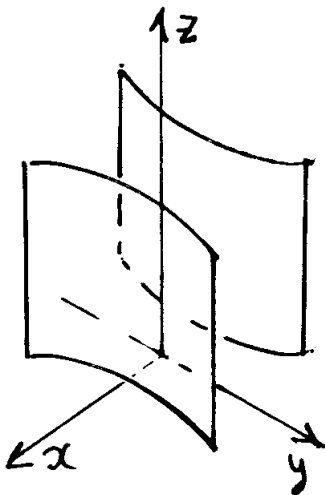


Рис. 1.94

9. Параболический цилиндр второго порядка (рис. 1.95) –

$$y^2 = 2px.$$

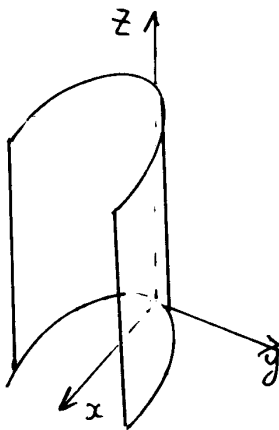


Рис. 1.95

10. Мнимый эллипсоид (не определяет никакого действительного образа) –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

11. Пара пересекающихся плоскостей –

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $bх \pm ау = 0$ – уравнения плоскостей.

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - $\emptyset$ (не определяет никакого действительного образа).

Пример 1.38.

Определить тип поверхности и сделать чертеж.

1) $9x^2 + y^2 + 4z^2 + 162x - 10y - 96z + 754 = 0$;

2) $4x^2 + 9y^2 - 25z^2 - 24x + 72y + 450z - 945 = 0$;

3) $4x^2 - 9y^2 + 25z^2 - 24x + 72y + 450z + 1017 = 0$;

4) $9x^2 - y^2 + 25z^2 - 36x + 8y - 450z + 2045 = 0$;

5) $4y^2 - 5z^2 - 5x - 8y - 90z - 396 = 0$;

6) $9x^2 - 25y^2 + 162x - 50y + 479 = 0$;

7) $-3z^2 + 3z - 5y + 1 = 0$.

Решение

1) $9x^2 + y^2 + 4z^2 + 162x - 10y - 96z + 754 = 0$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты по переменным x , y и z .

$$9(x^2 + 18x) + y^2 - 10y + 16(z^2 - 6z) + 754 = 0;$$

$$9((x + 9)^2 - 81) + (y - 5)^2 - 25 + 16((z - 3)^2 - 9) + 754 = 0;$$

$$9(x + 9)^2 - 729 + (y - 5)^2 - 25 + 16(z - 3)^2 - 144 + 754 = 0;$$

$$9(x+9)^2 + (y-5)^2 + 16(z-3)^2 = 144.$$

Разделим на 144:

$$\frac{(x+9)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{144} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1;$$

$$\frac{(x+9)^2}{4^2} + \frac{(y-5)^2}{12^2} + \frac{(z-3)^2}{3^2} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $O'X'Y'Z'$, которая получается из исходной $OXYZ$ параллельным переносом осей OX , OY , OZ :

$$\begin{cases} x' = x + 9, \\ y' = y - 5, \\ z' = z - 3. \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{12^2} + \frac{(z')^2}{3^2} = 1,$$

$O'(-9, 5, 3)$ – центр эллипсоида.

Сделаем чертеж (рис. 1.96).

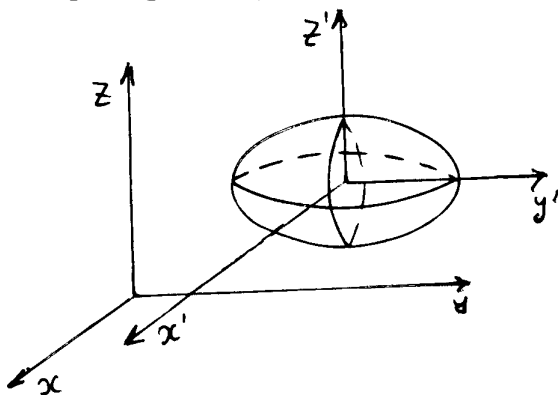


Рис. 1.96

$$2) 4x^2 + 9y^2 - 25z^2 - 24x + 72y + 450z - 945 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты по переменным x , y и z .

$$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 8y) - 25(z^2 - 18z) - 945 = 0;$$

$$4((x-3)^2 - 9) + 9((y+4)^2 - 16) - 25((z-9)^2 - 81) - 945 = 0;$$

$$4(x-3)^2 - 36 + 9(y+4)^2 - 144 - 25(z-9)^2 + 2025 - 945 = 0;$$

$$4(x-3)^2 + 9(y+4)^2 - 25(z-9)^2 + 900 = 0;$$

$$4(x-3)^2 + 9(y+4)^2 - 25(z-9)^2 = -900.$$

Разделим на 900:

$$\frac{(x-3)^2}{225} + \frac{9(y+4)^2}{100} - \frac{25(z-9)^2}{36} = -1;$$

$$\frac{(x-3)^2}{15^2} + \frac{(y+4)^2}{10^2} - \frac{(z-9)^2}{6^2} = -1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'Z'$, которая получается из исходной системы координат $HOYZ$ параллельным переносом осей OX , OY , OZ :

$$\begin{cases} x-3 = x', \\ y+4 = y', \\ z-9 = z'. \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение **двуполостного гиперболоида**:

$$\frac{(x')^2}{15^2} + \frac{(y')^2}{10^2} - \frac{(z')^2}{6^2} = -1.$$

$O'(3, -4, 9)$ – центр симметрии;

$A_1 = (0, 0, -6)$, $A_2 = (0, 0, 6)$ – координаты вершин в системе координат $X'O'Y'Z'$.

Ось симметрии – ось OZ' .

$$\text{Связь между координатами: } \begin{cases} x = x' + 3, \\ y = y' - 4, \\ z = z' + 9. \end{cases}$$

$A_1 = (3, -4, 3)$, $A_2 = (3, -4, 15)$ – координаты вершин в системе координат $HOYZ$.

Сделаем чертеж (рис. 1.97).

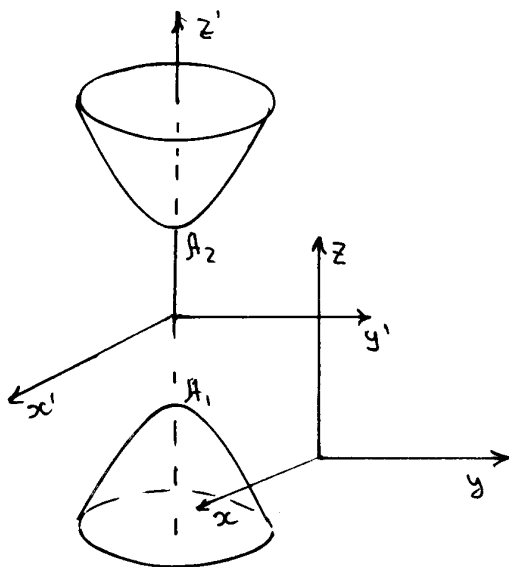


Рис. 1.97

$$3) 4x^2 - 9y^2 + 25z^2 - 24x + 72y + 450z + 1017 = 0;$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты по переменным x , y и z

$$4(x^2 - 6x) - 9(y^2 - 8y) + 25(z^2 + 18z) + 1017 = 0;$$

$$4((x - 3)^2 - 9) - 9((y - 4)^2 - 16) + 25((z + 9)^2 - 81) + 1017 = 0;$$

$$4(x - 3)^2 - 36 - 9(y - 4)^2 + 144 + 25(z + 9)^2 - 2025 + 1017 = 0;$$

$$4(x - 3)^2 - 9(y - 4)^2 + 25(z + 9)^2 = 900.$$

Разделим на 900:

$$\frac{(x - 3)^2}{225} - \frac{(y - 4)^2}{100} + \frac{(z + 9)^2}{36} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'Z'$, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX , OY , OZ :

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y - 4, \\ z' = z + 9. \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение однополостного гиперболоида, осью симметрии которого является ось $O'Y'$:

$$\frac{(x')^2}{15^2} - \frac{(y')^2}{10^2} + \frac{(z')^2}{6^2} = 1.$$

Точка $O'(3,4,-9)$ – центр симметрии.

Сделаем чертеж (рис. 1.98)

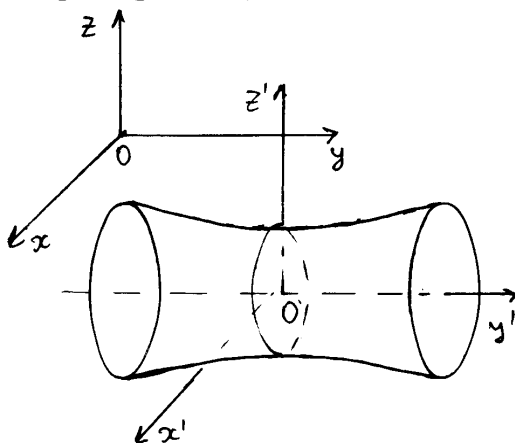


Рис. 1.98

$$4) 9x^2 - y^2 + 25z^2 - 36x + 8y - 450z + 2045 = 0;$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полный квадрат по переменным x, y и z :

$$9(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) + 25(z^2 + 18z) + 2045 = 0;$$

$$9((x-2)^2 - 4) - ((y-4)^2 - 16) + 25((z+9)^2 - 81) + 2045 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - 36 - (y-4)^2 + 16 + 25(z+9)^2 - 2025 + 2045 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - (y-4)^2 + 25(z-9)^2 = 0.$$

Разделим на 225:

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{225} + \frac{(z-9)^2}{9} = 0$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'Z'$, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX, OY, OZ :

$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 4, \\ z' = z - 9; \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение конуса, осью симметрии которого является ось $O'Y'$:

$$\frac{(x')^2}{5^2} - \frac{(y')^2}{15^2} + \frac{(z')^2}{3^2} = 0$$

Точка $O(2, 4, 9)$ – центр симметрии конуса.

Сделаем чертеж (рис. 1.99).

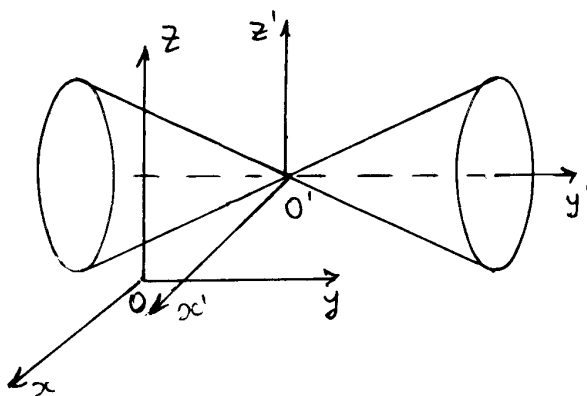


Рис. 1.99

$$5) 4y^2 - 5z^2 - 5x - 8y - 90z - 396 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты по переменным y и z :

$$4(y^2 - 2y) - 5(z^2 + 18z) - 5x - 396 = 0;$$

$$4((y-1)^2 - 1) - 5((z+9)^2 - 81) - 5x - 396 = 0;$$

$$4(y-1)^2 - 4 - 5(z+9)^2 + 405 - 5x - 396 = 0;$$

$$4(y-1)^2 - 5(z+9)^2 = 5x - 5;$$

$$4(y-1)^2 - 5(z+9)^2 = 5(x-1)$$

Разделим на 5-

$$\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{4}} - \frac{(z+9)^2}{1} = (x-1).$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'Z'$, которая получается из исходной параллельным переносом осей OX , OY , OZ :

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y - 1, \\ z' = z + 9, \end{cases}$$

$\frac{(y')^2}{5/4} - \frac{(z')^2}{1} = x'$ – получили каноническое уравнение гиперболоидического параболоида;

$O'(1, 1, -9)$ – координаты точки O' в системе координат $OXYZ$.

Сделаем чертеж (рис. 1.100).

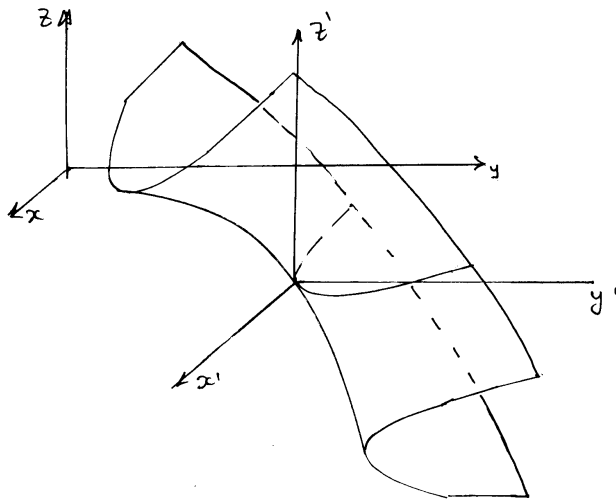


Рис. 1.100

$$6) 9x^2 - 25y^2 + 162x - 50y + 479 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты по переменным x и y :

$$9(x^2 + 18x) - 25(y^2 + 2y) + 479 = 0;$$

$$9((x + 9)^2 - 81) - 25((y + 1)^2 - 1) + 479 = 0;$$

$$9(x + 9)^2 - 729 - 25(y + 1)^2 + 25 + 479 = 0;$$

$$9(x + 9)^2 - 25(y + 1)^2 - 225 = 0;$$

$$9(x + 9)^2 - 25(y + 1)^2 = 225.$$

Разделим на 225;

$$\frac{(x + 9)^2}{25} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'Z'$, которая получается параллельным переносом осей

$$OX, OY: \begin{cases} x' = x + 9, \\ y' = y + 1, \\ z' = z, \end{cases}$$

$$\frac{(x')^2}{5^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1 \text{ — получили каноническое уравнение гиперболиче-}$$

ского цилиндра, осью симметрии которого является ось $O'Z'$.

$O'(-9, -1, 0)$ — координаты точки O' в системе координат $OXYZ$. Сделаем чертеж (рис. 1.101).

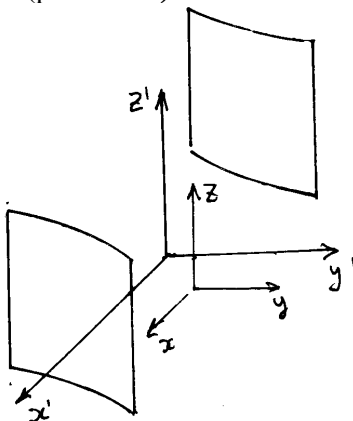


Рис. 1.101

$$7) -3z^2 + 3z - 5y + 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат по z :

$$-3(z^2 - z) - 5y + 1 = 0;$$

$$-3((z-1)^2 - 1) = 5y - 1;$$

$$-3(z-1)^2 + 3 = 5y - 1;$$

$$-3(z-1)^2 = 5y - 4;$$

$$-3(z-1)^2 = 5\left(y - \frac{4}{5}\right);$$

$$-\frac{3}{5}(z-1)^2 = y - \frac{4}{5}.$$

Введем новую декартову прямоугольную систему координат $X'O'Y'Z'$, которая получается из исходной параллельным переносом

$$\text{осей } OY, OZ: \begin{cases} x' = x, \\ y' = y - \frac{4}{5}, \\ z' = z - 1, \end{cases}$$

$-\frac{3}{5}(z')^2 = y'$ – каноническое уравнение параболического цилиндра, осью симметрии которого является ось $O'X'$.

$O'\left(0, \frac{4}{5}, 1\right)$ – координаты точки O' в системе координат $OXYZ$. Сделаем чертеж (рис. 1.102).

