6.12. Двойной интеграл

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой ограниченной замкнутой области D плоскости XOY. Разобьем область D произвольным образом на n областей, пересекающихся только по границе, и будем называть эти области частичными областями. Пронумеровав получившиеся частичные области в произвольном порядке, обозначим их $D_1, D_2, ..., D_n$, а их площади $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Диаметром такой частичной области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области. Диаметры частичных областей $D_1, D_2, ..., D_n$ обозначим через $d_1, d_2, ..., d_n$, а наибольший из диаметров частичных областей обозначим d, то есть $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. В каждой частичной области выберем по произвольной точке $P_i(x_i, y_i) \in D_i$.

Интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ по области D называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i .$$

Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения области D на частичные области и выбора точек $P_i(x_i, y_i) \in D_i$, то есть

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i .$$

Двойной интеграл обозначается следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dxdy \text{ или } \iint_D f(x, y) dS .$$

Здесь dS - дифференциал площади, область D- область интегрирования, выражение $f(x,y)dS$ - подынтегральное выражение.

Если функция $f(x,y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ , а снизу областью D плоскости XOY.

Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она интегрируема в этой области.

Свойства двойного интеграла

1. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в некоторой области D, то для любых чисел $\alpha, \beta \in \Re$ функция $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$ также интегрируема в области D и

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dS = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dS + \beta \iint\limits_D g(x,y)dS .$$

2. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в некоторой области D. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, которые не имеют общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS .$$

3. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в некоторой области D и во всех точках этой области выполняется неравенство $f(x,y) \geq g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS \geq \iint\limits_D g(x,y)dS\ .$$

4. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в некоторой области D и ограничена в этой области, причем $m \leq f(x,y) \leq M$, то

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dS \leq MS\ ,$$

где S –площадь области D.

5. Теорема о среднем значении.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то существует, по крайней мере, одна точка $P_c(x_c, y_c) \in D$, такая что

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(x_c, y_c)S\ ,$$

где S-площадь области D.

Значение $f(x_c, y_c)$, определяемое данной формулой, называется *средним значением* функции $f(x,y)$.

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов.

1.Если область D ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу и сверху непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, каждая из которых пресекается с вертикальной прямой $x = c\ (a \leq c \leq b)$ только в одной точке (рис. 6.23), причем $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ на $[a, b]$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ .$$

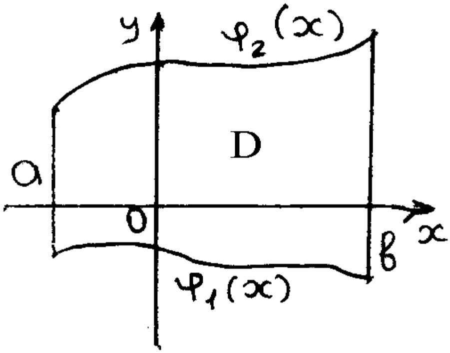

Рис. 6.23

В этом случае будем называть область элементарной по x

Пределы внутреннего интеграла переменные, они указывают границы изменения переменной интегрирования y при постоянном значении второго аргумента x. Пределы внешнего интеграла постоянны, они указывают границы, в которых может изменяться аргумент x.

Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов. Заметим, что сначала вычисляем внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по переменной y, считая переменную x константой, а затем полученный результат интегрируем по x на отрезке $[a, b]$.

2.Если область D снизу и сверху ограничена прямыми $y = a$ и $y = b$, а слева и справа непрерывными кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$, каждая из которых пересекается с горизонтальной прямой $y = d\ (a \le d \le b)$ только в одной точке (рис. 6.24), причем $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ на $[a, b]$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

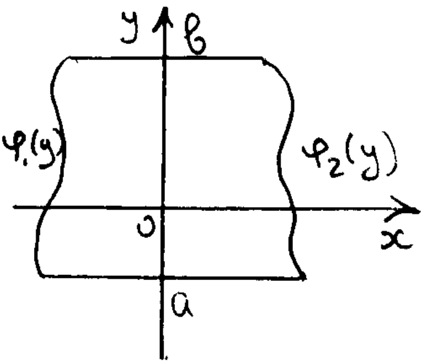

Рис. 6.24

В этом случае будем называть область элементарной по y.

Здесь сначала вычисляем внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$, по переменной x, считая переменную y константой, а затем полученный результат интегрируем по y на отрезке $[a, b]$.

3.Если область интегрирования не принадлежит ни к одному из разобранных выше видов, то ее разбиваем на части (элементарные области), каждая из которых относится к одному из этих двух видов. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy,$$

где D_i – элементарные области, на которые разбивается область D.

Формулы приведения двойного интеграла к повторному интегралу имеют особенно простой вид в случае, когда область D является прямоугольником со сторонами параллельными осям координат. В этом случае становятся постоянными пределы не только внешнего, но и внутреннего интегралов.

Например, если область D – прямоугольник со сторонами $x = a, x = b\ (a < b), y = c, y = d\ (c < d)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx .$$

Замена переменных в двойном интеграле

1. *Двойной интеграл в криволинейных координатах.*

Пусть непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка функции $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ осуществляют взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное отображение области D плоскости XOY на область S плоскости $UO'V$. *Якобианом* функций $x(u,v)$ и $y(u,v)$ называется определитель, составленный из частных производных этих функций:

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Заметим, что $I \neq 0$.

Тогда для преобразования двойного интеграла, заданного в декартовых координатах, в двойной интеграл в криволинейных координатах пользуются формулой:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v))\,|\,I\,|\,dudv .$$

2. *Полярные координаты.*

В некоторых случаях вычисление двойного интеграла упростится, если перейти к полярной системе координат.

В полярной системе координат координаты точки M на плоскости определяются двумя числами r и φ, где

r- радиус-вектор точки M, $r \geq 0$;

φ - угол между радиус-вектором точки M и положительным направлением оси OX, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Полярные координаты связаны с декартовыми координатами, следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\,cos\varphi, \\ y = r\,sin\varphi. \end{cases}$$

В этом случае якобиан отображения:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_S rf(x(r\cos\varphi,r\sin\varphi),y(r\cos\varphi,r\sin\varphi))drd\varphi\,.$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, так же как и в декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным r и φ.