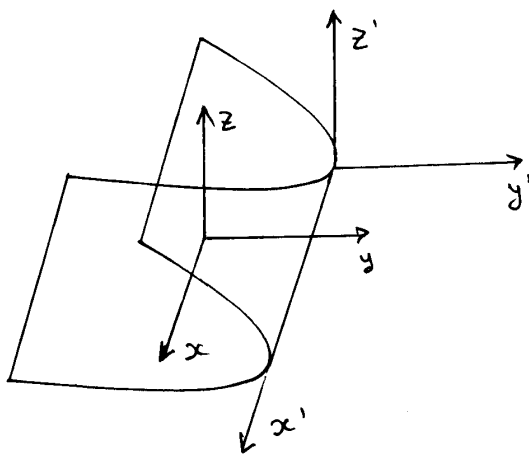


Рис. 1.102

1.7. Домашнее задание

Для получения варианта домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1.1, заполнить первую строку табл. 1.2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 1.1. Например, Ваш вариант 11.14. Тогда по табл. 1.1 имеем:

11	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>G</i>
----	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 1.1 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>G</i>
14	5	1	3	−6	6	2	9	3

Таблица 1.1

Порядок следования коэффициентов

Группа	Коэффициенты							
1	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
2	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
3	<i>M</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>G</i>
4	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>M</i>	<i>G</i>
5	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
6	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
7	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>G</i>
8	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
9	<i>F</i>	<i>M</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>G</i>
10	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
11	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>G</i>
12	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
13	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>G</i>
14	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>G</i>
15	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
16	<i>F</i>	<i>M</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>G</i>
17	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>G</i>

Таблица 1.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты							
								G
1	-2	1	4	5	3	-6	7	2
2	3	-2	1	-5	7	2	4	3
3	5	-3	4	1	2	-8	6	1
4	4	3	-2	1	6	3	5	2
5	8	-9	4	2	1	6	-2	1
6	3	4	-5	1	-3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	-9	1	3
8	5	1	3	-2	6	-8	-6	1
9	1	4	-3	2	9	-6	7	2
10	5	7	3	-6	1	-2	4	1
11	1	3	-5	2	6	4	9	2
12	9	-4	-1	-8	-3	6	5	1
13	2	-3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	-6	6	2	9	3
15	-4	-1	-8	9	-5	2	7	1
16	2	-3	3	1	-6	5	-1	2
17	-5	-4	2	4	-1	6	7	1
18	3	1	5	6	-4	2	9	2
19	2	4	-3	-5	-6	-5	8	1
20	1	-2	-7	8	3	5	-4	2
21	-8	-3	-1	6	4	1	-5	3
22	-2	-4	5	3	-6	7	6	1
23	1	9	-6	4	-2	-3	-1	2
24	3	-5	-1	3	6	-4	2	1
25	-1	-3	-6	4	1	-5	-4	2
26	9	-4	3	-5	2	1	6	2
27	7	6	-1	2	-3	8	-5	1
28	4	-1	5	-6	-4	7	3	3
29	-1	9	-3	-5	6	-8	2	1
30	2	1	9	3	-4	-1	6	2

Условие домашнего задания

1. Векторы

Задача 1. Дано: $|\vec{a}| = |F|$, $|\vec{b}| = |M|$, $|\vec{c}| = |A|$, $\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\hat{\vec{b}\vec{c}}\right) = \frac{\pi}{4}$;
 $\left(\hat{\vec{a}\vec{c}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

- Найти: 1) $|\vec{D}\vec{a} + \vec{C}\vec{b}|$;
2) $\text{пр}_{\vec{M}\vec{c} + \vec{K}\vec{a}}(\vec{D}\vec{a} + \vec{C}\vec{b})$;
3) Длину диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $\vec{C}\vec{a} + \vec{B}\vec{b}$ и $\vec{K}\vec{b} + \vec{M}\vec{a}$;
4) Площадь этого параллелограмма.

Задача 2. Дано: $\vec{a}$ (A, B, C); $\vec{b}$ (F, M, K); $\vec{c}$ (B, D, K).

- Найти: 1) координаты вектора $\vec{d} = F\vec{a} + M\vec{b}$;
2) длину вектора $\vec{d}$, направляющие косинусы вектора $\vec{d}$, координаты орта $\vec{d}_0$ вектора $\vec{d}$, $\text{пр}_i \vec{d}$, $\text{пр}_j \vec{d}$, $\text{пр}_k \vec{d}$;
3) $(A\vec{a} + B\vec{c}, K\vec{b} + M\vec{d})$;
4) $\cos(A\vec{a} + B\vec{c}, K\vec{b} + M\vec{d})$;
5) $[A\vec{a} + B\vec{c}, K\vec{b} + M\vec{d}]$;
6) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
7) Образуют ли вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$;
8) $\text{пр}_a \vec{d}$.

2. Прямая на плоскости

Дано: точки $Q(A, B)$, $L(C, D)$, $P(C, F)$.

- Найти: 1) проверить, не лежат ли точки на одной прямой;
2) уравнение прямой QL ;
3) уравнение медианы, проведенной из вершины Q в

треугольнике QLP ;

4) уравнение высоты, проведенной из вершины Q ;

5) координаты точки пересечения медиан в $\triangle QPL$;

6) угол между медианой и высотой, проведенными из вершины Q ;

7) расстояние от точки P до прямой QL .

3. Прямая и плоскость в пространстве

Дано: $Q(A, B, C)$, $L(A, F, C)$, $P(M, F, K)$, $N(A, D, F)$.

Найти: 1) проверить, что точки Q, L, P не лежат на одной прямой;

2) проверить, что точки Q, L, P, N не лежат в одной плоскости;

3) написать уравнение плоскости, проходящей через точки Q, L, P ;

4) написать уравнение плоскости, проходящей через точку N , параллельно плоскости (QLP) ;

5) написать уравнение плоскости, проходящей через точку P параллельно векторам $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QN}$;

6) написать уравнение плоскости, проходящей через точки N и Q , перпендикулярно плоскости (QLP) ;

7) написать уравнение плоскости, проходящей через точки L и Q , параллельно вектору $\overrightarrow{NP}$;

8) написать уравнение плоскости, проходящей через точку N , параллельно координатной плоскости XOZ ;

9) написать общее, каноническое и параметрическое уравнение прямой QP ;

10) написать уравнение прямой, проходящей через точку Q параллельно оси OZ ;

11) написать уравнение медианы QM в $\triangle QPL$;

12) написать уравнение высоты QH в $\triangle QPL$;

13) написать уравнение прямой, проходящей через точку N параллельно прямой QP ;

14) написать уравнение высоты NH тетраэдра $QLPH$;

15) написать уравнение прямой, перпендикулярной

- прямым QP и QN и проходящей через точку L ;
- 16) найти угол между прямой QP и прямой LN ;
 - 17) найти угол между прямой PN и плоскостью (QPL);
 - 18) найти величину двугранного угла между плоскостями (QPL) и (NPQ);
 - 19) найти площадь ΔQPL ;
 - 20) найти объем тетраэдра $QLNP$;
 - 21) найти расстояние от точки N до прямой QP ;
 - 22) найти расстояние от точки N до плоскости (QLP);
 - 23) найти расстояние между прямыми QP и LN ;
 - 24) найти координаты точки N_1 , симметричной точки N относительно прямой QP ;
 - 25) найти координаты точки N_2 , симметричной точки N относительно плоскости QLP .

4. Кривые 2-го порядка

Определить тип кривой, приведенной ниже, найти ее основные параметры, сделать чертеж:

- 1) $F^2x^2 + M^2y^2 - 2F^2Bx - 2M^2Ay + M^2A^2 + F^2B^2 = F^2M^2$;
- 2) $M^2x^2 - B^2y^2 - 2M^2Fx - 2KB^2y + M^2B^2 + M^2F^2 - B^2K^2 = 0$;
- 3) $Mx^2 + Cx + By + D = 0$;
- 4) $Ay^2 + Dx + Ky + F = 0$.

5. Поверхности 2-го порядка

Определить тип поверхности, сделать чертеж

- 1) $(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2 + 2DA^2x + 2B^2Ky + 2MC^2z = 0$;
- 2) $(Fx)^2 + (My)^2 - (Kz)^2 + 2AF^2x + 2CM^2y + 2DK^2z + M = 0$;
- 3) $(Fx)^2 - (My)^2 + (Kz)^2 + 2AF^2x + 2CM^2y + 2DK^2z + M = 0$;
- 4) $A(x - F)^2 + B(y - C)^2 + K(z - D)^2 = 0$;
- 5) $Cy^2 + Kz^2 + Ax + 2BCy + 2KDz + F = 0$;
- 6) $Mx^2 + Ky^2 + MDx + FKy + A = 0$;
- 7) $Az^2 + Mz + Ky + B = 0$.

1.8. Вопросы для самопроверки.

Для контроля усвоения прочитанного материала предлагаются следующие вопросы:

1. Даны координаты векторов $\vec{a}(1, -1, 2)$ и $\vec{b}(-1, 3, 1)$.

Найти:

1) координаты вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$;

2) длину вектора $\vec{b}$;

3) направляющие косинусы вектора $\vec{b}$;

4) координаты вектора $\vec{c}$ коллинеарного вектору $\vec{a}$, если известно, что длина вектора $\vec{c}$ равна 1.

2. Дать определение вектора, суммы векторов.

3. Даны координаты векторов $\vec{a}(-1, -1, 2)$ и $\vec{b}(-1, 3, 1)$

Найти:

1) $(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $(3\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$;

3) $\text{pr}_{\vec{a}}(3\vec{a} - 4\vec{b})$;

4) $\vec{a} + \vec{b}$.

4. Дать определение скалярного произведения векторов, сформулировать его свойства.

5. Известны координаты точек $M(1, 2)$ и $K(-1, 3)$. Найти координаты середины отрезка MK .

6. Дано: $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\pi}{4}$.

Найти: 1) $(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $|\vec{a} + \vec{b}|$;

3) $\text{pr}_{\vec{a} + \vec{b}} \vec{b}$;

7. Написать формулу скалярного произведения в декартовой прямоугольной системе координат.

8. Даны координаты векторов $\vec{a}(1, -1, 2)$, $\vec{b}(-1, 3, 1)$, $\vec{c}(-1, 2, 3)$

Найти: 1) $[a, \vec{b}]$;

2) $[\vec{a} - \vec{c}, 2\vec{b}]$;

3) S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$;

4) длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

9. Дать определение векторного произведения векторов, сформулировать его свойства.

10. Известны координаты точек $A(1, 0, 2)$, $B(1, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$, и $D(-1, 0, 0)$.

Найти:

1) выяснить принадлежат ли эти точки одной плоскости;

2) найти объем тетраэдра $ABCD$;

3) выяснить образуют ли векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ базис;

4) найти длину высоты, проведенной из вершины D к плоскости (ABC)

11 Найти $(\vec{i}; [\vec{j}, \vec{k}])$, где $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ - базисные орты.

12. Дать определение смешанного произведения векторов, сформулировать его свойства.

13. Известны координаты векторов $\vec{a}(1, -1, 2)$, $\vec{b}(0, 1, 0)$, $\vec{c}(-1, 2, 0)$. Найти смешанное произведение этих векторов.

14. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -1)$ и $B(2, -1)$;

15. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ параллельно вектору $\vec{a}(-1, 2)$;

16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}(-1, 2)$;

17. Перечислить основные виды уравнений прямой на плоскости.

18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 0, 1)$ параллельно плоскости $P: x - 2y + z - 1 = 0$.

19. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 1)$ и $B(-2, 0, 0)$ перпендикулярно плоскости $P: -x + y - 3 = 0$.

20. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 0, 1)$ параллельно векторам $\vec{a}(1, 2, -1)$ и $\vec{b}(1, 3, 2)$.

21. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 1)$, $B(-3, 0, 0)$ и $C(0, 1, -3)$.

22. Перечислить основные виды уравнений плоскости.

23. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 1)$ и $B(1, 0, 0)$.

24. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 0, 1)$ параллельно вектору $\bar{a}(-1, 2, 1)$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 0, 1)$ перпендикулярно плоскости $x + 2y - z = 0$.

26. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 0, 1)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3. \end{cases}$$

27. Перечислить основные виды уравнений прямой в пространстве.

28. Выяснить взаимное расположение плоскостей:

$$P_1 : x - y - z + 1 = 0 \text{ и } P_2 : x + z = 0.$$

29. Найти угол между плоскостями $P_1 : x - y - z + 1 = 0$ и $P_2 : x + z = 0$

30. Написать формулу для нахождения расстояния от точки до прямой.

31. Найти расстояние от точки $M(-2, 0, 1)$ до плоскости $P : x + z = 0$.

31. Написать формулу для нахождения угла между плоскостью и прямой.

32. Написать параметрическое уравнение прямой
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}.$$

33. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}$ и плоскости $x - y - z + 1 = 0$.

34. Выяснить взаимное расположение прямой $L : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}$ и плоскости $P : y + 4 = 0$.

35. Найти угол между прямой $L : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}$ и плоскостью $P : y + 4 = 0$.

35. Написать формулу для нахождения расстояния между параллельными прямыми.

36. Написать формулу для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

37. Даны вершины треугольника $A(1, -2, -4)$; $B(3, 1, -3)$ и $C(5, 1, -7)$. Написать параметрическое уравнение его высоты, проведенной из вершины B .

38. Определить тип кривой:

1) $x^2 + 2y^2 - x = 0$;

2) $x^2 - 2y^2 - x = 0$;

3) $2y^2 - x = 0$.

39. Написать формулу для нахождения эксцентриситета эллипса и гиперболы.

40. Написать формулу для нахождения директрис эллипса, гиперболы, параболы.

41. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Сделать чертеж.

42. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Сделать чертеж.

43. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида. $a = 1$, $b = 2$. Сделать чертеж.

44. Написать каноническое уравнение конуса. $a = 2$, $b = 3$. Сделать чертеж.

45. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида. $a = 2$, $b = 3$. Сделать чертеж.

1.9. Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа 1

Тема: векторы, операции над векторами, прямая и плоскость в пространстве.

1) Дан вектор $\vec{a}(-1, 3, 1)$ Найти $|\vec{a}|$, координаты орта $\vec{a}_0$ и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

2) Даны три вектора: $\vec{a}(6, 4, 1)$, $\vec{b}(4, 2, -1)$, $\vec{c}(-1, 3, 2)$. Найти: $(\vec{a}, \vec{b})$, $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}]$, $\text{pr}_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{c})$, проверить, образуют ли эти векторы базис.

Или

2) Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, $\vec{a}, \vec{b} = \frac{\pi}{4}$, $\vec{b}, \vec{c} = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{a}, \vec{c} = \frac{\pi}{6}$. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{pr}_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{c})$, $|\vec{b} + \vec{c}|$.

3) Даны три точки $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$. Найти площадь $\triangle ABK$, где K – середина стороны AC .

4) В параллелограмме $ABCD$ на диагоналях AC и BD взяты точки M и K , соответственно, так, что $|AM|:|MC|=2:3$, $|BK|:|KD|=1:4$. Выразить вектор $\vec{MK}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

или

4) В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны координаты вершин $A(1;2;3)$; $B(9;6;4)$; $D(3;0;4)$; $A_1(5;2;6)$. Найти длину диагонали AC_1 этого параллелепипеда и косинус угла между диагональю AC_1 и ребром AB .

5) Найти расстояние от точки $A(2,3)$ до прямой, проходящей через точки $B(3, -2)$, $C(1, 0)$.

6) Дано: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если известно, что он компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длина его равна 6, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен $\frac{3\pi}{4}$.

7) Даны уравнения медиан треугольника $x-y-3=0$, $5x+4y-9=0$, $4x+5y-6=0$ и его площадь $S=6$. Найти вершины этого треугольника.

8) Даны вершины треугольника $A(-2,1)$; $B(3,1)$ и $C(1,5)$. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из вершины B к медиане, проходящей через точку A .

Контрольная работа 2

Тема: прямая и плоскость в пространстве, кривые и поверхности 2 порядка.

1) Найти расстояние от точки $M(2, -1, 4)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1, -1, 2)$, $B(0, 1, -1)$, $C(1, 2, 0)$.

2) Написать каноническое уравнение прямой $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0 \\ 6x + 5y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ и найти расстояние от точки $M(0, 1, 1)$ до этой прямой.

3) Найти координаты точки M' , симметричной точке $M(1, 0, 1)$ относительно плоскости $4x + 6y + 4z - 25 = 0$.

Или

3') Найти координаты точки M' , симметричной точке $M(1, 0, 1)$ относительно прямой $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

4) Найти угол между плоскостью $P: x - 2y + z + 1 = 0$ и

прямой $L: \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 0, \\ z = 8t - 3. \end{cases}$

5) Определить взаимное расположение прямых L_1 и L_2 и найти расстояние между ними.

$$L_1: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0; \end{cases} \quad L_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

6) Написать каноническое уравнение эллипса, если $a = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Построить эллипс и найти его основные параметры.

7) Привести уравнение кривой к каноническому виду, определить тип этой кривой, найти все параметры и сделать чертеж. $y = 4x^2 - 6x + 1$.

8) Определить тип поверхности $5x^2 + 4y^2 = 5 - z$, сделать схематический чертеж.

2. Линейная алгебра

2.1. Матрицы, операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} – элементы матрицы A , где $i = 1 \dots m$ – номер строки, $j = 1 \dots n$ – номер столбца.