Если область интегрирования D ограничена лучами $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$ и кривыми $r=r_1(\varphi)$ и $r=r_2(\varphi)$, каждую из которых любой луч, выходящий из начала координат, пересекает не более чем в одной точке и $r_1(\varphi)\le r_2(\varphi)$ (рис. 6.25), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\ f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)dr\,.$$

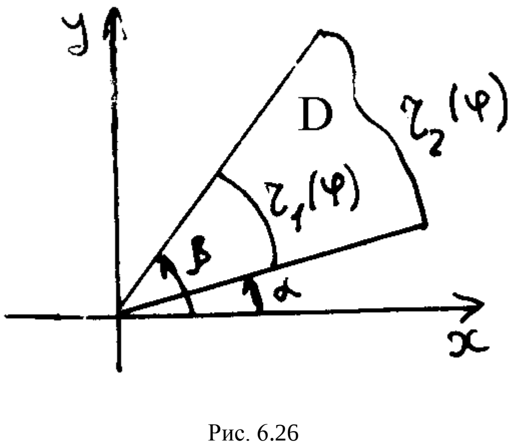

Рис. 6.26

3. *Обобщенные полярные координаты.*

Иногда удобнее перейти к обобщенной полярной системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x = a\,r\,cos\varphi, \\ y = b\,r\,sin\varphi, \end{cases}$$, где $a > 0, b > 0, r \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

В этом случае якобиан равен $I = a \cdot b \cdot r$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\ f(a\,r\cos\varphi, b\,r\sin\varphi)dr\ .$$

Приложения двойного интеграла

1.Площадь плоской области D можно найти по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

2. Объем цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ , равен двойному интегралу от функции по области, являющейся основанием цилиндрического тела, то есть

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\ .$$

3.Пусть гладкая поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, тогда площадь части этой поверхности, проектирующейся в область D плоскости XOY, равна

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\ .$$

4.Если пластинка занимает область D плоскости XOY и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma(x,y)$, то масса этой пластинки может быть найдена с помощью двойного интеграла:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy\ ;$$

5.Статические моменты пластинки относительно осей OX и OY можно найти по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy\ ;$$

$$M_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy.$$

6.Координаты центра тяжести $(\bar{x}, \bar{y})$ пластинки равны:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

7.Моменты инерции пластинки относительно осей OX и OY можно найти по формулам:

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy;$$

$$I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy.$$

Момент инерции пластинки относительно начала координат (полярный момент инерции) равен:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy.$$

В случае однородной пластинки поверхностная плотность равна $\gamma(x,y)=1$.

Пример 6.22. Вычислить двойной интеграл

$\iint_D 6^{-2x-5y}\,dxdy$, где D: $1 \le x \le 3$; $-3 \le y \le -2$.

Решение

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.27).

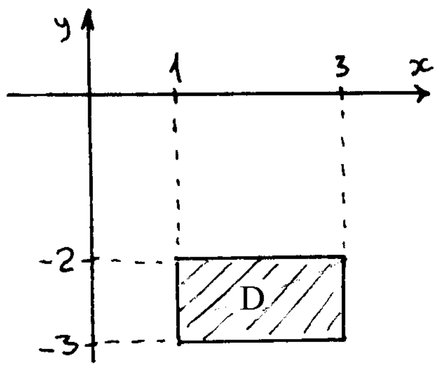

Рис. 6.27

Областью интегрирования является прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. В этом случае становятся постоянными пределы интегрирования внутреннего интеграла. Тогда

$$\iint_D 6^{-2x-5y}\,dxdy = \int_1^3 dx \int_{-3}^{-2} 6^{-2x-5y}\,dy = \int_1^3 dx \int_{-3}^{-2} 6^{-2x-5y}\left(\frac{d(-5y)}{-5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\int_1^3\left(\frac{6^{-2x-5y}}{ln\,6}\Bigg|_{-3}^{-2}\right)dx = -\frac{1}{5\ln 6}\int_1^3\left(6^{-2x+10} - 6^{-2x+15}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5\ln 6}\left(-\frac{1}{2}\frac{6^{-2x+10}}{\ln 6}\Bigg|_1^3 + \frac{1}{2}\frac{6^{-2x+15}}{\ln 6}\Bigg|_1^3\right) = \frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^{-6+10} - 6^{-2+10} - 6^{-6+15} + 6^{-2+15}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^4 - 6^8 - 6^9 + 6^{13}\right)}.$$

Пример 6.23. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (6x-5y)dxdy$, где D: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 8$.

Решение

Область интегрирования ограничена прямой $2x + 3y = 8$ и осями координат. Прямую $2x + 3y = 8$ построим по двум точкам: если $x = 0$, то $y = \frac{8}{3}$;

если $y = 0$, то $x = 4$;

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.28).

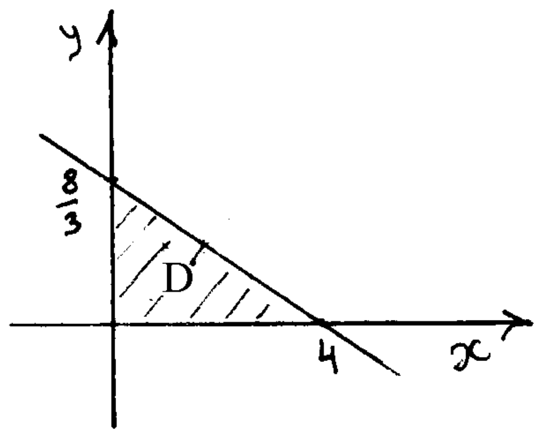

Рис. 6.28

Пределы интегрирования в данном интеграле можно расставить в любом порядке, так как область интегрирования является как элементарной по x , так и элементарной по y.

Расставим их в порядке dx, dy.

Переменная x изменяется в пределах от 0 до 4, а функции $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=\dfrac{8-2x}{3}$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, если $0\le x\le 4$. Любая прямая $x=c,(\ 0\le c\le 4)$, параллельная оси OY , пересекает каждую из границ области $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в одной точке. Тогда

$$\iint\limits_D(6x-5y)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\frac{8-2x}{3}}(6x-5y)dy=\int\limits_0^4\left(6xy-5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{8-2x}{3}}dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(2x(8-2x)-\frac{5}{2}\left(\frac{8-2x}{3}\right)^2\right)dx=\int\limits_0^4\left(16x-4x^2-\frac{5}{18}\left(64-32x+4x^2\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(16x-4x^2-\frac{160}{9}+\frac{80}{9}x-\frac{10}{9}x^2\right)dx=\int\limits_0^4\left(-\frac{160}{9}+\frac{224}{9}x-\frac{46}{9}x^2\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{160}{9}x+\frac{224}{9}\frac{x^2}{2}-\frac{46}{9}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\left(-\frac{160}{9}x+\frac{112}{9}x^2-\frac{46}{27}x^3\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=-\frac{640}{9}+\frac{1792}{9}-\frac{2944}{27}=\frac{5376-1920-2944}{27}=\mathbf{\frac{512}{27}}.$$

Пример 6.24. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x(y-3)dxdy$, где D: $y=x^2$, $x=-4y$.

Решение

Область интегрирования ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $x=-4y$. Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.29.).

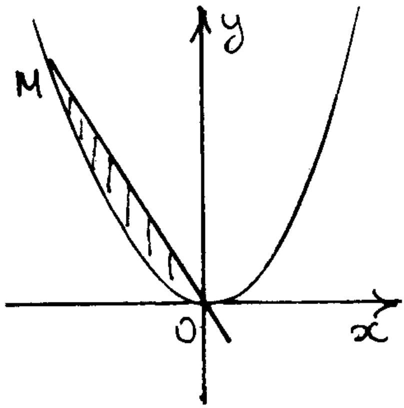

Рис. 6.29

Пределы интегрирования в данном интеграле можно расставить в любом порядке, так как область интегрирования является как элементарной по x , так и элементарной по y.

Расставим их в порядке dx ,dy.

Подставив $y=-\frac{x}{4}$ в уравнение параболы $y=x^2$, найдем точки пересечения параболы и прямой. Тогда имеем:

$$-\frac{x}{4}=x^2 \quad => \; x=0 \text{ или } x=-\frac{1}{4}.$$

Переменная x изменяется в пределах от $-\frac{1}{4}$ до 0, а функции $\varphi_1(x)=x^2$, $\varphi_2(x)=-\frac{x}{4}$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ при $0\le x\le 4$. Любая прямая $x=c,(-\frac{1}{4}\le c\le 0)$, параллельная оси OY, пересекает каждую из границ области $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в одной точке.

Тогда

$$\iint_D x(y-3)dxdy=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dx\int_{x^2}^{-\frac{1}{4}x}x(y-3)dy=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dx\int_{x^2}^{-\frac{1}{4}x}(xy-3x)dy=$$

$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left(\frac{xy^2}{2}-3xy\right)\Bigg|_{x^2}^{-\frac{1}{4}x}dx=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left(\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}x\right)^2-3x\left(-\frac{1}{4}x\right)-\frac{x}{2}\left(x^2\right)^2+3x\left(x^2\right)\right)dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left(\frac{x^3}{32}+\frac{3}{4}x^2-\frac{x^5}{2}+3x^3\right)dx=\left(\frac{x^4}{4\cdot 32}+\frac{3}{4\cdot 3}x^3-\frac{x^6}{12}+\frac{3x^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{0}=$$

$$=-\frac{1}{4^4\cdot 4\cdot 32}+\frac{3}{4^3\cdot 4\cdot 3}+\frac{1}{12\cdot 4^6}-\frac{3}{4\cdot 4^4}=\frac{1}{4^5}\left(-\frac{1}{32}+4+\frac{1}{48}-3\right)=$$

$$=\frac{1}{4^5}\cdot\frac{95}{96}=\mathbf{\frac{95}{98304}}.$$

Пример 6. 27. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ двумя способами, если

$$D\colon y=4x,\ \ x+y=1,\ \ x+y=16,\ \ y=25x.$$

Решение

Изобразим на координатной плоскости область интегрирования (рис. 6.30).

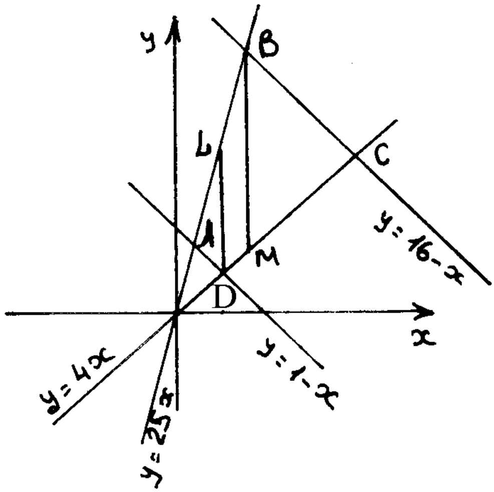

Рис. 6.30

Область интегрирования не является элементарной ни по x ни по y.

Найдем координаты точек пересечения прямых:

а) Координаты точки A – точки пересечения прямой $y=1-x$ и прямой $y=25x$ найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=1-x \\ y=25x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x=1-x \\ y=25x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{26} \\ y=\dfrac{25}{26} \end{cases}.$$

Тогда координаты точки $A\left(\dfrac{1}{26}, \dfrac{25}{26}\right)$.

б) Координат точки B – точки пересечения прямой $y=16-x$ и прямой $y=25x$ найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=16-x \\ y=25x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x=16-x \\ y=25x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{26} \\ y=\dfrac{200}{13} \end{cases}.$$

Тогда координаты точки $B\left(\dfrac{8}{13}, \dfrac{200}{13}\right)$.

в) Координат точки C – точки пересечения прямой $y=16-x$ и прямой $y=4x$ найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=16-x \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=16-x \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{5} \\ y=\dfrac{64}{5} \end{cases}.$$

Тогда координаты точки $C\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{64}{5}\right)$.

д) Координат точки D – точки пересечения прямой $y=1-x$ и прямой $y=4x$ найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=1-x \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=1-x \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Тогда координаты точки $D\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

Разобьем область на области, элементарные по переменной *x*. Для этого проведем через точки *D* и *B* прямые, параллельные оси *OY*. Получим три элементарных области: треугольник *ALD*, четырехугольник *LBMD* и треугольник *BMC* (см. рис. 6.30). Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Delta ALD} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{LBMD} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\Delta BMC} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{26}}^{\frac{1}{5}}dx\int\limits_{1-x}^{25x} f(x,y)dy+\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{8}{13}}dx\int\limits_{4x}^{25x} f(x,y)dy+\int\limits_{\frac{8}{13}}^{\frac{16}{5}}dx\int\limits_{4x}^{16-x} f(x,y)dy\ .$$

Расставим пределы интегрирования вторым способом.