Набор чисел $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, (i = 1, 2, \dots, m)$ называется *i -ой строкой* матрицы A . Набор чисел $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}, (j = 1, 2, \dots, n)$ называется *j -ым столбцом* матрицы A . Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*.

Пусть A – квадратная матрица, тогда набор чисел $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образует *главную диагональ*.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой*. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной*.

Операции над матрицами

1. *Суммой матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m.$$

Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Произведением αA матрицы A размера $m \times n$ на число α называется матрица B размера $m \times n$, каждый из элементов которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α :

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1..n, j = 1..m,$$

или

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, элементы которой c_{ij} вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{e=1}^n a_{ie} b_{ej}, \quad i = 1..n, j = 1..m, \quad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \dots + a_{1n}b_{nk} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \dots + a_{2n}b_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1k} + a_{m2}b_{2k} + \dots + a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix}$$

Замечания

1. Число столбцов матрицы A и число строк матрицы B должно быть одинаковым.

2. $AB \neq BA$ (произведение матриц не коммутативно).

4. Матрицей A^T размера $n \times m$, *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, называется матрица, которая получается из матрицы A заменой строк на столбцы, т. е. строки матрицы A являются столбцами матрицы A^T .

Определитель

Пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

С каждой такой матрицей связывают определенную численную характеристику, называемую определителем, соответствующим этой матрице.

Минором элемента a_{ij} матрицы A размера $n \times n$ называется определитель порядка $n-1$, соответствующий квадратной матрице $\tilde{A}$ размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i – ой строки и j -ого столбца (обозначают M_{ij}).

Определителем n -ого порядка, соответствующим квадратной матрице A называется число, которое можно вычислить по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \text{ где}$$

M_{ij} – минор элемента, a_{ij} .

Данная формула называется разложением определителя по элементам i – ой строки.

Свойства определителя

- 1) При транспонировании определитель не меняется;
- 2) при перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;
- 3) если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю;
- 4) если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором - вторые слагаемые;
- 5) умножение всех элементов некоторой строки (столбца) на число не равное нулю равносильно умножению определителя на это число;
- 6) определитель не изменится, если к одной его строке (столбцу) прибавить любую другую строку (столбец), умноженную на произвольное число;
- 7) определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

Обратная матрица

Квадратная матрица A^{-1} является *обратной* к квадратной матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица, т. е. матрица, у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невыврожденной*, если ее определитель не равен нулю. Для каждой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} .

Способы нахождения обратной матрицы

1. Метод присоединенной матрицы.

Обратная матрица может быть найдена по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^V)^T, \text{ где } A^V - \text{присоединенная матрица.}$$

Присоединенная матрица A^V состоит из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A :

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} ($i = 1 \dots n, j = 1 \dots n$), которые находим по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \text{ где } M_{ij} - \text{минор элемента, } a_{ij}.$$

Транспонированная присоединенная матрица:

$$(A^V)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; & A_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие преобразования:

1. перестановка строк (столбцов);
2. умножение строки (столбца) на число, не равное нулю;
3. прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Обратную матрицу также можно найти с помощью элементарных преобразований. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Составить расширенную матрицу $(A|E)$, приписав к матрице A справа единичную матрицу.

$$(A | E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

2. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|E)$ привести матрицу A к единичному виду:

$$(E | A^{-1}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right).$$

3. Тогда матрица, которая получилась справа и есть обратная к матрице A .

Пример 2.1.

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) сумму матриц $2A + B$;

2) произведение матриц AB ;

3) произведение матриц BA ;

4) обратную матрицу к матрице A ;

5) произведение матриц BC ;

6) сумму матриц $B^T + E$.

Решение:

1) Найдем сумму матриц $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+0 & -2+(-1) \\ 0+3 & 6+5 & 2+1 \\ 4+1 & -2+2 & 8+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем произведение матриц AB .

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 & 1(-1) + 2 \cdot 1 - 1(-3) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 0(-1) + 3 \cdot 1 + 1(-3) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 2(-1) - 1 \cdot 1 + 4(-3) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2+6-1 & 10-2 & -1+2+3 \\ 9+1 & 15+2 & 3-3 \\ 4-3+4 & -5+8 & -2-1-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 10 & 17 & 0 \\ 5 & 3 & -15 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3) Найдем произведение матриц BA .

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) & 2(-1) + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3(-1) + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) & 1(-1) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2-2 & 4+1 & -2-4 \\ 3+2 & 6+15-1 & -3+5+4 \\ 1-6 & 2+6+3 & -1+2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 5 & 20 & 6 \\ -5 & 11 & -11 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4) Найдем матрицу обратную к матрице A .

Найдем определитель матрицы A :

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= (12+1) + 2(2+3) = 13+10 = 23.
 \end{aligned}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12+1=13; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(0-2)=2;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-1) = -7; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4+2=6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3=5; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0-6 = -6;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-4) = 5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3-0=3.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^V = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -6 \\ -7 & 6 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

Транспонируем ее:

$$(A^V)^T = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^V)^T = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{2}{23} & \frac{6}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{5}{23} & \frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$AA^{-1} = E.$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 1 \cdot 13 + 2 \cdot 2 - 1(-6) & 1(-7) + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 & 1 \cdot 5 + 2(-1) - 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 13 + 3 \cdot 2 + 1(-6) & 0(-7) + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 5 + 3(-1) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 13 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-6) & 2(-7) - 1 \cdot 6 + 4 \cdot 5 & 2 \cdot 5 - 1(-1) + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 13 + 4 + 6 & -7 + 12 - 5 & 5 - 2 - 3 \\ 6 - 6 & 18 + 5 & -3 + 3 \\ 26 - 2 - 24 & -14 - 6 + 20 & 10 + 1 + 12 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

5) Найдем произведение матриц BC :

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0(-1) - 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 5(-1) + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2(-1) + (-3)3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 3 - 5 + 3 \\ 1 - 2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6) Найдем сумму матриц $B^T + E$.

Транспонируем матрицу B :

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$B^T + E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2.

Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$
$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- 1) $2I + 3J + 5E$;
- 2) $IJ - JI$;
- 3) $H \cdot I$;
- 4) J^{-1} .

Решение

1) $2I + 3J + E =$

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -12 & 4 & -10 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 3 & -27 \\ 9 & -15 & 9 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6-12 & 2+3 & 8-27 \\ -12+9 & 4-15 & -10+9 \\ 6-9 & -2+6 & 6-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -18 & 5 & -19 \\ -3 & -11 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -19 \\ -3 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) $IJ - JI = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} -$

$$\begin{aligned}
& - \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -3(-4)+3+4(-3) & -3+1(-5)+4 \cdot 2 & -3(-9)+1 \cdot 3+4(-1) \\ -6(-4)+2 \cdot 3-5(-3) & -6+2(-5)-5 \cdot 2 & -6(-9)+2 \cdot 3-5(-1) \\ 3(-4)-1 \cdot 3+3(-3) & 3-1(-5)+3 \cdot 2 & 3(-9)-1 \cdot 3+3(-1) \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} -4(-3)+1(-6)-9 \cdot 3 & -4+1 \cdot 2-9(-1) & -4 \cdot 4+1(-5)-9 \cdot 3 \\ 3(-3)-5(-6)+3 \cdot 3 & 3-5 \cdot 2+3(-1) & 3 \cdot 4-5(-5)+3 \cdot 3 \\ -3(-3)+2(-6)-1 \cdot 3 & -3+2 \cdot 2+(-1)(-1) & -3 \cdot 4+2(-5)-1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 12+3-12 & -3-5+8 & 27+3-4 \\ 24+6+15 & -6-10-10 & 54+6+5 \\ -12-3-9 & 3+5+6 & -27-3-3 \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} 12-6-27 & -4+2+9 & -16-5-27 \\ -9+30+9 & 3-10-3 & 12+25+9 \\ 9-12-3 & -3+4+1 & -12-10-3 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 26 \\ 45 & -26 & 65 \\ -24 & 14 & -33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -21 & 7 & -48 \\ 30 & -10 & 46 \\ -6 & 2 & -25 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 3+21 & 0-7 & 26+48 \\ 45-30 & -26+10 & 65-46 \\ -24+6 & 14-2 & -33+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -7 & 74 \\ 15 & -16 & 19 \\ -18 & 12 & -8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3) $H \cdot I =$

$$\begin{aligned}
& = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 4(-3)-1(-6)+2 \cdot 3 & 4-1 \cdot 2+2(-1) & 4 \cdot 4-1(-5)+2 \cdot 3 \\ 9(-3)-3(-6)-5 \cdot 3 & 9-3 \cdot 2-5(-1) & 9 \cdot 4-3(-5)-5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -12+6+6 & 4-2-2 & 16+5+6 \\ -27+18-15 & 9-6+5 & 36+15-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 \\ -24 & 8 & 36 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4) J^{-1} .

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\det J = -4 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(5-6) - (-3+9) - 9(6-15) = 4-6+81 = 79.$$

$\det J \neq 0 \Rightarrow J^{-1}$ существует

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} (J^V)^T.$$

Найдем $J^V = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$, где J_{ij} – это определитель

матрицы, полученной вычеркиванием i -й строки и j -го столбца матрицы J , и взятый со знаком «+», если число $i + j$ – четное, и со знаком «-» если $i + j$ – нечетное. Найдем компоненты матрицы J^V :

$$J_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5-6 = -1; \quad J_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+18) = -17;$$

$$J_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(3+9) = -6; \quad J_{22} = \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4-27 = -23;$$

$$J_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6-15 = -9; \quad J_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+3) = 5;$$

$$J_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3-45 = -42;$$

$$J_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(-12+27) = -15;$$

$$J_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 20-3 = 17.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$J^V = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -9 \\ -17 & -23 & 5 \\ -42 & -15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее:

$$(J^V)^T = \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$J^{-1} = \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\begin{aligned} J \cdot J^{-1} &= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -4(-1)+1(-6)-9(-9) & -4(-17)-23-9 \cdot 5 & -4(-42)-15-9 \cdot 17 \\ 3(-1)-5(-6)+3(-9) & 3(-17)-5(-23)+3 \cdot 5 & 3(-42)-5(-15)+3 \cdot 17 \\ -3(-1)+2(-6)-1(-9) & -3(-17)+2(-23)-1 \cdot 5 & -3(-42)+2(-15)-17 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} 4-6+81 & 68-23-45 & 168-15-153 \\ -3+30-27 & -51+115+15 & -126+75+51 \\ 3-12+9 & 51-46-5 & 126-30-17 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} 79 & 0 & 0 \\ 0 & 79 & 0 \\ 0 & 0 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Матрица J^{-1} найдена верно.

Ранг матрицы.

Элементы, стоящие на пересечении выбранных k строк и k столбцов матрицы A размера $m \times n$, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель которой называется *минором* k -го порядка ($k \leq \min\{m, n\}$).

Пусть матрица A ненулевая. *Рангом* матрицы A называется число r , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) у матрицы A существует минор r -ого порядка, отличный от нуля;
- 2) все миноры $(r+1)$ -ого порядка и выше равны нулю.

Обозначение: $\text{rang} A = r$.

Отличный от нуля минор M_r , порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором*.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, но все они имеют один и тот же порядок. Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор называются *базисными строками* и *столбцами*.

Способы нахождения ранга матрицы.

1. Метод элементарных преобразований.

Для нахождения базисного минора и ранга матрицы приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1k_1} & * & * & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2k_2} & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{kr_k} & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы. Следовательно, ранг матрицы A равен числу ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы.

2. Метод окаймляющих миноров.

Выберем какой-нибудь отличный от нуля минор первого порядка Δ_1 и рассмотрим все миноры второго порядка, которые окаймляют минор Δ_1 , т. е. содержат его внутри себя. Если все эти миноры второго порядка равны нулю, то Δ_1 - базисный минор и ранг матрицы равен 1. Если среди указанных миноров второго порядка есть отличный от нуля минор Δ_2 , то рассмотрим его окаймляющие миноры третьего порядка. Если все миноры третьего порядка, окаймляющие минор Δ_2 равны нулю, то Δ_2 - базисный минор и ранг матрицы равен 2. Если же среди указанных миноров третьего порядка существует минор Δ_3 не равный нулю, то рассматриваем окаймляющие его миноры четвертого порядка и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока не найдется отличный от нуля минор Δ_r порядка r , а все окаймляющие его миноры $(r+1)$ порядка будут равны нулю. Такой минор Δ_r и есть базисный, а число r -ранг матрицы.

Теорема о базисном миноре

Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы A являются линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в этой матрице.

Пример 2.3. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

1 способ

Приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую; из четвертой строки вычтем вторую.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{поменяем вторую и третью строки ме-}$$

стами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{к четвертой строке прибавим третью.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, в которой три ненулевые строки. Следовательно, ранг нашей матрицы равен трем.
rangA=3.

Решение матричных уравнений

1. Пусть дано уравнение вида: $AX = B$.

Умножим обе части исходного уравнения слева на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

тогда $X = A^{-1}B$ – решение данного уравнения.

2. Дано уравнение вида: $XA = B$.

Умножим обе части исходного уравнения справа на A^{-1} :

$$XA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

тогда $X = B \cdot A^{-1}$ – решение уравнения.

3. Дано уравнение вида: $AXB = C$.

Умножим обе части исходного уравнения справа на A^{-1} :

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C;$$

$$XB = A^{-1}C,$$

Умножим обе части полученного уравнения справа на B^{-1} :

$$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

тогда $X = A^{-1}CB^{-1}$ – решение уравнения.

Замечание: A и B – квадратные матрицы и $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Пример 2.4.

Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- 1) Решить матричное уравнение $JX = I$;
- 2) Решить матричное уравнение $XJ = I$.

Решение

1) Решить матричное уравнение: $JX = I$.

Домножим слева на J^{-1} :

$$J^{-1}JX = J^{-1}I \Rightarrow X = J^{-1}I;$$

Матрица J^{-1} была найдена в примере 1.2.2

$$J^{-1} = \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix}; \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned}
X &= J^{-1}I = \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -1(-3) - 17(-6) - 42 \cdot 3 & -1 + (-17) \cdot 2 + 42 & -4 - 17(-5) - 42 \cdot 3 \\ -6(-3) - 23(-6) - 15 \cdot 3 & -6 - 23 \cdot 2 + 15 & -6 \cdot 4 - 23(-5) - 15 \cdot 3 \\ -9(-3) + 5(-6) + 17 \cdot 3 & -9 + 5 \cdot 2 - 17 & -9 \cdot 4 + 5(-5) + 17 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} 3 + 102 - 126 & -1 - 34 + 42 & -4 + 85 - 126 \\ 18 + 138 - 45 & -6 - 46 + 15 & -24 + 115 - 45 \\ 27 - 30 + 51 & -9 + 10 - 17 & -36 - 25 + 51 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -21 & 7 & -45 \\ 111 & -37 & 46 \\ 48 & -16 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/79 & 7/79 & -45/79 \\ 111/79 & -37/79 & 46/79 \\ 48/79 & -16/79 & -10/79 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6) Решить матричное уравнение $XJ = I$.

Домножим справа на J^{-1} .

$$XJJ^{-1} = IJ^{-1};$$

$$X = IJ^{-1};$$

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -42 \\ -6 & -23 & -15 \\ -9 & 5 & 17 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} 3 - 6 + 4(-9) & -3(-17) - 23 + 4 \cdot 5 & -3(-42) - 15 + 4 \cdot 17 \\ -6(-1) + 2(-6) - 5(-9) & -6(-17) + 2(-23) - 5 \cdot 5 & -6(-42) - 15 \cdot 2 - 5 \cdot 17 \\ -3 + 6 - 9 \cdot 3 & 3(-17) + 23 + 3 \cdot 5 & 3(-42) + 15 + 17 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -3 - 36 & 51 - 23 + 20 & 126 - 15 + 68 \\ 6 - 12 + 45 & 102 - 46 - 25 & 252 - 30 - 85 \\ 3 - 27 & -51 + 23 + 15 & -126 + 15 + 51 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{79} \begin{pmatrix} -39 & 48 & 179 \\ 39 & 31 & 137 \\ -24 & -13 & -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39/79 & 48/79 & 179/79 \\ 39/79 & 31/79 & 137/79 \\ -24/79 & -13/79 & -60/79 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.2. Решение систем линейных уравнений

Пусть задана система из t линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (3)$$

где x_i — неизвестные,

a_{ij} – коэффициенты при j -м неизвестном в i -м уравнении;

b_i – свободный член в i -м уравнении.

В матричном виде это уравнение может быть записано:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы (3);

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов.}$$

Матрицу вида

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} & b_2 \\ \hdashline \dots\dots\dots & \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (4)$$

называют расширенной матрицей системы (3).

Решением системы линейных уравнений (3) называется упорядоченный набор чисел $(x_1, \dots, x_n)$, при подстановке которых в систе-

му вместо соответствующих неизвестных система обращается в истинное равенство.

Решить систему линейных уравнений – значит найти все её решения.

Система линейных уравнений может быть *однородной* (если все $b_i = 0$) и *неоднородной* (если хотя бы один из $b_i \neq 0$).

По количеству решений системы линейных уравнений делятся на:

- совместные (существует решение);
- несовместные (нет решений).

Совместные системы линейных уравнений делятся на:

- определенные (имеет ровно одно решение);
- неопределенные (имеет более одного решения).

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. *Элементарными преобразованиями системы* (3) называются элементарные преобразования строк расширенной матрицы. Элементарные преобразования приводят к эквивалентным системам.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ

Для того, что бы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы $\bar{A}$ был равен рангу матрицы A .

$$\text{rang } \bar{A} = \text{rang } A.$$

Формулы Крамера

Если у нас число уравнений и число неизвестных совпадают ($m = n$) и $\det A \neq 0$, то систему линейных уравнений $AX = B$ можно решить с помощью формул Крамера:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \text{ где}$$

$\det A$ – определитель матрицы A ; а $\det A_i$ – определитель, получаемый из определителя $\det A$ путем замены i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример 2.5. Решить системы линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x + 4y = -10 \\ 3x - y = 9 \end{cases}; \\ 2) & \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ x - y + 5z = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

Решение:

$$1) \begin{cases} x + 4y = -10 \\ 3x - y = 9 \end{cases}.$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13 \neq 0, \text{ следовательно, система}$$

совместная определенная, найти ее решение можно с помощью формул Крамера.

$$\text{По формулам Крамера: } x = \frac{\det A_1}{\det A}; y = \frac{\det A_2}{\det A}, \text{ где } \det A -$$

определитель матрицы A ; $\det A_1$ – определитель, получаемый из определителя $\det A$ путем замены 1-го столбца на столбец свободных членов; $\det A_2$ – определитель, получаемый из определителя $\det A$ путем замены 2-го столбца на столбец свободных членов.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 36 = -26;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 30 = 39.$$

Тогда:

$$x = \frac{-26}{-13} = 2; y = \frac{39}{-13} = -3.$$

$$\text{Итак, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9. \\ x - y + 5z = 11 \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-10 + 4) - 3(5 - 4) - (-1 + 2) = \\ &= -12 - 3 - 1 = -16 \neq 0, \end{aligned}$$

следовательно, система совместная определенная, найти ее решение можно с помощью формул Крамера.

$$\text{По формулам Крамера: } x = \frac{\det A_1}{\det A}; \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}; \quad z = \frac{\det A_3}{\det A},$$

где $\det A$ – определитель матрицы A ; $\det A_i$ – определитель, получаемый из определителя $\det A$ путем замены i -го столбца на столбец свободных членов ($i=1,2,3$).

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 9 & -2 & 4 \\ 11 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -3(45 - 44) - 1(-9 + 22) = -3 - 13 = -16;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & 4 \\ 1 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 2(45 - 44) - 1(11 - 9) = 2 - 2 = 0;$$

$$\det A_3 =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 2(-22 + 9) - 3(11 - 9) = -26 - 6 = -32$$

Тогда:

$$x = \frac{-16}{-16} = 1; \quad y = \frac{0}{-16} = 0; \quad z = \frac{-32}{-16} = 2.$$

$$\text{Итак, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Метод последовательных исключений Жордана – Гаусса

При помощи элементарных преобразований строк и перестановки столбцов расширенную матрицу (4) системы (3) можно привести к одному из следующих видов:

$$1. \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

где $\tilde{b}_{r+1} \neq 0$.

В новой системе, эквивалентной системе (3), $(r+1)$ -е уравнение примет вид: $0 \cdot \tilde{x}_1 + 0 \cdot \tilde{x}_2 \dots + 0 \cdot \tilde{x}_{rn} = \tilde{b}_{r+1} \neq 0 \Rightarrow$ **система несовместна**, т. е. не имеет решений.

$$2. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{array} \right) -$$

такой случай возможен, если $m = n$.

Последняя матрица эквивалентна следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{b}_1 \\ \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases}$$

т. е. система **совместная определенная** (имеет единственное решение).

$$3. \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

все $\tilde{b}_i = 0$ при $i > r$.

Система **совместная неопределенная**, т. е. имеет множество решений. Тогда $\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_r$ – базисные неизвестные; $\tilde{x}_{r+1} \dots \tilde{x}_n$ – свободные неизвестные.

Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = -\tilde{a}_{1r+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n + \tilde{b}_1 \\ \tilde{x}_2 = -\tilde{a}_{2r+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n + \tilde{b}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_r = -\tilde{a}_{rr+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n + \tilde{b}_r. \end{cases}$$

Тогда решение нашей системы:

где $c_1 \dots c_{n-r} \in R$.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4; \end{aligned} \right. \\
 & 3) \left\{ \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Решение

1) Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right); \text{ поменяем первую и третью}$$

строки местами –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем}$$

первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3; из 4 строки вычтем первую, умноженную на 4 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 25 & 40 & 80 & 46 \end{array} \right); \text{ разделим вторую строку на 3,}$$

третью – на 4 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 25 & 40 & 80 & 46 \end{array} \right); \text{ из третьей строки вычтем вто-}$$

рую, из 4 строки вычтем 2, умноженную на пять –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Последнее уравнение примет вид:

$$0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1.$$

Следовательно, **система несовместна, т. е. не имеет решений.**

$$2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, при этом i -му столбцу поставим в соответствие переменную x_i ($i = 1 \dots 4$):

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right); \text{ четвертый столбец переставим на}$$

первое место, при этом меняем местами переменные x_i –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right); \text{ поменяем первую и вторую стро-$$

ки местами –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & -1 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \end{array}; \text{ из второй строки вычтем первую,}$$

умноженную на 4, к третьей строке прибавим первую –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -11 & 28 & -13 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \end{array}; \text{ к третьей строке прибавим вто-}$$

рую умноженную на 2, к четвертой строке прибавим вторую –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -11 & 28 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{array}; \text{ поменяем третью и четвертую}$$

строки местами –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -11 & 28 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 3 \end{array} \right) \end{array}; \text{ из четвертой строки вычтем}$$

третью, умноженную на 3 –

$$\begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -11 & 28 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \end{array}; \text{ из третьей строки вычтем чет-}$$

вертую; ко второй строке прибавим четвертую, умноженную на 14; из первой строки вычтем четвертую умноженную на 3 –

$$\begin{array}{cccc|c} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -11 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} ;$$

ко второй строке прибавим третью строку, умноженную на 11; из первой строки вычтем четвертую, умноженную на 3 –

$$\begin{array}{cccc|c} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} ; \text{разделим вторую и четвертую стро-$$

ки на 2 –

$$\begin{array}{cccc|c} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} ; \text{из первой строки вычтем вторую –}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} ; \text{разделим первую строку на 2 –}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} .$$

Данная **система совместная**, определенная, т. е. имеет единственное решение.

$$x_4 = 1/2, x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -3/2.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1(-3) + 4(-3/2) + 8 \cdot 1/2 \\ 1 \cdot 2 + 3(-3) - 6(-3/2) + 2 \cdot 1/2 \\ 3 \cdot 2 - 2(-3) + 2(-3/2) - 2 \cdot 1/2 \\ 2 \cdot 2 - 1(-3) + 2(-3/2) + 0 \cdot 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 3 - 6 + 4 \\ 2 - 9 + 9 + 1 \\ 6 + 6 - 3 - 1 \\ 4 + 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем первую,}$$

умноженную на 2, из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array} \right); \text{ из третьей строки вычтем вто-}$$

рую, умноженную на 2, при этом i -му столбцу поставим в соответствие переменные x_i ($i = 1...4$) –

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ поменяем второй и третий столб-} \end{array}$$

цы местами (при этом меняем x_2 и x_3 местами)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ вторую строку разделим на } (-6) - \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ из первой строки вычтем вторую} \end{array}$$

умноженную на 5 –

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -2 & -1/6 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ первую строку разделим на 3 -} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2/3 & -1/18 & 7/18 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{array}$$

Система совместная, неопределенная.

Переменные x_1 и x_3 – базисные, а x_2 и x_4 свободные. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_1 = \frac{7}{18} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{18}x_4;$$

$$x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4.$$

Следовательно:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{18} + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{18}c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}c_2, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

где $c_1, c_2 \in R$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/18 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/18 \\ 0 \\ -5/6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.7. Решить системы линейных уравнений.

$$1) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -5 \\ -6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9 \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = -3 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0 \\ -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 9 \\ -9x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -3 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 0 \\ -9x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 3 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3 \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение

$$1) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -5, \\ -6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2, \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9, \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = -3; \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 9 \\ 9 & 4 & -6 & -12 & -3 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем}$$

первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3; к четвертой строке прибавим третью –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & -7 & -10 & -30 & 24 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 6 \end{array} \right); \text{ из третьей строки вычтем вто-}$$

рую –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 6 \end{array} \right); \text{ из четвертой строки вычтем тре-}$$

тью -

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

Последняя строка равносильна следующему уравнению:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -6.$$

Следовательно, система несовместна, т. е. данная система решений не имеет.

$$2) \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0, \\ -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 0; \end{array} \right.$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & 3 & 0 \\ -9 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -6 & -12 & 0 \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{в предыдущем} \\ \text{примере было} \\ \text{получено} \end{array} \right| = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Система совместная, неопределенная.

x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные; x_4 – свободное.

Выразим базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 через x_4 .

Из третьей строки следует:

$$-4x_3 - 15x_4 = 0 \Rightarrow 4x_3 = -15x_4 \Rightarrow x_3 = -\frac{15}{4}x_4.$$

Из второй строки:

$$-7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 - 6\left(-\frac{15}{4}x_4\right) - 15x_4 = 0;$$

$$-7x_2 + \frac{45}{2}x_4 = 15x_4;$$

$$7x_2 = \frac{45}{2}x_4 - 15x_4 = \frac{15}{2}x_4;$$

$$x_2 = \frac{15}{14}x_4.$$

Из первой строки: $-3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0$;

$$-3x_1 + \frac{15}{14}x_4 + 4\left(-\frac{15}{4}x_4\right) + 9x_4 = 0;$$

$$3x_1 = \frac{15}{14}x_4 - 15x_4 + 9x_4 = \frac{15}{14}x_4 - 6x_4 = -\frac{69}{14}x_4;$$

$$x_1 = -\frac{23}{14}x_4.$$

Пусть $x_4 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{23}{14}c \\ x_2 = \frac{15}{14}c \\ x_3 = \frac{-15}{4}c \\ x_4 = c. \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{23}{14} \\ \frac{15}{14} \\ -\frac{15}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 9 \\ -9x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & -12 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \end{array} \right); \text{ четвертую и первую строки поме-}$$

няем местами –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -12 & 1 & 9 \end{array} \right); \text{ ко второй строке прибавим}$$

первую, умноженную на 3; к третьей прибавим первую, умноженную на 2, из четвертой вычтем первую умноженную на 2 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 7 & -13 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 15 \end{array} \right); \text{ из третьей строки вычтем вторую –}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 15 \end{array} \right); \text{ из четвертой строки вычтем тре-}$$

тью;

третью строку разделим на (-2) –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 13 \end{array} \right).$$

Система совместная, определенная, то есть имеет единственное решение.

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -3 \\ 7x_2 - 11x_3 + 24x_4 = -7 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \\ -13x_4 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = -2x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 3 \\ 7x_2 = 11x_3 - 24x_4 - 7 \\ x_3 = -2x_4 - 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = -2x_2 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot (-1) - 3 \\ 7x_2 = 11 \cdot 1 - 24 \cdot (-1) - 7 \\ x_3 = -2(-1) - 1 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(-2 \cdot 4 + 11) = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -12 & 1 \\ -9 & 1 & 4 & -3 \\ -6 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+16-12-1 \\ -9+4+4+3 \\ -6+12-3-2 \\ 3+8-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 12x_3 + x_4 = 0 \\ -9x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & -12 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

В предыдущем примере было получено:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & -12 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array} \right).$$

Система совместная, определенная

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 7x_2 - 11x_3 + 24x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ -13x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \text{Система имеет} \\ \text{единственное решение} \\ \textbf{(0, 0, 0).}$$

$$5) \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 3 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 18 & 8 & 1 & -5 & 3 \\ -27 & -12 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем}$$

первую, умноженную на 2; к третьей строке прибавим первую, умноженную на 3 –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 9 & -8 \end{array} \right); \text{ к третьей строке прибавим вторую –}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right); \text{ поменяем третий и четвертый столб-$$

цы местами, при этом меняем неизвестные x_4 и x_3 местами –

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & \\ 9 & 4 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Система совместная, неопределенная. В качестве базисного минора можем взять минор, стоящий на пересечении второго, третьего и четвертого столбцов и первой, второй и третьей строки.

Тогда x_2, x_3, x_4 – базисные неизвестные; x_1 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через x_1 :

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ -9x_3 + 7x_4 = 9 \\ -x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = -9x_1 - 2x_3 + 3x_4 - 3 \\ -9x_3 = -7x_4 + 9 = 7 + 9 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = -9x_1 - 2\left(-\frac{16}{9}\right) + 3(-1) - 3 \\ x_3 = -\frac{16}{9} \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{19}{12} - \frac{9}{4}x_1 \\ x_3 = -\frac{16}{9} \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Пусть $x_1 = c, c \in R$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -\frac{19}{12} - \frac{9}{4}c \\ x_3 = -\frac{16}{9} \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -19/12 \\ -16/9 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{c} \begin{pmatrix} -1 \\ -9/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}.$$

$$6) \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -27x_1 - 12x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений состоит из частного решения неоднородной системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений нашей однородной системы была найдена в предыдущей задаче.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \begin{pmatrix} -1 \\ -9/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}.$$

$$7) \begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \end{array} \right); \text{поменяем строки местами} -$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & 4 & 2 \end{array} \right); \text{разделим первую строку на } (-3) -$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4/3 & -2/3 \end{array} \right); \text{из первой строки вычтем вторую,}$$

умноженную на 2 -

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 23/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & -3 & -4/3 & -2/3 \end{array} \right).$$

Система совместная, неопределенная; x_1 и x_2 - базисные неизвестные; x_3, x_4 - свободные.

Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 + \frac{23}{3}x_4 = \frac{13}{3} \\ x_2 - 3x_3 - \frac{4}{3}x_4 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_3 - \frac{23}{3}x_4 + \frac{13}{3} \\ x_2 = 3x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$; где $c_1, c_2 \in R$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -6c_1 - \frac{23}{3}c_2 + \frac{13}{3} \\ x_2 = 3c_1 + \frac{4}{3}c_2 - \frac{2}{3} \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -23/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R.$$

$$8) \begin{cases} -3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений состоит из частного решения неоднородной системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений нашей однородной системы была найдена в предыдущей задаче.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -23/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R.$$

2.3. Линейное (векторное) пространство

Непустое множество V элементов $\bar{x}, \bar{y}$ произвольной природы называется *линейным* (векторным) *пространством*, если в нем определены две операции (сложения и умножения на число):

1. Для $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ определен элемент $\bar{x} + \bar{y} \in V$, называемый *суммой*.

2. Для $\forall \bar{x} \in V$ и $\forall \alpha \in R$ определен элемент $\alpha \bar{x} \in V$, называемый *произведением* элемента x на число α .

Указанные операции подчиняются следующим аксиомам, называемым аксиомами линейного пространства:

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V \text{ и } \forall \alpha, \beta \in R$$

- 1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (коммутативность сложения);
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (ассоциативность сложения);
- 3) $\exists \bar{o} \in V : \bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$;
- 4) $\forall \bar{x} \in V \exists (-\bar{x}) \in V : \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{o}$;
- 5) $(\alpha\beta)\bar{x} = \alpha(\beta\bar{x})$ (ассоциативность умножения);
- 6) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ (дистрибутивность умножения);
- 7) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$;
- 8) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*.