Разобьем область на области, элементарные по переменной *y*. Для этого через точки *A* и *C* проведем прямые, параллельные оси *OX*. Получим три элементарных области: треугольник *AND*, четырехугольник *AFCN* и треугольник *BFC* (рис. 6.31).

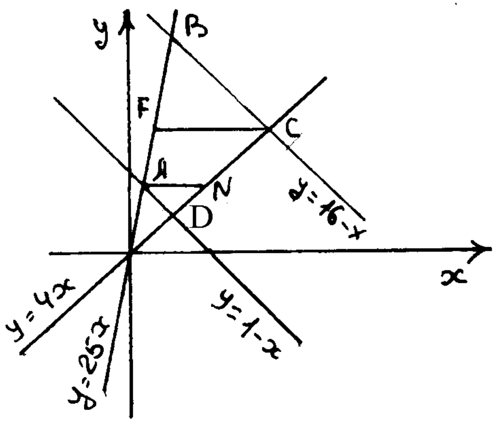

Рис. 6.31

Из уравнений заданных в условии прямых выразим x как функцию переменной y:

$$x=\frac{1}{4}y;\ x=\frac{1}{25}y;\ x=16-y;\ x=1-y, \text{ тогда}$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Delta AND} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{AFCN} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\Delta BFC} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{\frac{4}{5}}^{\frac{25}{26}}dy\int\limits_{1-y}^{\frac{1}{4}y}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{25}{26}}^{\frac{64}{5}}dy\int\limits_{\frac{1}{25}y}^{\frac{1}{4}y}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{64}{5}}^{\frac{200}{13}}dy\int\limits_{\frac{1}{25}y}^{16-y}f(x,y)dx.$$

Пример 6. 28. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ двумя способами, если

$$D:\begin{cases} y^2\le -2(x+5),\\ (x+5)^2+y^2=9. \end{cases}$$

Решение

Область интегрирования ограничена параболой $y^2=-2(x+5)$ и окружностью $(x+5)^2+y^2=9$. Вершина параболы находится в точке $M(-5,\ 0)$, ось симметрии – ось OX, ветви параболы направлены влево. Центр окружности находится в точке $M(-5,\ 0)$, радиус окружности равен 3.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.32.).

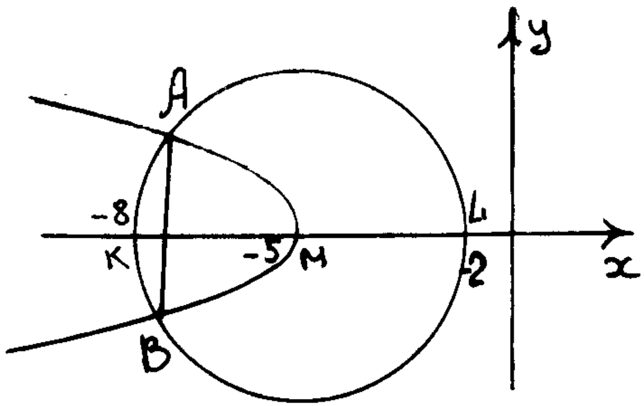

Рис. 6.32

Найдем координаты точек пересечения окружности и параболы. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = -2(x+5) \\ (x+5)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5 = -\dfrac{y^2}{2} \\ \dfrac{y^4}{4} + y^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5 = -\dfrac{y^2}{2} \\ y^4 + 4y^2 - 36 = 0, \end{cases}$$

Решим уравнение $y^4 + 4y^2 - 36 = 0$.

Сделаем замену: $y^2 = t$, где $t \geq 0$ и решим квадратное уравнение:

$t^2 + 4t - 36 = 0$,

$D = 16 + 4 \cdot 36 = 160$, тогда корни данного уравнения:

$t_1 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{10}}{2}$; $t_2 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{10}}{2}$.

Решение $t_2 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{10}}{2}$ нам не подходит, так как у нас $t_2 < 0$.

Следовательно, $t_1 = -2 + 2\sqrt{10}$ => $y = \pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{10}}$.

Найдем переменную x из условия $x+5=-\frac{y^2}{2}$.

Тогда $x+5=-\frac{-2+2\sqrt{10}}{2}$ => $x+5=1-\sqrt{10}$ => => $x=-4-\sqrt{10}$.

Следовательно, точки $A\left(-4-\sqrt{10}, \sqrt{-2+2\sqrt{10}}\right)$ и $B\left(-4-\sqrt{10}, \sqrt{-2+2\sqrt{10}}\right)$ - точки пересечения параболы $y^2=-2(x+5)$ с окружностью $(x+5)^2+y^2=9$.

Расставим пределы интегрирования в порядке dx, dy.

Данная область не является элементарной по переменной x. Разобьем ее на две области, каждая из которых будет элементарной по x. Для этого через точку A проведем прямую, параллельную оси OY. В результате получим 2 элементарные области: AKB и ABM (см. рис. 6.32).

Из уравнения окружности и уравнения параболы выразим y как функцию переменной x.

Из уравнения параболы:

$y^2=-2(x+5)$ => $y=\pm\sqrt{-2x-10}$.

Из уравнения окружности:

$(x+5)^2+y^2=9$ => $y^2=9-(x+5)^2$ => $y=\pm\sqrt{9-(x+5)^2}$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{AKB} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{ABM} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-8}^{-\sqrt{10}-4} dx \int\limits_{-\sqrt{9-(x+5)^2}}^{\sqrt{9-(x+5)^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-\sqrt{10}-4}^{-5} dx \int\limits_{-\sqrt{-2x-10}}^{\sqrt{-2x-10}} f(x,y)dy.$$

Расставим пределы интегрирования вторым способом.

Данная область является элементарной по переменной y. Из уравнения окружности и уравнения параболы выразим x, как функцию переменной y.