Примеры векторных пространств:

1) множество геометрических векторов $\mathbb{R}^2$, заданных на плоскости, для которых операции сложения векторов и умножения их на число определены ранее;

2) множество геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, заданных в пространстве, для которых операции сложения векторов и умножения их на число определены ранее;

3) множество упорядоченных наборов из n чисел $\mathbb{R}^n$, или пространство строк длины n , где операции сложения векторов и умножения их на число определяются следующим образом:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$;

4) множество $M_{m \times n}$ всех матриц размера $m \times n$, для которых ранее операции сложения матриц и умножения матриц на число определены ранее;

Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ линейного пространства V называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$), такие что

Тогда матрица $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода

от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, j -й столбец этой матрицы есть столбец координат вектора $\bar{e}'_j$ в базисе $\mathcal{B}$.

Для нахождения координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$ используется формула преобразования координат при преобразовании базиса:

$$\bar{X}' = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \bar{X},$$

где $\bar{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$;

$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Пример 2.8. Заданы два базиса в пространстве $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и

$\mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$, причем $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$;

$\bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$; $\bar{e}'_3 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; а также

$\bar{x} = (1, 2, 3)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Найти разложение вектора $\bar{x}$ по базису $\mathcal{B}'$.

Решение

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$. Для этого запишем координаты векторов $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ в соответствующие столбцы матрицы $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}^{-1} = \frac{1}{\det T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}} (T^V)^T$$

$$\det T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(2-1) + 3(6-3) = -2 + 9 = 7.$$

Так как определитель не равен 0, обратная матрица существует. Найдем компоненты присоединенной матрицы:

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad T_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$T^V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

транспонируем ее

$$(T^V)^T = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

тогда обратная матрица

$$T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$TT^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2(-1) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 7 + 2(-2) + 3(-1) & 1(-7) + 2 \cdot 5 + 3(-1) \\ 2 \cdot 0 + 3(-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 7 + 3(-2) + 1(-1) & 2(-7) + 3 \cdot 5 + 1(-1) \\ 1 \cdot 0 + 3(-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + 3(-2) + 1(-1) & 1(-7) + 3 \cdot 5 + 1(-1) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2+9 & 7-4-3 & -7+10-3 \\ -3+3 & 14-6-1 & -14+15-1 \\ -3+3 & 7-6-1 & -7+15-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

Найдем координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$:

$\bar{x} = (1, 2, 3)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$, запишем столбец:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$\bar{X}' = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \bar{X}$ – формула для нахождения координат вектора $\bar{x}$ в новом базисе,

где $\bar{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$;

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} &= T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 - 21 \\ -1 - 4 + 15 \\ 3 - 2 - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{10}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\bar{x} = \left(-1, \frac{10}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$.

2.4. Евклидово пространство

Действительное линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из этого пространства поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y})$ и называемое скалярным произведением векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$; причем для $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E$ и для $\forall \alpha \in R$ выполнены следующие свойства:

- 1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
- 3) $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y})$;
- 4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$.

Длиной вектора $\bar{x}$ называется число $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются *ортгональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

НЕРАВЕНСТВО КОШИ – БУНЯКОВСКОГО

Для любых элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство:

$$|(\bar{x}, \bar{y})|^2 \leq (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}).$$

НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО

Для любых элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

Процесс ортогонализации Шмидта

Базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ называется *ортонормированным*, если

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

В любом n -мерном евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис. Пусть $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ – произвольный базис n -мерного евклидова пространства E^n .

Тогда существует ортогональный базис $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ пространства E^n такой, что векторы базиса $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ линейно выражаются через векторы $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$:

$$\bar{g}_1 = \bar{f}_1;$$

$$\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)} \bar{g}_1;$$

.....

$$\bar{g}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{f}_k, \bar{g}_i)}{(\bar{g}_i, \bar{g}_i)} \bar{g}_i, \quad k = 2, \dots, n.$$

Возьмем $\bar{e}_i = \frac{\bar{g}_i}{\|\bar{g}_i\|}$, тогда $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – ортонормированный

базис пространства E^n .

Пример 2.9. Применяя процесс ортогонализации к системе векторов $\bar{f}_1(1, 1, 0)$; $\bar{f}_2(3, -1, 1)$; $\bar{f}_3(4, 0, -1)$, построить ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$.

Решение

1) Проверим, что векторы $\bar{f}_1(1, 1, 0)$; $\bar{f}_2(3, -1, 1)$; $\bar{f}_3(4, 0, -1)$, образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Для этого вычислим определитель, столбцами которого являются координаты дан-

$$\text{ных векторов: } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 - 4) - 1 \cdot (-1 - 3) = 8 \neq 0.$$

Следовательно, данные векторы образуют базис.

1) Найдем ортогональный базис:

$$\text{Пусть } \bar{g}_1 = \bar{f}_1;$$

$$\text{Координаты вектора } \bar{g}_1(1, 1, 0).$$

Вектор $\bar{g}_2$ будем искать в виде линейной комбинации векторов $\bar{f}_2$ и $\bar{g}_1 = \bar{f}_1$:

$$\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)} \bar{g}_1.$$

Найдем скалярные произведения:

$$(\bar{f}_2, \bar{g}_1) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3 - 1 = 2;$$

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2.$$

Найдем координаты вектора $\bar{g}_2$:

$$\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \frac{2}{2} \bar{g}_1 = \bar{f}_2 - \bar{g}_1 = (3 - 1, -1 - 1, 1 - 0) = (2, -2, 1).$$

Вектор $\bar{g}_3$ будем искать в виде линейной комбинации векторов $\bar{f}_2$, $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$:

$$\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)} \bar{g}_1 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{g}_2)}{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)} \bar{g}_2.$$

Найдем скалярные произведения:

$$(\bar{f}_3, \bar{g}_1) = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0(-1) = 4;$$

$$(\bar{f}_3, \bar{g}_2) = 4 \cdot 2 + 0(-2) + (-1)1 = 8 - 1 = 7;$$

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_1) = 2;$$

$$(\bar{g}_2, \bar{g}_2) = 4 + 4 + 1 = 9.$$

Найдем координаты вектора $\bar{g}_3$:

$$\begin{aligned} \bar{g}_3 &= \bar{f}_3 - \frac{4}{2} \bar{g}_1 - \frac{7}{9} \bar{g}_2 = \bar{f}_3 - 2\bar{g}_1 - \frac{7}{9} \bar{g}_2 = \\ &= (4 - 2 \cdot 1 - \frac{7}{9} \cdot 2, 0 - 2 \cdot 1 - \frac{7}{9}(-2), -1 - 2 \cdot 0 - \frac{7}{9} \cdot 1) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{16}{9} \right).$$

Проверка

Проверим, что векторы $\overline{g}_1(1, 1, 0); \quad \overline{g}_2(2, -2, 1);$
 $\overline{g}_3\left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right)$ ортогональны, для этого найдем скалярные произведения:

$$(\overline{g}_1, \overline{g}_2) = 1 \cdot 2 + 1(-2) = 0;$$

$$(\overline{g}_1, \overline{g}_3) = \frac{4}{9} \cdot 1 - \frac{4}{9} \cdot 1 + 0 \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) = 0;$$

$$(\overline{g}_2, \overline{g}_3) = 2 \cdot \frac{4}{9} - 2\left(-\frac{4}{9}\right) + 1\left(-\frac{16}{9}\right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - \frac{16}{9} = 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{g}_3$ ортогональны.

2) Ортонормируем векторы $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{g}_3$.

$$\overline{g}_1(1, 1, 0); \quad |\overline{g}_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$

$$\overline{g}_2(2, -2, 1); \quad |\overline{g}_2| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

$$\overline{g}_3\left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right); \quad |\overline{g}_3| = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{256}{81}} = \sqrt{\frac{288}{81}} = \frac{12\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда ортонормированные векторы:

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{g}_1}{|\overline{g}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right);$$

$$\overline{e}_2 = \frac{\overline{g}_2}{|\overline{g}_2|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right);$$

$$\overline{e}_3 = \frac{\overline{g}_3}{|\overline{g}_3|} = \left(\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 4\sqrt{2}}, -\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 4\sqrt{2}}, -\frac{16 \cdot 3}{9 \cdot 4\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

Векторы $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ образуют ортонормированный базис.

2.5. Линейные операторы

Линейным оператором $\hat{A}$ в линейном пространстве V называется любое отображение $\hat{A}: V \rightarrow V$ пространства V в себя, обладающее следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\hat{A}(\lambda \bar{x}) &= \lambda \hat{A}\bar{x}; \\ \hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) &= \hat{A}\bar{x} + \hat{A}\bar{y}.\end{aligned}$$

Если $\hat{A}$ – линейный оператор в конечномерном пространстве V^n и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис пространства V^n , то

$$\hat{A}\bar{e}_k = a_{1k}\bar{e}_1 + a_{2k}\bar{e}_2 + \dots + a_{nk}\bar{e}_n; \quad k = 1 \dots n.$$

Тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – называется матри-

цей оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$. Столбцами этой матрицы являются координаты образов базисных векторов при действии линейного оператора.

Формула преобразования матрицы линейного оператора при преобразовании базиса:

$$A' = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} A T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'},$$

где $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$;

A' – матрица линейного оператора в базисе $\mathcal{B}'$;

A – матрица линейного оператора в базисе $\mathcal{B}$.

Пример 2.10. Дана матрица A линейного оператора в базисе

$$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A' этого оператора в базисе

$$\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}, \quad \text{где}$$

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3; \quad \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3; \quad \bar{e}_3' = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Решение

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$:

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 2.8 мы нашли обратную матрицу к матрице $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле преобразования матрицы линейного оператора при преобразовании базиса найдем матрицу A'

$$\begin{aligned} A' &= T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} A T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 7 \cdot 3 - 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 7 \cdot 0 - 7 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 5 & -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 5 & 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 - 14 & -35 & -7 - 21 \\ -1 - 6 + 10 & -2 + 25 & 2 + 15 \\ 3 - 3 - 2 & 6 - 5 & 1 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -35 & -28 \\ 3 & 23 & 17 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 - 35 \cdot 2 - 28 \cdot 1 & 7 \cdot 2 - 35 \cdot 3 - 28 \cdot 3 & 7 \cdot 3 - 35 \cdot 28 \\ 3 \cdot 1 + 23 \cdot 2 + 17 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 23 \cdot 3 + 17 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 23 \cdot 17 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -91 & -175 & -42 \\ 66 & 126 & 49 \\ -2 & -7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -25 & -6 \\ \frac{66}{7} & 18 & 7 \\ \frac{-2}{7} & -1 & -1 \end{pmatrix} = A'.$$

2.6. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Пусть $\hat{A}: V \rightarrow V$. Число λ называется *собственным значением* линейного оператора $\hat{A}$, если существует такой ненулевой вектор $\bar{x} \in V$, что $\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$. При этом $\bar{x}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному значению λ .

Пусть A – матрица линейного оператора в базисе $\mathcal{B}$ пространства V^n . Тогда λ – собственное значение линейного оператора тогда и только тогда, когда λ – корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Это уравнение называется *характеристическим* и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственный вектор, отвечающий собственному значению λ , можно найти, решив однородную систему линейных уравнений, записанную в виде:

$$(A - \lambda E)X = \bar{0},$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$;

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

или в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{array} \right.$$

В случае, когда все собственные значения $\lambda_1 \dots \lambda_n$ различны, то отвечающие им собственные векторы образуют базис. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов будет диагональной, причем на диагонали будут стоять соответствующие собственные числа:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E . Линейный оператор $\hat{A}^*$ называется *сопряженным* линейному оператору $\hat{A}$, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ выполняется равенство $(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}^*\vec{y})$.

Линейный оператор $\hat{A}^*$ называется *самосопряженным*, если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется равенство $(\hat{A} \bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A} \bar{y})$, т. е. если $\hat{A}^* = \hat{A}$. Самосопряженный линейный оператор в любом ортонормированном базисе имеет симметричную матрицу, т. е. $A^\top = A$.

Все собственные значения самосопряженного линейного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.

Для любого самосопряженного оператора $\hat{A}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов, причем в этом базисе его матрица диагональная и на диагонали стоят соответствующие собственные значения.

Пример 2.11. Дана матрица A линейного самосопряженного оператора в ортонормированном базисе,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -9 \\ -1 & -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, а так же матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

Решение

1) Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & -8 - \lambda & -9 \\ -1 & -9 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -8 - \lambda & -9 \\ -9 & -8 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -1 & -8 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -8 - \lambda \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda((-8 - \lambda)^2 - 81) - (-8 - \lambda - 9) - (-9 - 8 - \lambda) = 0; \\ &\lambda(64 + 16\lambda + \lambda^2 - 81) - 17 - \lambda - 17 - \lambda = 0; \\ &\lambda^3 + 16\lambda^2 - 17\lambda - 2\lambda - 34 = 0; \\ &\lambda^3 + 16\lambda^2 - 19\lambda - 34 = 0. \end{aligned}$$

Первый корень находим подбором среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 17, \pm 34$, являющихся делителями числа 34.

Легко убедиться, что $\lambda = 2$ – корень этого уравнения.

Разделим многочлен $\lambda^3 + 16\lambda^2 - 19\lambda - 34$ на $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 + 16\lambda^2 - 19\lambda - 34 & \lambda - 2 \\ \underline{\lambda^3 - 2\lambda^2} & \\ \hline & 18\lambda^2 - 19\lambda - 34 \\ & \underline{18\lambda^2 - 36\lambda} \\ & 17\lambda - 34 \\ & \underline{17\lambda - 34} \\ & 0 \end{array}$$

Тогда

$$\lambda^3 + 16\lambda^2 - 19\lambda - 34 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 18\lambda + 17) = 0;$$

$$\lambda = 2 \text{ или } \lambda^2 + 18\lambda + 17 = 0;$$

$$\lambda = -17; \quad \lambda = -1;$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -17$ – собственные значения.

Найдем соответствующие им собственные векторы: для этого решим следующие однородные системы линейных уравнений

$$1) \lambda_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & -1 \\ 1 & -8-2 & -9 \\ -1 & -9 & -8-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -10 & -9 & | & 0 \\ -1 & -9 & -10 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ поменяем первую и вторую строки ме-}$$

стами –

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -9 & | & 0 \\ -2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -9 & -10 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ ко второй строке прибавим первую,}$$

умноженную на 2; к третьей строке прибавим первую строку –

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -9 & | & 0 \\ 0 & -19 & -19 & | & 0 \\ 0 & -19 & -19 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ разделим вторую и третью строки на } (-19) -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -9 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ из третьей строки вычтем вторую –}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -9 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ к первой строке прибавим вторую, умно-}$$

женную на 10 –

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

x_1 ; x_2 – базисные неизвестные; x_3 – свободное неизвестное.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -C \\ x_2 = -C \\ x_3 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, поэтому зададим $C = 1$.

$$\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор, отвечающий собственному}$$

значению $\lambda = 2$.

2) $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 1 & -1 \\ 1 & -8+1 & -9 \\ -1 & -9 & -8+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -9 & 0 \\ -1 & -9 & -7 & 0 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем первую; к треть-$$

ей строке прибавим первую –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \end{array} \right); \text{ из третьей строки вычтем вторую –}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ разделим вторую строку на } (-8) -$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ из первой строки вычтем вторую –}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

x_1 ; x_2 – базисные неизвестные. x_3 – свободное неизвестное.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2C \\ x_2 = -C \\ x_3 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, поэтому зададим $C = 1$.

$$\overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор, отвечающий собственному}$$

значению $\lambda = -1$.

3) $\lambda_3 = -17$.

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 & -1 \\ 1 & -8+17 & -9 \\ -1 & -9 & -8+17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & -9 & 0 \\ -1 & -9 & 9 & 0 \end{array} \right); \text{ поменяем первую и вторую строки места-}$$

ми –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -9 & 0 \\ 17 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -9 & 9 & 0 \end{array} \right); \text{ из второй строки вычтем первую, умно-}$$

женную на 17, к третьей строке прибавим первую –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & -152 & 152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ разделим вторую строку на } (-152) -$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \text{ из первой строки вычтем вторую, умножен-}$$

ную на 9 –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные; x_3 – свободное неизвестное.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = C \\ x_3 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, поэтому зададим $C = 1$.

$$\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор, отвечающий собственному}$$

значению $\lambda = -17$.

$$\text{Итак, } \lambda_1 = 2, \overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1, \overline{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = -17, \overline{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\text{а) } \lambda_1 = 2, \overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \overline{x_1} = \lambda \overline{x_1},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -9 \\ -1 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - 8 \cdot (-1) - 9 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-1) - 9 \cdot (-1) - 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \overline{x_1}.$$

$$\text{2) } \lambda_2 = -1, \overline{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -9 \\ -1 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) - 9 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 9 \cdot (-1) - 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\overline{x_2}.$$

$$3) \lambda_3 = -17, \overline{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -9 \\ -1 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -8-9 \\ -9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -17 \end{pmatrix} = -17 \overline{x_3}.$$

Проверим ортогональность собственных векторов

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0;$$

$$(\overline{x_2}, \overline{x_3}) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0;$$

$$(\overline{x_1}, \overline{x_3}) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

2) Пусть $\mathcal{B}' = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ – ортогональный базис, тогда

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица перехода к базису из}$$

собственных векторов.

Найдем матрицу линейного оператора A' в базисе $\mathcal{B}'$ из собственных векторов.

Оператор самосопряженный, следовательно, его матрица в базисе из собственных векторов должна быть диагональной и по диагонали должны стоять соответствующие собственные значения:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Проверим

$$A' = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} A T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

Найдем $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1}$:

$$\det T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1-1) - 2(-1-1) = 6;$$

$$T_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; T_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; T_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; T_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; T_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; T_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; T_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -9 \\ -1 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2-2 & -2+16-18 & 2+18-16 \\ -1-1 & 2+8-9 & -2+9-8 \\ 3-3 & -24-27 & -27-24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -51 & -51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4+4+4 & -8+4+4 & -4+4 \\ 2-1-1 & -4-1-1 & 1-1 \\ 51-51 & 51-51 & -51-51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим, что матрица A' в базисе $\mathcal{B}$ из собственных векторов действительно диагональная.

Пример 2.12.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A , а также матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

Разложим по первой строке:

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 \\ -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)((9-\lambda)^2 - 25) = 0;$$

$$1-\lambda = 0 \text{ или } (9-\lambda)^2 - 25 = 0;$$

$$\lambda = 1. \quad (9-\lambda)^2 = 25;$$

$$9-\lambda = \pm 5;$$

$$9-\lambda = 5, \lambda = 4 \text{ или } 9-\lambda = -5, \lambda = 14.$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 14$ – собственные значения линейного оператора.

2) Найдем соответствующие им собственные векторы. Для этого решим следующие однородные системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 9-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) $\lambda = 1.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 8 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & 8 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ поменяем первую и третью строки местами}$$

—

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 & | & 0 \\ 0 & 8 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ ко второй строке прибавим первую—}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ разделим вторую строку на 3 —}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ поменяем первую и вторую строки местами}$$

—

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ ко второй строке прибавим первую, умно-$$

женную на 5 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 13 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ разделим вторую строку на 13—}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}; \text{ из первой строки вычтем вторую—} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

x_3, x_2 — базисные неизвестные, x_1 — свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное неизвестное x_1 :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 1} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы определяются с точностью до числового множителя, поэтому возьмем $c = 1$.

$$\bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор, отвечающий собственному}$$

значению $\lambda = 1$.

б) $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 9-4 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & 9-4 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{к третьей строке} \\ \text{прибавим} \\ \text{вторую} \end{array} \right| =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{первую строку} \\ \text{разделим на } (-3); \\ \text{вторую разделим на } 5 \end{array} \right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3 .

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Возьмем } c = 1 \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор, отвечаю-}$$

щий собственному значению $\lambda = 4$.

б) $\lambda = 14$.

$$\begin{pmatrix} 1-14 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 9-14 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & 9-14 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{первую строку разделим на } (-13) \\ \text{из третьей строки вычтем вторую} \\ \text{вторую строку разделим на } (-5) \end{array} \right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное x_3 .

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -c \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 3} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_3 = c \end{cases}$$

Возьмем $c = 1 \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвеча-

ющий собственному значению $\lambda = 14$.

Итак,

$$\lambda_1 = 1, \bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 4, \bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 14, \bar{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\text{а) } \lambda = 1; \bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow A\bar{x}_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}$; подставим значения A и $\bar{x}_{\lambda_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}_{\lambda 1}.$$

$$\text{б) } \lambda = 4; \bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$A\bar{x}_{\lambda 2} = 4\bar{x}_{\lambda 2}$, подставим значения A и $\bar{x}_{\lambda 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9-5 \\ -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\bar{x}_{\lambda 2}$$

в) $\lambda = 14$; $\bar{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\bar{x}_{\lambda 3} = 14\bar{x}_{\lambda 3}$, подставим значения A и $\bar{x}_{\lambda 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9-5 \\ 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 14\bar{x}_{\lambda 3}.$$

3) Проверим ортогональность собственных векторов.

$$(\bar{x}_{\lambda 1}, \bar{x}_{\lambda 2}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

$$(\bar{x}_{\lambda 1}, \bar{x}_{\lambda 3}) = 1 \cdot 0 + 0(-1) + 0 \cdot 1 = 0.$$

$$(\bar{x}_{\lambda 3}, \bar{x}_{\lambda 2}) = 0 \cdot 0 + 1(-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Пусть $\mathcal{B}' = \{\bar{x}_{\lambda 1}, \bar{x}_{\lambda 2}, \bar{x}_{\lambda 3}\}$ – ортогональный базис.

Найдем матрицу линейного оператора в этом базисе. Так как оператор самосопряженный, то его матрица в базисе из собственных векторов должна быть диагональной и на диагонали должны стоять соответствующие собственные значения.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Проверим это:

$A' = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} A T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, формула преобразования матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

$$\begin{cases} \bar{x}_{\lambda 1} = \bar{e}_1 \\ \bar{x}_{\lambda 2} = \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{x}_{\lambda 3} = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3. \end{cases}$$

Столбцами матрицы $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, являются соответствующие коэффициенты базисных векторов

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1}$:

$$\det T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+1) = 2 \neq 0.$$

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{\det T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}} (T^{\vee})^{\Gamma}.$$

Найдем компоненты матрицы $T^{\vee}$.

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad T_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$T_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$T_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$T^{\vee} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (T^{\vee})^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9-5 & -5+9 \\ 0 & -9-5 & 5+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+4 & -4+4 \\ 0 & -14+14 & 14+14 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Получили, что матрица линейного самосопряженного оператора в базисе из собственных векторов действительно диагональная и на диагонали стоят собственные значения.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 1, \bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda = 4, \bar{x}_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = 14, \bar{x}_{\lambda 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.7. Билинейные и квадратичные формы.

Пусть V – вещественное линейное пространство размерности n . Числовая функция $B(\bar{x}, \bar{y})$ двух векторных аргументов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ($\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$) называется *билинейной формой*, если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ и для любого действительного числа λ выполнены следующие условия:

- 1) $B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{z}) + B(\bar{y}, \bar{z})$;
- 2) $B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{x}, \bar{z})$;
- 3) $B(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y})$;
- 4) $B(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y})$.

То есть билинейная форма линейна по каждому из своих аргументов.

Билинейная форма называется *симметрической*, если для любых элементов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполнено равенство:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{y}, \bar{x}).$$

Пусть в линейном пространстве V задан некоторый базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, тогда любую билинейную форму можно записать в виде:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j,$$

где $b_{ij} = B(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, а x_i, y_j - координаты векторов $\bar{x}, \bar{y}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Матрица B , состоящая из элементов b_{ij} ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$), называется *матрицей билинейной формы*.

Квадратичной формой называется числовая функция одного векторного аргумента $\bar{x}$, которая получается из симметрической билинейной формы при $\bar{x} = \bar{y}$:

$$Q(\bar{x}) = B(\bar{x}, \bar{x}).$$

Если в линейном пространстве V задан некоторый базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, то квадратичная форма в этом базисе имеет вид:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

где матрица $A=(a_{ij})$ - матрица квадратичной формы. Заметим, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей.

При переходе к другому базису координата вектора $\bar{x}$ меняются, меняется и матрица квадратичной формы. Для любой квадратичной формы существует базис, в котором квадратичная форма примет вид:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2.$$

Такой вид квадратичной формы называется каноническим. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид,

называется каноническим базисом. Матрица квадратичной формы в каноническом базисе диагональная.

Пусть квадратичная форма задана в евклидовом пространстве. Тогда каждому самосопряженному линейному оператору $\hat{A}$ в евклидовом пространстве соответствует квадратичная форма $Q(\bar{x})$:

$$Q(\bar{x}) = (\hat{A}\bar{x}, \bar{x}).$$

То есть мы можем рассматривать квадратичную форму в евклидовом пространстве как скалярное произведение образа вектора $\bar{x}$ при действии на него самосопряженного линейного оператора $\hat{A}$ на вектор $\bar{x}$. Матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе совпадает с матрицей оператора $\hat{A}$.

Матрица самосопряженного линейного оператора в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов, диагональная. Следовательно, для любой квадратичной формы, заданной в евклидовом пространстве, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, в котором квадратичная форма имеет вид:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \text{ где } \lambda_i (i=1, 2, \dots, n) - \text{собственные значения,}$$

выписанные с учетом их кратностей.

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если для любого ненулевого элемента $\bar{x} \in V$ выполняется неравенство $Q(\bar{x}) > 0$.

Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если для любого ненулевого элемента $\bar{x} \in V$ выполняется неравенство $Q(\bar{x}) < 0$.

Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если существуют такие элементы $\bar{x}, \bar{y} \in V$, что

$$Q(\bar{x}) < 0, Q(\bar{y}) > 0.$$

Критерий Сильвестра.

Для того чтобы квадратичная форма

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \text{ была положительно определенной необходимо и}$$

достаточно, чтобы все миноры ее матрицы, расположенные в левом верхнем углу были положительными, т. е.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Пример 2.13.

Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $q(\bar{x}) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ имеет канонический вид, и записать эту форму в найденном ортонормированном базисе.

Решение

$$q(\bar{x}) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

1) Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение.

$$\det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3 - \lambda & -4 \\ -2 & -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

Разложим по первой строке:

$$(6 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 - \lambda \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} & (6 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 16) + 2(-2(3 - \lambda) - 8) - 2(8 + 2(3 - \lambda)) = \\ & = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 7) + 2(2\lambda - 14) - 2(14 - 2\lambda) = \\ & = (6 - \lambda)(\lambda - 7)(\lambda + 1) + 8(\lambda - 7) = (\lambda - 7)(6\lambda - \lambda^2 + 6 - \lambda + 8) = \\ & = -(\lambda - 7)(\lambda^2 - 5\lambda + 14) = -(\lambda - 7)(\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0; \end{aligned}$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно, $\lambda - 7 = 0$ или $\lambda + 2 = 0$;

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7$ – собственные значения.

3) Найдем соответствующие им собственные векторы. Для этого решим следующие однородные системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) $\lambda = -2$.

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \text{ разделим первую строку на 2 и поменяем}$$

первую и вторую строки местами –

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \text{ ко второй строке прибавим первую, умно-}$$

женную на 2, из третьей строки вычтем первую –

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}; \text{ разделим вторую строку на 9, из третьей}$$

строки вычтем вторую –

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим базисные неизвестные через свободное:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = 2c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda_1} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы определяются с точностью до числового множителя, поэтому возьмем $c = 1$.

Тогда $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий соб-

ственному значению $\lambda = -2$.

б) $\lambda = 7$.

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$; разделим первую строку на (-1), вторую

и третью строки разделим на (-2) –

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; из второй и третьей строки вычтем первую –

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 и x_3 – свободные неизвестные.

Выразим x_1 через неизвестные x_2 и x_3 :

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{x}_{\lambda 2} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Однородная система линейных уравнений имеет два линейно независимых решения.

Тогда векторы, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственные

векторы, отвечающие собственному значению $\lambda = 7$.

Итак,

$$\lambda_1 = -2, \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 7, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Проверим ортогональность собственных векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, а так же векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_3$:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0;$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_3) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Векторы $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ не являются ортогональными, так как они отвечают одному и тому же собственному значению λ . Действительно: $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 4 \neq 0$.

Найдем вектор $\bar{g}_3$, который является линейной комбинации векторов $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, и ортогонален вектору $\bar{x}_2$, т. е.

$$\bar{g}_3 = \bar{x}_3 - c\bar{x}_2 \text{ и } (\bar{g}_3, \bar{x}_2) = 0.$$

Найдем коэффициент c из условия ортогональности векторов $\bar{g}_3$ и $\bar{x}_2$.

Тогда

$$(\bar{x}_3 - c\bar{x}_2, \bar{x}_2) = 0 \Rightarrow (\bar{x}_3, \bar{x}_2) - c(\bar{x}_2, \bar{x}_2) = 0 \Rightarrow c = \frac{(\bar{x}_3, \bar{x}_2)}{(\bar{x}_2, \bar{x}_2)}.$$

Найдем скалярные произведения:

$$(\bar{x}_3, \bar{x}_2) = 4;$$

$$(\bar{x}_2, \bar{x}_2) = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5.$$

Следовательно, $c = 4/5$.

$$\text{Тогда } \bar{g}_3 = \bar{x}_3 - c\bar{x}_2 = (-2, 0, 1) - 4/5(-2, 1, 0) = (-2/5, -4/5, 1).$$

Вектор $\bar{g}_3$, является линейной комбинации векторов $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, значит, он так же является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 7$, а, следовательно, он ортогонален вектору $\bar{x}_1$. Проверим ортогональность векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{g}_3$, а так же векторов $\bar{x}_2$ и $\bar{g}_3$:

$$(\bar{x}_1, \bar{g}_3) = 1 \cdot (-2/5) + 2 \cdot (-4/5) + 2 \cdot 1 = 0;$$

$$(\bar{x}_2, \bar{g}_3) = -2 \cdot (-2/5) + 1 \cdot (-4/5) + 0 \cdot 1 = 0.$$

Тогда $\mathbf{B}' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{g}_3\}$ – ортогональный базис. Вычислим длины векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{g}_3$:

$$|\bar{x}_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3;$$

$$|\bar{x}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5};$$

$$|\bar{g}_3| = \sqrt{(-2/5)^2 + (-4/5)^2 + 1^2} = 3/\sqrt{5}$$

Найдем ортонормированный базис $\mathbf{B}'' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Нормируем вектора $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{g}_3$:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right);$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{g}_3}{|\bar{g}_3|} = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

Найдем матрицу квадратичной формы в этом базисе. Матрица квадратичной формы в базисе из собственных векторов должна быть диагональной и на диагонали должны стоять соответствующие собственные значения. Следовательно,

$$Q' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.

Столбцами матрицы $T_{B \rightarrow B''}$ являются соответствующие координаты базисных векторов:

$$T_{B \rightarrow B''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

В базисе $B'' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ заданная квадратичная форма имеет вид:

$$q(\bar{x}') = -2(x'_1)^2 + 7(x'_2)^2 + 7(x'_3)^2,$$

а соответствующее преобразование координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x'_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}x'_2 - \frac{2}{3\sqrt{5}}x'_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x'_2 - \frac{4}{3\sqrt{5}}x'_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}x'_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}x'_3 \end{cases}.$$

2.8. Приведение кривой 2-го порядка к каноническому виду методом собственных значений.

Пусть в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задано уравнение кривой 2-го порядка (см. п. 1.1.5):

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (6)$$

Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой данное уравнение имеет канонический вид.

Рассмотрим часть многочлена второй степени, как квадратичную форму

$$Q(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy.$$

Приведем квадратичную форму к диагональному виду. Для этого найдем собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Пусть λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы Q , $\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов, причем нумерацию собственных векторов выбираем так, чтобы переход от вектора $\bar{e}_1$ к вектору $\bar{e}_2$ шел против часовой стрелки (рис. 2.1).

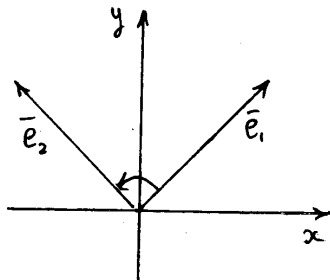


Рис. 2.1

В базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы примет вид:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2.$$

Пусть $\bar{e}_1 = t_{11}\bar{i} + t_{21}\bar{j}$; $\bar{e}_2 = t_{12}\bar{i} + t_{22}\bar{j}$.

Тогда $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ – матрица перехода к базису из собственных векторов.

Выразим старые координаты через новые:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y'; \\ y = t_{21}x' + t_{22}y'. \end{cases} \quad (7)$$

Подставим выражение для x, y (7) в (6), получим:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda(y')^2 + D(t_{11}x' + t_{12}y') + E(t_{21}x' + t_{22}y') + F = 0$$

и исследуем это уравнение методом выделения полных квадратов.