Из уравнения параболы:

$y^2=-2(x+5)$ => $(x+5)=-\frac{y^2}{2}$ => $x=-5-\frac{y^2}{2}$,

Из уравнения окружности:

$(x+5)^2+y^2=9$ => $(x+5)^2=9-y^2$ => $x+5=\pm\sqrt{9-y^2}$.

У нас $x\le -5$, тогда $x+5=-\sqrt{9-y^2}$, а значит,

$x=-5-\sqrt{9-y^2}$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\sqrt{2\sqrt{10}-2}}^{\sqrt{2\sqrt{10}-2}}dy\int\limits_{-5-\sqrt{9-y^2}}^{-5-\frac{y^2}{2}}f(x,y)dx.$$

Пример 6. 29. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ двумя способами, если

$$D:\begin{cases}4y^2-25x^2=1,\\ x=6,\\ x=-8.\end{cases}$$

Решение

Область интегрирования ограничена гиперболой $4y^2-25x^2=1$ и прямыми $x=-8, x=6$. Вершины гиперболы-точки $A_1\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $A_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.33).

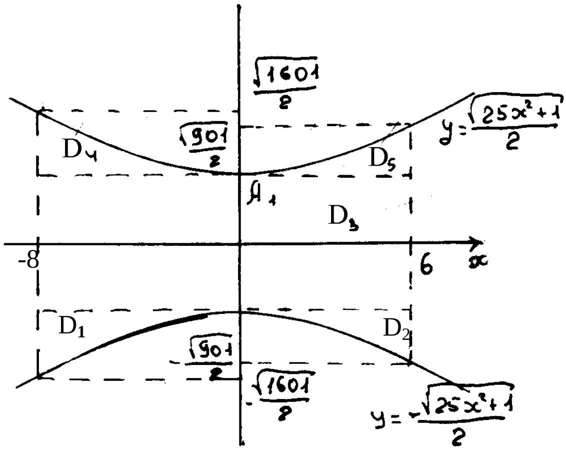

Рис. 6.33

Из уравнения гиперболы выразим y как функцию переменной x:

$$4y^2 = 25x^2 + 1 \Rightarrow y^2 = \frac{25x^2+1}{4} \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{25x^2+1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{25x^2+1}}{2}.$$

Область интегрирования является элементарной по переменной x. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-8}^{6} dx \int\limits_{-\frac{\sqrt{25x^2+1}}{2}}^{\frac{\sqrt{25x^2+1}}{2}} f(x,y)dy.$$

Расставим пределы интегрирования вторым способом.

Данная область не является элементарной по переменной y. Разобьем ее на области, каждая из которых является элементарной по y. Для этого через точки A_1 и A_2 проведем прямые, параллельные оси OX. Получим пять элементарных областей: D_1, D_2, D_3, D_4, и D_5 (рис. 6.33).

Из уравнения гиперболы выразим x как функцию переменной y:

$$4y^2 - 25x^2 = 1 \quad => \quad 25x^2 = 4y^2 - 1 \quad => \quad x = \frac{\pm\sqrt{4y^2-1}}{5}.$$

Найдем пределы интегрирования по переменной y:

Если $x = -8$, то $y = \pm\dfrac{\sqrt{25\cdot 64+1}}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{1601}}{2}$.

Если $x = 6$, то $y = \pm\dfrac{\sqrt{25\cdot 36+1}}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{901}}{2}$.

Тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy +$$

$$+\iint\limits_{D_4} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_5} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\frac{\sqrt{1601}}{2}}^{-\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-8}^{-\frac{\sqrt{4y^2-1}}{5}} f(x,y)dx +$$

$$+\int\limits_{-\frac{\sqrt{901}}{2}}^{-\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\frac{\sqrt{4y^2-1}}{5}}^{6} f(x,y)dx + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-8}^{6} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{1601}}{2}} dy \int\limits_{-8}^{-\frac{\sqrt{4y^2-1}}{5}} f(x,y)dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{901}}{2}} dy \int\limits_{\frac{\sqrt{4y^2-1}}{5}}^{6} f(x,y)dx.$$

Пример 6. 30. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+64y^2}\,dxdy$, где D: $x^2 + 64y^2 = 4$, $x^2 + 64y^2 = 25$.

Решение

Область интегрирования ограничена двумя эллипсами с центром в начале координат. Внутренний эллипс $x^2 + 64y^2 = 4$ имеет полуоси $a_1 = 2$, $b_1 = \dfrac{2}{8}$, полуоси внешнего эллипса $x^2 + 64y^2 = 25$ равны $a_2 = 5$, $b_2 = \dfrac{5}{8}$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.34):

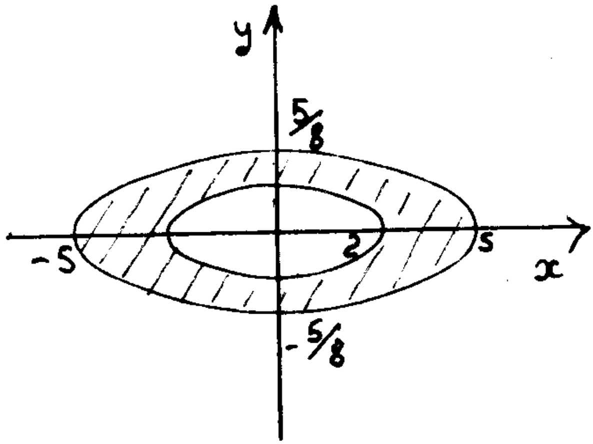

Рис. 6.34

Данный интеграл удобнее считать в обобщенных полярных координатах, так как в этом случае уравнения границы примут наиболее простой вид.

Пусть

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = \dfrac{1}{8} r\sin\varphi, \end{cases}$$

Тогда:

$$x^2 + 64y^2 = r^2\cos^2\varphi + 64\cdot\frac{1}{64}r^2\sin^2\varphi = r^2,$$

$$I = \frac{1}{8}r - \text{якобиан.}$$

Уравнение первого эллипса в обобщенных полярных координатах: $r = 2$, второго: $r = 5$. Угол φ изменяется в пределах от 0 до 2π.

Тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+64y^2}\,dxdy = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^5 \sqrt{r^2}\,r dr = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^5 r^2 dr = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_2^5\right)d\varphi$$

=

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8}\frac{125-8}{3}\left.\varphi\right|_0^{2\pi} = \frac{117}{24}2\pi = \boldsymbol{\frac{39}{4}\pi}.$$

Пример 6. 31. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy$, где D: $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=25x$, $y=0$, $y=\frac{1}{64}x$.

Решение

Область интегрирования ограничена двумя окружностями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=25x$ и прямыми $y=0$, $y=\frac{1}{64}x$.

Найдем координаты центра и радиусы данных окружностей.

В уравнении $x^2 + y^2 = 4x$ выделим полный квадрат по переменной *x:*

$$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$$

Тогда уравнение $x^2+y^2=4x$ задает окружность с центром в точке $O_1(2, 0)$ и радиусом равным 2.

В уравнении $x^2 + y^2 = 25x$ выделим полный квадрат по переменной *x:*

$$x^2-25x+y^2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{25}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2.$$

Тогда уравнение $x^2+y^2=25x$ задает окружность с центром в точке $O_1\left(\frac{25}{2},0\right)$ и радиусом равным $\frac{25}{2}$

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.35):

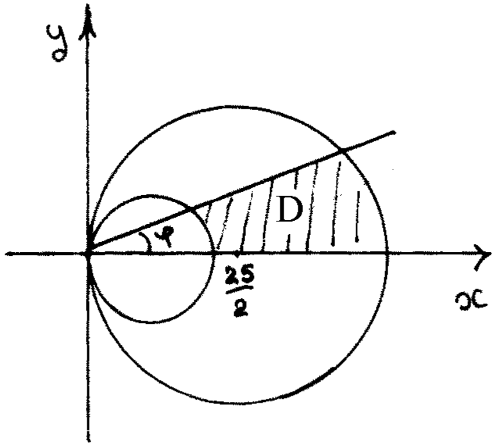

Рис. 6.35

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad I = r.$$

Угол φ изменяется в пределах от 0 до $arctg\,\dfrac{1}{64}$.

Запишем уравнения окружностей в полярных координатах:

а) в уравнение $x^2 + y^2 = 4x$ подставим $x = r\,cos\,\varphi, y = r\,sin\,\varphi$, тогда имеем

$$r^2\,cos^2\,\varphi + r^2\,sin^2\,\varphi = 4r\,cos\,\varphi \;\; => r^2 = 4r\,cos\,\varphi \;\; =>$$

$r = 4cos\,\varphi$ – уравнение первой окружности в полярных координатах;

б) в уравнение $x^2 + y^2 = 25x$ подставим $x = r\,cos\,\varphi, y = r\,sin\,\varphi$, тогда

$$r^2\,cos^2\,\varphi + r^2\,sin^2\,\varphi = 25r\,cos\,\varphi \;\; => \;\; r^2 = 25r\,cos\,\varphi \;\; =>$$

$r = 25cos\,\varphi$ – уравнение второй окружности в полярных координатах.

Следовательно:

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{25\cos\varphi} r dr = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{4\cos\varphi}^{25\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} \left(\frac{625\cos^2\varphi}{2} - \frac{16\cos^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{609}{2} \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{609}{2} \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{609}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}} =$$

$$= \frac{609}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{64} + (\sin\varphi\cos\varphi)\Big|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}}\right) = \frac{609}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{64} + (\operatorname{tg}\varphi\cos^2\varphi)\Big|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{64}}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{64}, \cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \\ \cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{64}\right)^2}, \cos^2\varphi = \dfrac{64^2}{4097} \end{array} \right| = \frac{609}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{64} + \frac{1}{64}\frac{64^2}{4097}\right) =$$

$$= \frac{609}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{64} + \frac{64}{4097}\right).$$

Пример 6. 32. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями D: $xy = 4$, $y = 25x$, $y = x$, $x \geq 0$.

Решение

Данная фигура ограничена гиперболой $xy = 4$ и прямыми $y = 25x$, $y = x$.

Изобразим фигуру на координатной области (рис. 6.36):

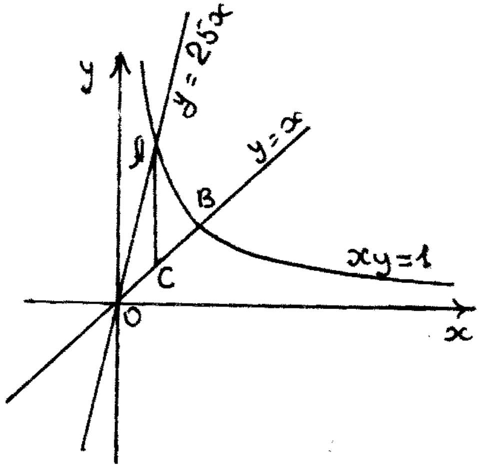

Рис. 6.36

Для нахождения площади получившейся фигуры воспользуемся формулой:

$$S = \iint\limits_D dxdy\,.$$

Данная область не является элементарной ни по переменной *x*, ни по переменной *y*.

Разобьем ее на две области, элементарные по переменной *x*. Для этого из точки *A* проведем прямую, параллельную оси *OY*. Получим две элементарные области: *OAC* и *ACB*.

Найдем координаты точек пересечения гиперболы и прямых.

Координаты точки *A* найдем, решив систему:

$$\begin{cases} y = 25x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 25x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 = 1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{5} \\ y = \pm 5 \end{cases}$$

Так как у нас $x \ge 0$ => $x = \dfrac{1}{5}$, значит, координаты точки $A\left(\dfrac{1}{5}, 5\right)$.

Координаты точки B найдем, решив систему:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1,1).$$

Тогда

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{5}} dx \int\limits_x^{25x} dy + \int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} dx \int\limits_x^{\frac{1}{x}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{5}} \left(y\Big|_x^{25x} \right) dx + \int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} \left(y\Big|_x^{1/x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{5}} (25x - x) dx + \int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \frac{24x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{5}} + \left(\ln|x| - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{\frac{1}{5}}^{1} = \frac{12}{25} +$$

$$+ \ln 1 - \ln\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = -\ln\frac{1}{5} = \mathbf{ln5}.$$

6.13. Тройной интеграл

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ определена в некоторой ограниченной замкнутой пространственной области V. Разобьем область V произвольным образом на n областей $V_1, V_2, ..., V_n$, пересекающихся только по границе, и будем называть эти области частичными областями. Пусть объемы этих областей равны соответственно $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$, а их диаметры (наибольшее из расстояний между двумя точками границы данной области) равны $d_1, d_2, ..., d_n$. В каждой частичной области выберем по произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$. Наибольший из диаметров частичных областей обозначим d.