Пример 2.14. Привести кривую 2-го порядка

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

к каноническому виду и сделать чертеж.

Решение

Выпишем квадратичную форму:

$$Q(x, y) = 6xy + 8y^2.$$

Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 3 \\ 3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(8 - \lambda) - 9 = 0;$$

$$-8\lambda + \lambda^2 - 9 = 0;$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$

$$\lambda_1 = 9; \lambda_2 = -1.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_2 = -1$.

а) $\lambda_1 = 9$.

$$\begin{pmatrix} 0 - 9 & 3 \\ 3 & 8 - 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$3x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = 3C; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному

значению $\lambda_1 = 9$.

б) $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 3 \\ 3 & 8+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3|0 \\ 3 & 9|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3|0 \\ 1 & 3|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3|0 \\ 0 & 0|0 \end{pmatrix};$$

$$x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 = -3C, \\ x_2 = C; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному

значению $\lambda_2 = -1$.

Изобразим векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ на плоскости XOY (рис. 2.2).

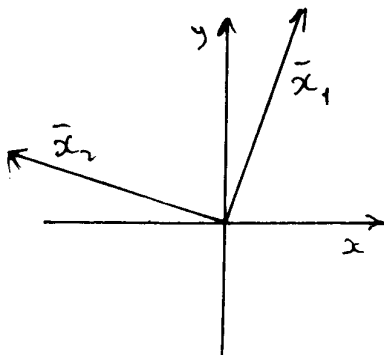


Рис. 2.2

Поворот от вектора $\bar{x}_1$ к вектору $\bar{x}_2$ идет против часовой стрелки. Значит, нумерация векторов выбрана правильно.

Нормируем собственные векторы:

$$|x_1| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow \bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_1}{|x_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right);$$

$$|x_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow \overline{e_2} = \frac{\overline{x_2}}{|x_2|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right).$$

$\mathcal{B}' = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$Q(x', y') = 9(x')^2 - (y')^2;$$

$\overline{X'} = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \overline{X}$ – формула преобразования координат при преобразовании базиса $\Rightarrow \overline{X} = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \overline{X'}$.

Запишем матрицу $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ – матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, столбцами которой являются координаты найденных собственных векторов:

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 3 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 3 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} x' - \frac{3}{\sqrt{10}} y' \\ 3x' + y' \\ \frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y'). \end{cases}$$

Подставим найденные значения выражения для координат в уравнение кривой:

$$9(x')^2 - (y')^2 - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y') - 26 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y') + 11 = 0;$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - \frac{12}{\sqrt{10}} x' + \frac{36}{\sqrt{10}} y' - \frac{78}{\sqrt{10}} x' - \frac{26}{\sqrt{10}} y' + 11 = 0;$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{10}{\sqrt{10}}y' + 11 = 0;$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0.$$

Выделим полные квадраты по x' и по y' :

$$9\left((x')^2 - \sqrt{10}x'\right) - ((y')^2 - \sqrt{10}y') + 11 = 0;$$

$$9\left(\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{10}{4}\right) - \left(\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{10}{4}\right) + 11 = 0;$$

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0;$$

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9; \text{ разделим на } 9 -$$

$$\frac{\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X''O''Y''$, которая получается из системы координат $X'OY'$ параллельным переносом осей OX' и OY' :

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{3^2} = 1 - \text{получили каноническое уравнение гиперболы, } a = 1 - \text{действительная полуось; } b = 3 - \text{мнимая полуось.}$$

Найдем координаты центра гиперболы в системе координат XOY . Для этого выразим координаты x , y через x'' , y'' (канонические координаты):

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y' = y'' + \frac{\sqrt{10}}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(x'' + \frac{\sqrt{10}}{2} - 3y'' - \frac{3\sqrt{10}}{2} \right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(3x'' + \frac{3\sqrt{10}}{2} + y'' + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (x'' - 3y'' - \sqrt{10}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x'' + y'' + 2\sqrt{10}) \end{cases}$$

В канонической системе координат $X''O''Y''$ точка $O''(0, 0)$ – центр гиперболы.

В системе координат XOY :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (0 - 0 - \sqrt{10}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (0 + 0 + 2\sqrt{10}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2; \end{cases}$$

$O(-1, 2)$ – центр гиперболы.

Найдем уравнения асимптот в системе координат XOY . В системе координат $X''O''Y''$:

$$y'' = \pm (b/a)x''; \quad b = 1, a = 3 \Rightarrow$$

$$y'' = \pm 3x''.$$

Выразим координаты x'', y'' через x, y :

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y'). \end{cases}$$

$$T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x' = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y; y' = -\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y;$$

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{\sqrt{10}}{2}; y'' = -\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Подставим x'' и y'' в уравнение асимптот:

$$-\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{\sqrt{10}}{2} = \pm 3 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{\sqrt{10}}{2} \right), \text{ умножим}$$

на $\sqrt{10}$:

$$-3x + y - 5 = \pm 3(x + 3y - 5).$$

Первая асимптота –

$$-3x + y - 5 = 3(x + 3y - 5);$$

$$6x + 8y - 10 = 0;$$

$$3x + 4y - 5 = 0.$$

Вторая асимптота –

$$-3x + y - 5 = -3(x + 3y - 5);$$

$$-3x + y - 5 = 3x - 9y + 15;$$

$$10y = 20;$$

$$y = 2.$$

$$\text{Уравнения асимптот: } \begin{cases} y = 2, \\ 3x + 4y - 5 = 0. \end{cases}$$

Центр гиперболы $O_1(-1, 2)$.

Изобразим гиперболу на координатной плоскости (рис. 2.3).

Через точку $O_1(-1, 2)$ проведем оси OX'' , OY'' , которые направлены по векторам $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$, где

$$\overline{e_1} \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \overline{e_2} \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right).$$

Вершины A_1 и A_2 гиперболы находятся на расстоянии 1 от точки O_2 по оси OX'' , а точки B_1 и B_2 находятся на расстоянии 3 от точки O_2 по оси OY'' .

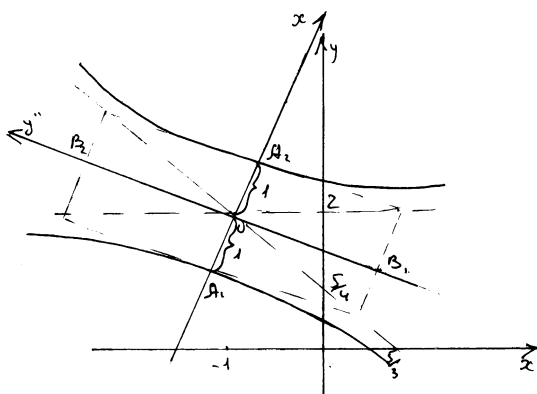


Рис. 2.3

Пример 2.15. Привести кривую 2-го порядка

$$733x^2 + 117y^2 + 426xy + 1426\sqrt{10}x + 582\sqrt{10}y + 469 = 0$$

к каноническому виду и сделать чертеж.

Решение

$$733x^2 + 117y^2 + 426xy + 1426\sqrt{10}x + 582\sqrt{10}y + 469 = 0.$$

Выпишем квадратичную форму:

$$1) Q(x, y) = 733x^2 + 117y^2 + 426xy.$$

Запишем матрицу квадратичной формы.

$$Q = \begin{pmatrix} 733 & 231 \\ 231 & 117 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 733 - \lambda & 231 \\ 231 & 117 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(733 - \lambda)(117 - \lambda) - 231 \cdot 231 = 0;$$

$$\lambda^2 - 733\lambda - 117\lambda + 85761 - 53361 = 0;$$

$$\lambda^2 - 850\lambda + 32400 = 0;$$

$$D = 850^2 - 4 \cdot 32400 = 100 \cdot 5929;$$

$$\sqrt{D} = 770;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{850 \pm 770}{2};$$

$$\lambda_1 = 40; \lambda_2 = 810.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие данным собственным значениям. Для этого решим систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 733 - \lambda & 231 \\ 231 & 117 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а) $\lambda = 40$.

Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 733 - 40 & 231 & | & 0 \\ 231 & 117 - 40 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 693 & 231 & | & 0 \\ 231 & 77 & | & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{cc|c} \text{разделим первую строку на 231} \\ \text{вторую на 77} \end{array} \right| = \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим следующее уравнение:

$$3x_1 + x_2 = 0.$$

Пусть x_2 – базисное неизвестное, x_1 – свободное. Выразим x_2 через x_1 .

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_1 = -c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda 1} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, c \in R.$$

В качестве собственного вектора можно взять вектор $\bar{x}_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 40$.

б) $\lambda = 810$.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 733 - 810 & 231 & | & 0 \\ 231 & 117 - 810 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -77 & 231 & | & 0 \\ 231 & -693 & | & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{cc|c} \text{первую строку разделим на } (-77) \\ \text{вторую разделим на 231} \end{array} \right| = \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 0 \\ 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим следующее уравнение:

$$x_1 - 3x_2 = 0.$$

Пусть x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_{\lambda_2} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c = 1 \Rightarrow \bar{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 810$.

в) Изобразим вектор $\bar{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ на плоскости XOY (рис 2.4).

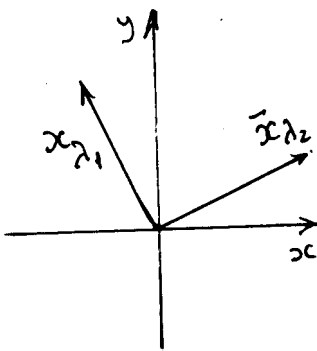


Рис. 2.4

Поворот от вектора $\bar{x}_{\lambda_1}$ к вектору $\bar{x}_{\lambda_2}$ идет по ходу часовой стрелки, следовательно, нумерация выбрана не верно. Поменяем $\bar{x}_{\lambda_1}$ и $\bar{x}_{\lambda_2}$ местами и нормируем их.

$$|\bar{x}_{\lambda_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}; \quad |\bar{x}_{\lambda_2}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_{\lambda_2}}{|\bar{x}_{\lambda_2}|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \lambda_1 = 810;$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_{\lambda_1}}{|\bar{x}_{\lambda_1}|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \lambda_2 = 40;$$

$\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов.

Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид, причем на диагонали стоят соответствующие собственные значения:

$$Q' = \begin{pmatrix} 810 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$Q(x, y) = 810(x')^2 + 40(y')^2.$$

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, столбцами которой являются координаты найденных собственных векторов.

$$T'_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Пусть } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$X' = T^{-1}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X$ – формула преобразования координат вектора при преобразовании базиса. Тогда

$$X = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X' \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3x'/\sqrt{10} & -y'/\sqrt{10} \\ x'/\sqrt{10} + 3y'/\sqrt{10} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}} x' - \frac{1}{\sqrt{10}} y' = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{3}{\sqrt{10}} y' = \frac{1}{\sqrt{10}} (x' + 3y'). \end{cases}$$

Подставим координаты x, y , выраженные через новые координаты x', y' , в исходное уравнение кривой:

$$810(x')^2 + 40(y')^2 + 1426\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') + \\ + 582\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') + 4690 = 0;$$

$$810(x')^2 + 40(y')^2 + 4860x' + 320y' + 4690 = 0.$$

Выделим полные квадраты по x' и y' :

$$810((x')^2 + 6x') + 40((y') + 8y') + 4690 = 0;$$

$$810((x' + 3)^2 - 9) + 40((y' + 4)^2 - 16) + 4690 = 0;$$

$$810(x' + 3)^2 - 7290 + 40(y' + 4)^2 - 640 + 4690 = 0;$$

$$810(x' + 3)^2 + (y' + 4)^2 = 3240 \text{ разделим на } 3240$$

$$\frac{(x' + 3)^2}{4} + \frac{(y' + 4)^2}{81} = 1.$$

Перейдем к новой декартовой прямоугольной системе координат $X''O''Y''$, полученной из системы $X'O'Y'$ параллельным переносом осей OX , OY :

$$\begin{cases} x'' = x' + 3 \\ y'' = y' + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - 3 \\ y' = y'' - 4 \end{cases}$$

$$\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{81} = 1 - \text{каноническое уравнение эллипса с полу-}$$

осями $a=2$ и $b=9$.

Найдем координаты центра эллипса.

$O''(0, 0)$ – центр эллипса в канонической системе координат.

Выразим координаты x , y через координаты x'' и y''

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3(x'' - 3) - (y'' - 4)) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'' - 3 + 3(y'' - 4)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'' - 9 - y'' + 4) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'' - 3 + 3y'' - 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'' - y'' - 5) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'' + 3y'' - 15) \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'' - y'' - 5) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'' + 3y'' - 15). \end{cases}$$

Найдем координаты центра эллипса в системе координат XOY .

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(0 - 0 - 5) = -\frac{5}{\sqrt{10}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(0 + 0 - 15) = -\frac{15}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

$O''\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}, -\frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ – координаты центра в XOY .

Построим эллипс (рис. 2.5).

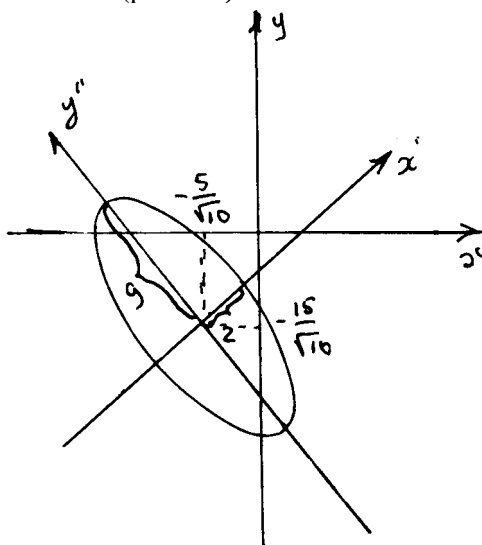


Рис. 2.5

Для этого на координатной плоскости поставим точку $O''\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}, -\frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ и через неё проведем оси $O''X''$ и $O''Y''$, которые направлены по векторам

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1), \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3). \end{cases}$$

Вершины эллипса A_1 и A_2 находятся на расстоянии 2 от точки O'' по оси $O''X''$ а вершины B_1 и B_2 – на расстоянии 9 от точки O'' по оси $O''Y''$.

Пример 2.16. Привести кривую 2-го порядка

$$9x^2 + y^2 + 18xy - 5x + 9y + 2 = 0$$

к каноническому виду и сделать чертеж.

Решение

$$1) 9x^2 + y^2 + 18xy - 5x + 9y + 2 = 0.$$

Выпишем квадратичную форму:

$$Q(x, y) = 9x^2 + y^2 - 6xy.$$

Матрица квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы. Для нахождения собственных значений составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -3 \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(9 - \lambda)(1 - \lambda) - 9 = 0;$$

$$9 - \lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 9 = 0;$$

$$\lambda^2 - 10\lambda = 0;$$

$$\lambda = 0 \text{ или } \lambda = 10.$$

Найдем соответствующие собственные векторы

$$a) \lambda = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{Разделим первую} \\ \text{строку на 3} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{К первой строке} \\ \text{прибавим вторую} \end{array} = \\ = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим следующее уравнение: $3x_1 - x_2 = 0$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2 :

$$\begin{cases} 3x_1 = x_2, \\ x_2 = c. \end{cases}$$

$$\bar{x}_{\lambda_1} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c = 3$, тогда $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$.

б) $\lambda = 10$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & | & 0 \\ -3 & -9 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Первую строку} \\ \text{разделим на } (-1), \\ \text{вторую разделим} \\ \text{на } (-3) \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Из второй строки} \\ \text{вычтем первую} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим следующее уравнение: $x_1 + 3x_2 = 0$.

x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное. Выразим x_1 через x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2, \\ x_2 = c. \end{cases}$$

$$\bar{x}_{\lambda_2} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c = 1$, тогда $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 10$.

2) Изобразим векторы $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на плоскости $ХОУ$ (рис. 2.6).

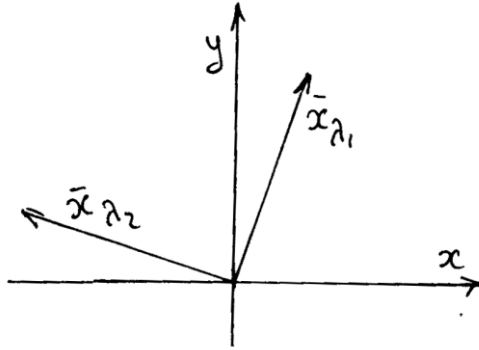


Рис. 2.6

Поворот от вектора $\bar{x}_{\lambda_1}$ к вектору $\bar{x}_{\lambda_2}$ идет против хода часовой стрелки. Значит, нумерация выбрана правильно.