Интегральной суммой для функции $u = f(x,y,z)$ по области V называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i .$$

Тройным интегралом от функции $u = f(x,y,z)$ по пространственной области V называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех частичных областей, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения области V на частичные области и от выбора точек $P_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$., то есть

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i .$$

Тройной интеграл обозначается следующим образом:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \text{ или } \iiint_V f(x,y,z)dV .$$

Свойства тройного интеграла

1. Если функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в пространственной области V, то для любых чисел $\alpha, \beta \in \Re$ функция $\alpha \cdot f(x,y,z) + \beta \cdot g(x,y,z)$ также интегрируема в области V и

$$\iiint_V (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)dV = \alpha \iiint_V fdV + \beta \iiint_V gdV .$$

2. Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема в пространственной области V . Если область интегрирования V разбита на две области V_1 и V_2, которые не имеют общих внутренних точек, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dV .$$

3. Если функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в пространственной области V и во всех точках этой области выполняется неравенство $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geq \iiint\limits_V g(x,y,z)dV .$$

4. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в пространственной области V и ограничена в этой области, причем $m \leq f(x,y,z) \leq M$, то

$$mV \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dV \leq MV ,$$

где V –объем данной области V.

5. Теорема о среднем значении.

Если функция $f(x,y,z)$непрерывна в замкнутой ограниченной пространственной области V , то существует, по крайней мере, одна точка $P_c(x_c, y_c, z_c) \in V$, такая что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(x_c, y_c, z_c)V ,$$

где V –объем данной области V.

Значение $f(x_c, y_c, z_c)$, определяемое данной формулой, называется средним значением функции $f(x,y)$.

Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

Вычисление тройного интеграла в декартовых прямоугольных координатах можно свести к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов. Если область интегрирования ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = \varphi_2(x, y)$ ($\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$), а с боков – прямым цилиндром, сечением которого плоскостью, параллельной плоскости *XOY* является область *D*, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

Вычисление начинаем с внутреннего интеграла $\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ по переменной *z*, считая переменные *x* и *y* константами, а затем вычисляем двойной интеграл по проекции области *V* на плоскость *XOY*.

Замена переменных в тройном интеграле

Пусть в тройном интеграле требуется перейти от переменных *x*, *y*, и *z* к переменным *u*, *v* и *w*, которые связаны с переменными *x*, *y*, и *z* соотношениями $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ и $z = z(u,v,w)$, причем функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ и $z(u,v,w)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и осуществляют взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное отображение области *V* пространства *XOYZ* на область V^* пространства $UO'VW$. Якобиан системы функций $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ и $z(u,v,w)$, составленный из частных производных этих функций равен:

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Тогда для преобразования тройного интеграла, заданного в декартовых координатах, в тройной интеграл в криволинейных координатах пользуются формулой:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|\,I\,|\,dudvdw$$

Цилиндрические координаты

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла упростится, если перейти к цилиндрической системе координат.

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве определяется тремя числами r, φ, z, где

φ – угол между положительным направлением оси OX и радиус-вектором проекции точки M на плоскость XOY, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

r – радиус-вектор проекции точки M на плоскость XOY, то есть r- расстояние от начала координат до точки M_1, являющейся проекцией точки M на плоскость XOY ($r = \left|\overline{OM_1}\right|$, $0 \le r < \infty$),

z – аппликата точки M (рис. 6.37).

Декартовы координаты связаны с цилиндрическими координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан в цилиндрической системе координат равен $I = r$.

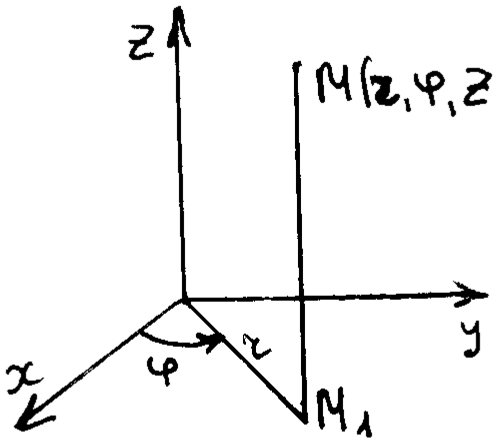

Рис. 6.37

Тогда формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Обобщенные цилиндрические координаты

Иногда удобнее перейти к обобщенной цилиндрической системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x = a\,r\,cos\varphi, \\ y = b\,r\,sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан данного отображения $I = a \cdot b \cdot r$.

Тогда формула преобразования тройного интеграла к обобщенным цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = ab\iiint\limits_{V^*} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi, z)r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Сферические координаты

В сферической системе координат положение точки M в пространстве определяется тремя числами r,φ,θ, где

φ – угол между положительным направлением оси OX и радиус-вектором проекции точки M на плоскость XOY, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

r – радиус-вектор точки M, то есть r – расстояние от точки M до начала координат $\left(r = \left|\overline{OM}\right|\right)$, $0 \le r < \infty$;

θ – угол между положительным направлением оси OZ и радиус-вектором точки M (лучом OM), $0 \le \theta \le \pi$(рис. 6.38).

Декартовы координаты связаны со сферическими координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

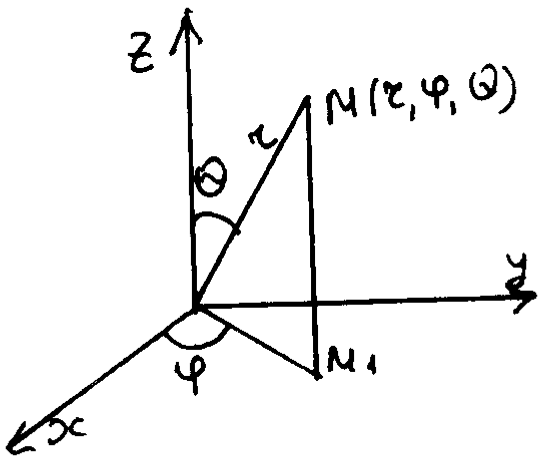

Рис. 6.38

Модуль якобиана в сферической системе координат

$|I| = r^2 \sin\theta$.