Нормируем векторы $\bar{x}_{\lambda_1}$ и $\bar{x}_{\lambda_2}$:

$$|\bar{x}_{\lambda_1}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

$$|\bar{x}_{\lambda_2}| = \sqrt{10}.$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_{\lambda_1}}{|\bar{x}_{\lambda_1}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_{\lambda_2}}{|\bar{x}_{\lambda_2}|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид, причем на диагонали стоят соответствующие собственные значения:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$Q(x, y) = 10(y')^2.$$

Запишем матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, столбцами которой являются координаты найденных собственных векторов:

$$T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, а $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\bar{X}' = T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'} \bar{X}$ – формула преобразования координат при

преобразовании базиса, тогда $\bar{X} = T_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'}^{-1} \bar{X}'$;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} y' \\ \frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y'). \end{cases}$$

Подставим найденные выражения координат x, y через новые координаты x', y' в исходное уравнение кривой.

$$10(y')^2 - 5 \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y') + 9 \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y') + 2 = 0;$$

$$10(y')^2 - \frac{5}{\sqrt{10}} x' + \frac{27}{\sqrt{10}} x' + \frac{15}{\sqrt{10}} y' + \frac{9}{\sqrt{10}} y' + 2 = 0;$$

$$10(y')^2 + \frac{22}{\sqrt{10}} x' + \frac{24}{\sqrt{10}} y' + 2 = 0.$$

Выделим полный квадрат по y' :

$$10\left((y')^2 + \frac{24}{10\sqrt{10}}y'\right) + \frac{22}{\sqrt{10}}x' + 2 = 0;$$

$$10\left((y')^2 + \frac{12}{5\sqrt{10}}y'\right) + \frac{22}{\sqrt{10}}x' + 2 = 0;$$

$$10\left(\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{36}{250}\right) + \frac{22}{\sqrt{10}}x' + 2 = 0;$$

$$10\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{36}{25} + \frac{22}{\sqrt{10}}x' + 2 = 0;$$

$$10\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{14}{25} + \frac{22}{\sqrt{10}}x' = 0;$$

$$10\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{22}{\sqrt{10}}x' - \frac{14}{25};$$

$$10\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{22}{\sqrt{10}}\left(x' + \frac{\sqrt{10}}{22} \cdot \frac{14}{25}\right) \text{ разделим на } 10 -$$

$$\left(y' + \frac{6}{5\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{22}{10\sqrt{10}}\left(x' + \frac{7\sqrt{10}}{275}\right).$$

Перейдем к новой системе координат $X''O''Y''$, которая получается из системы координат $X'O'Y'$ параллельным переносом осей $O'X'$, $O'Y'$:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{7\sqrt{10}}{275} \\ y'' = y' + \frac{6}{5\sqrt{10}} \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x' = x'' - \frac{7\sqrt{10}}{275} \\ y' = y'' - \frac{6}{5\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$(y'')^2 = -\frac{22}{10\sqrt{10}}x'' - \text{каноническое уравнение параболы.}$$

Найдем координаты вершины параболы в системе координат XOY .

$O''(0, 0)$ – координаты вершины в канонической системе координат $X''O''Y''$.

Выразим координаты x и y через x'' и y'' :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(x'' - \frac{7\sqrt{10}}{275} - 3 \left(y'' - \frac{6}{5\sqrt{10}} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left(x'' - 3y'' + \frac{92\sqrt{10}}{275} \right); \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(3x'' - \frac{21\sqrt{10}}{275} + y'' - \frac{6}{5\sqrt{10}} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left(3x'' + y'' - \frac{54\sqrt{10}}{275} \right).
 \end{aligned}$$

$O''(0, 0)$ – вершина параболы $X''O''Y''$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(0 - 0 + \frac{92\sqrt{10}}{275} \right) = \frac{92}{275}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(0 + 0 - \frac{54\sqrt{10}}{275} \right) = -\frac{54}{275}. \end{cases}$$

Тогда $O''\left(\frac{92}{275}; -\frac{54}{275}\right)$ – координаты вершины параболы в XOY .

Сделаем чертеж. Для этого на координатной плоскости поставим точку $O''\left(\frac{92}{275}; -\frac{54}{275}\right)$ и проведем через нее оси $O''X''$, $O''Y''$ которые направлены по векторам:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1) \end{cases}$$

и нарисуем параболу в канонической системе координат $X''O''Y''$ (рис. 2.7).

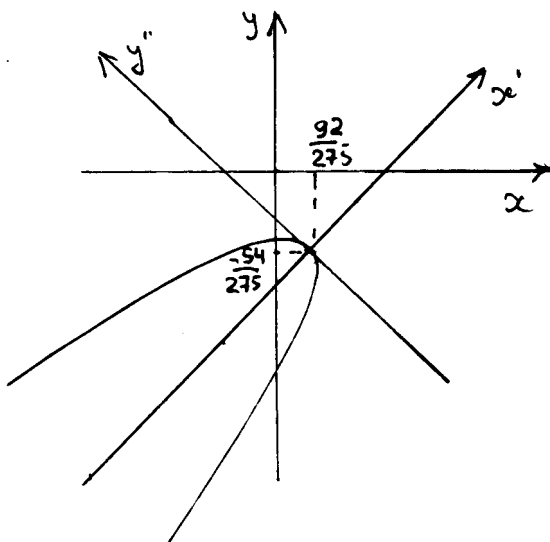


Рис. 2.7

2. 9. Домашнее задание

Для получения варианта домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 2.1, заполнить первую строку табл. 2.2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2.1. Например, Ваш вариант 11.14. Тогда по табл. 2.1 имеем:

11	B	D	F	K	M	A	C	G
----	---	---	---	---	---	---	---	---

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2.1 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты							
	B	D	F	K	M	A	C	G
14	5	1	3	-6	6	2	9	3

Таблица 2.1

Порядок следования коэффициентов

Группа	Коэффициенты
--------	--------------

1	A	B	C	D	K	M	F	G
2	C	D	K	F	M	A	B	G
3	M	K	D	C	B	F	A	G
4	B	A	C	K	D	F	M	G
5	C	D	A	M	F	K	B	G
6	D	K	B	A	M	C	F	G
7	K	M	C	F	A	B	D	G
8	M	F	D	A	C	K	B	G
9	F	M	D	K	C	B	A	G
10	A	D	C	M	F	K	B	G
11	B	D	F	K	M	A	C	G
12	C	D	K	M	F	A	B	G
13	D	K	M	F	A	B	C	G
14	K	F	M	A	B	C	D	G
15	M	A	B	C	D	K	F	G
16	F	M	K	D	C	B	A	G
17	D	K	M	F	A	B	C	G

Таблица 2.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты							
								G
1	-2	1	4	5	3	-6	7	2
2	3	-2	1	-5	7	2	4	3
3	5	-3	4	1	2	-8	6	1
4	4	3	-2	1	6	3	5	2
5	8	-9	4	2	1	6	-2	1
6	3	4	-5	1	-3	5	7	2
7	2	4	5	7	8	-9	1	3
8	5	1	3	-2	6	-8	-6	1
9	1	4	-3	2	9	-6	7	2
10	5	7	3	-6	1	-2	4	1
11	1	3	-5	2	6	4	9	2
12	9	-4	-1	-8	-3	6	5	1
13	2	-3	9	4	1	7	3	2
14	5	1	3	-6	6	2	9	3
15	-4	-1	-8	9	-5	2	7	1

16	2	-3	3	1	-6	5	-1	2
17	-5	-4	2	4	-1	6	7	1
18	3	1	5	6	-4	2	9	2
19	2	4	-3	-5	-6	-5	8	1
20	1	-2	-7	8	3	5	-4	2
21	-8	-3	-1	6	4	1	-5	3
22	-2	-4	5	3	-6	7	6	1
23	1	9	-6	4	-2	-3	-1	2
24	3	-5	-1	3	6	-4	2	1
25	-1	-3	-6	4	1	-5	-4	2
26	9	-4	3	-5	2	1	6	2
27	7	6	-1	2	-3	8	-5	1
28	4	-1	5	-6	-4	7	3	3
29	-1	9	-3	-5	6	-8	2	1
30	2	1	9	3	-4	-1	6	2

Условие домашнего задания

Задача 1. Даны матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 2A & F & K \\ -A & -B & M \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} -C & B & -D \\ M & K & M \\ A & F & -B \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} C & -B & F \\ D & A & K \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $FI + MJ + E$, где F, N – числа из условия, E – единичная матрица;

2) $IJ - JI$;

3) HI ;

4) J^{-1} ;

5) $JX = I$ (если $\det J = 0$, то $IX = J$);

6) $XJ = I$ (если $\det J = 0$, то $XI = J$).

Задача 2. Решить системы уравнений:

$$\begin{aligned}
1) & \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = K, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = G, \\ 3Ax_1 + (B + K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = D, \\ -3Ax_1 - (B + K)x_2 - (F + C)x_3 - (M + D)x_4 = A; \end{cases} \\
2) & \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0, \\ 2Ax_1 + Kx_2 + Fx_3 + Mx_4 = 0, \\ 3Ax_1 + (B + K)x_2 + Fx_3 + Ax_4 = 0, \\ -3Ax_1 - (B + K)x_2 - (F + C)x_3 - (M + D)x_4 = 0; \end{cases} \\
3) & \begin{cases} 2Mx_1 + 2Gx_2 + (K - C + A)x_3 + Bx_4 = C, \\ -3Mx_1 + Bx_2 + Cx_3 + Ax_4 = G, \\ -2Mx_1 + (B + G)x_2 + Ax_3 + Fx_4 = B, \\ Mx_1 + Gx_2 + Kx_3 + Dx_4 = A; \end{cases} \\
4) & \begin{cases} 2Mx_1 + 2Gx_2 + (K - C + A)x_3 + Bx_4 = 0, \\ -3Mx_1 + Bx_2 + Cx_3 + Ax_4 = 0, \\ -2Mx_1 + (B + G)x_2 + Ax_3 + Fx_4 = 0, \\ Mx_1 + Gx_2 + Kx_3 + Dx_4 = 0; \end{cases} \\
5) & \begin{cases} Dx_1 + Cx_2 + Ax_3 + Fx_4 = A, \\ 2Dx_1 + 2Cx_2 + Bx_3 + Kx_4 = M, \\ -3Dx_1 - 3Cx_2 + Bx_3 + Mx_4 = G; \end{cases} \\
6) & \begin{cases} Dx_1 + Cx_2 + Ax_3 + Fx_4 = 0, \\ 2Dx_1 + 2Cx_2 + Bx_3 + Kx_4 = 0, \\ -3Dx_1 - 3Cx_2 + Bx_3 + Mx_4 = 0; \end{cases} \\
7) & \begin{cases} Ax_2 + Dx_3 + Cx_4 = F, \\ Bx_1 + Fx_2 - Kx_4 = M; \end{cases} \\
8) & \begin{cases} Ax_2 + Dx_3 + Cx_4 = 0, \\ Bx_1 + Fx_2 - Kx_4 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора, а так же мат-

рицу линейного оператора в базисе из собственных векторов (вариант зависит от G):

$$- \text{если } G = 1, \text{ то } A = \begin{pmatrix} A & F & 0 \\ F & A & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix};$$

$$- \text{если } G = 2, \text{ то } A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & D & K \\ 0 & K & D \end{pmatrix};$$

$$- \text{если } G = 3, \text{ то } A = \begin{pmatrix} C & K & 0 \\ K & C & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду, сделать чертеж. Уравнение кривой:

– если $G = 1$, то

$$P^2(D^2M^2 - F^2)x^2 + P^2(D^2 - M^2F^2)y^2 + 2MP^2(D^2 + F^2)xy + 2P(CF^2 - AMD^2)x + 2P(-AD^2 - CMF^2)y + A^2D^2 - C^2F^2 - F^2D^2 = 0;$$

– если $G = 2$, то

$$P^2(D^2M^2 + F^2)x^2 + P^2(D^2 + M^2F^2)y^2 + 2MP^2(D^2 - F^2)xy - 2P(CF^2 + AMD^2)x + 2P(AD^2 - CMF^2)y + A^2D^2 + C^2F^2 - F^2D^2 = 0;$$

– если $G = 3$, то

$$A^2x^2 + B^2y^2 + 2ABxy + Kx + Dy + F = 0;$$

$$\text{Здесь } P = \frac{1}{\sqrt{M^2 + 1}}.$$

2.10. Вопросы для самопроверки

1) Даны матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $A + B$;

- 2) $2A + E$;
- 3) A^{-1} ;
- 4) $AX = B$;
- 5) $XA = B$.

2) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & -7 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$;

4) Записать формулы Крамера.

5) Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = -4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x + y + 2z = 7 \end{cases}$

6) Сформулировать критерий совместности системы линейных уравнений.

7) Написать формулу нахождения обратной матрицы.

8) Найти ранг и ортонормированный базис системы векторов: $\bar{a}_1 = (1; 1; 3; 1)$, $\bar{a}_2 = (3; -1; 2; 4)$, $\bar{a}_3 = (2; 2; 7; -1)$.

9) Найти координаты вектора $\bar{a}(-1, 2, 1)$ в базисе $\{(1, 0, 1); (1, 1, -1); (0, 0, 2)\}$.

10) Дать определение евклидова пространства, скалярного произведения и нормы в евклидовом пространстве.

11) Дать определение самосопряженного линейного оператора. Сформулировать свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженного линейного оператора

12) Построить ортонормированный базис подпространства, образованного всевозможными линейными комбинациями векторов $\bar{a}_1 = (1; 1; -1; -2)$, $\bar{a}_2 = (5; 8; -2; -3)$, $\bar{a}_3 = (3; 9; 3; 8)$.

13) Найти матрицу перехода от базиса $B \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2 \}$ к базису $B' \{ \bar{e}_1', \bar{e}_2' \}$, если $\bar{e}_1 = (1; 2)$, $\bar{e}_2 = (3; -1)$, $\bar{e}_1' = (6; 9)$, $\bar{e}_2' = (11; -8)$.

14) Дано: $A\bar{x} = \{x_3 - 2x_2 + 4x_3; x_1 - x_2; x_3 + 2x_2\}$,

$$B\bar{x} = \{4x_3; x_1; 2x_2\}, \text{ где } \bar{x}(x_1, x_2, x_3).$$

Доказать, что данные операторы являются линейными, и найти $(A+B)\bar{x}$.

15) Дано: $A\bar{x} = \{2x_2 + x_3; 3x_1 - 4x_2; x_1 - x_2\}$,

$$B\bar{x} = \{x_1 + x_3; x_2; 2x_1\}, \text{ где } \bar{x}(x_1, x_2, x_3)$$

Доказать, что данные операторы являются линейными, и найти $(AB)\bar{x}$.

16) Доказать линейность и найти матрицу оператора проектирования на плоскость $2x+3y-4z+3=0$ (в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$).

17) Доказать линейность и найти матрицу оператора зеркального отображения относительно плоскости $x-z=0$ (в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$).

18) Дать определение ортогональных и ортонормированных систем векторов в евклидовом пространстве. Написать неравенство Коши-Буняковского и неравенство Минковского.

19) Дать определение линейного оператора, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

20) Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

21) Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, найти каноническую систему координат и нарисовать эту кривую в данной системе координат.

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0.$$

22) Дать определения билинейной и квадратичной формы.

23) Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ имеет канонический вид, и записать форму в найденном ОНБ.

2.11. Типовой вариант контрольной работы

По теме “ Линейная алгебра”.

1) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1} .

2) Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти произведение $A \cdot B$.

или

2) Найти значение многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 2$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Решить матричное уравнение $XA = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Линейный оператор A в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \text{ Найти матрицу этого оператора в базисе:}$$

$$\{\bar{e}_1 = (1; 3), \bar{e}_2 = (1; 4)\}.$$

5) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

или

5) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

6) Проверить ортогональность системы векторов в пространстве R^4 : $\bar{a}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\bar{a}_2 = (3, 2, 1, -3)$, и дополнить ее до ортогонального базиса.

7) Доказать линейность и найти матрицу оператора зеркального отображения относительно плоскости $x-z=0$ (в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$).

8) Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить её тип, найти каноническую систему координат, построить эту кривую $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$

или

8) Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ имеет канонический вид, и записать форму в найденном ОНБ.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Беклимишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Высшая школа, 1987.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: Высшая школа. 1999,

Ефимов А.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.

Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.1. – М.: Наука, 1995.