Тогда формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} r^2 \sin\theta \; f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,d\varphi\, d\theta\, dr.$$

Особенно удобно применение сферических координат, когда область интегрирования шар с центром в начале координат или шаровое кольцо, так как в сферической системе координат

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Например, если область интегрирования шаровое кольцо, ограниченное сферами радиусов R_1 и R_2, тогда пределы интегрирования в тройном интеграле в сферической системе координат следует расставить так:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)dr.$$

Обобщенные сферические координаты

Иногда удобнее перейти к обобщенной сферической системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x = a\, r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\, r\, \sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\, r\cos\theta. \end{cases}$$

Модуль якобиана в обобщенной сферической системе координат равен $|I| = a \cdot b \cdot c \cdot r^2 \sin\theta$.

Тогда формула преобразования тройного интеграла к обобщенным сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= abc\iiint_{V^*} r^2 \sin\theta \ f(a\, r \cos\varphi \sin\theta, b\, r \sin\varphi \sin\theta, c\, r \cos\theta)d\varphi\, dr\, d\theta.$$

Особенно удобно применение обобщенных сферических координат, когда область интегрирования эллипсоид с центром в начале координат, так как в обобщенных сферических координатах

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 .$$

Применение тройного интеграла

1. Объем пространственной области V равен:

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

2. Масса тела, занимающего область V и имеющего переменную плотность $\gamma(x,y,z)$, может быть найдена с помощью тройного интеграла:

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz \ ;$$

3.Статические моменты тела относительно координатных плоскостей $XOY, YOZ, X\,OZ$ можно найти по формулам:

$$M_{XY} = \iiint_V z\gamma(x,y,z)dxdydz \ ;$$

$$M_{YZ} = \iiint_V x\gamma(x,y,z)dxdydz \ ;$$

$$M_{XZ} = \iiint_V y\gamma(x,y,z)dxdydz \ .$$

4.Координаты центра тяжести $(\bar{x},\bar{y})$ тела определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_{XZ}}{m} \ ; \ \bar{z} = \frac{M_{XY}}{m} .$$

5.Моменты инерции относительно осей OX , OY, OZ можно найти по формулам:

$$I_X = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz \quad ;$$

$$I_Y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz \, ;$$

$$I_Z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz \, .$$

В случае однородной пластинки $\gamma(x,y,z)=1$.

Пример 6.34. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt[6]{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где V: $x^2+y^2+z^2=64$; $x^2+y^2+z^2=25$; $x \le 0$; $y \le 0$, $z \le 0$.

Решение

Данное тело ограничено сферами $x^2+y^2+z^2=64$ и $x^2+y^2+z^2=25$, радиусы которых равны 8 и 5 соответственно, и координатными плоскостями.

Так как $x \le 0$, $y \le 0$, $z \le 0$, то область интегрирования представляет собой $\frac{1}{8}$ часть сферического кольца.

В проекции на плоскость XOY получим часть кольца, с центром в начале координат, лежащую в третьей четверти.

Изобразим проекцию на плоскость XOY (рис. 6.39)

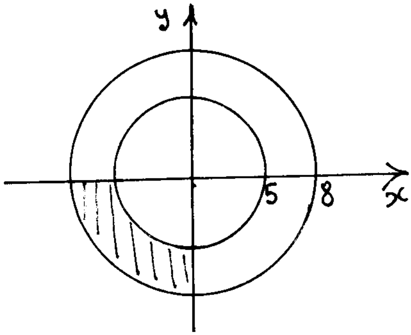

Рис. 6.39

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\ \varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\ \varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta =$$
$$= r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

Модуль якобиана равен $|I| = r^2\sin\theta$.

Запишем уравнения сфер в сферических координатах:

$x^2 + y^2 + z^2 = 64$ => $r^2 = 64$ => $r = 8$ – уравнение первой сферы в сферических координатах;

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ => $r^2 = 25$ => $r = 5$ – уравнение второй сферы в сферических координатах.

Тогда координаты r, φ, θ изменяются следующим образом:

$$5 \le r \le 8;\ \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi .$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V \sqrt[6]{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_5^8 r^2 r^{\frac{1}{3}}dr=\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\left.\left(\frac{r^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\right)\right|_5^8 d\theta=$$

$$=\frac{3}{10}\left(8^{\frac{10}{3}}-5^{\frac{10}{3}}\right)\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left.(-\cos\theta)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=\frac{3}{10}\left(8^{\frac{10}{3}}-5^{\frac{10}{3}}\right)(1-0)\left(\left.\varphi\right|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{10}\left(8^{\frac{10}{3}}-5^{\frac{10}{3}}\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)=\boldsymbol{\frac{3\pi}{20}\left(8^{\frac{10}{3}}-5^{\frac{10}{3}}\right)}.$$

Пример 6.35. Найти объем *V* тела, ограниченного поверхностями:
$2x - y + 3z = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

Решение

Данное тело представляет собой тетраэдр, ограниченный плоскостью $2x - y + 3z = 8$ и координатными плоскостями (рис. 6.40). Уравнение $\frac{x}{4}-\frac{y}{8}+\frac{3z}{8}=1$ задает уравнение плоскости, отсекающей от координатных осей отрезки 4, –8, 8/3. Любая прямая, параллельная оси OZ, проходящая внутри тетраэдра, пересекает каждую из границ тетраэдра $\varphi_1(x,y)=0$ и $\varphi_2(x,y)=\frac{8-2x+y}{3}$ ($\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$) в одной точке, следовательно, интегрирование по переменной z совершается от $\varphi_1(x,y)$ до $\varphi_2(x,y)$.

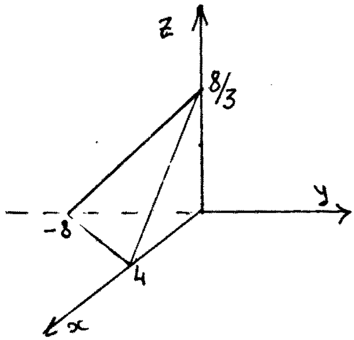

Рис. 6.40

Проекцией тетраэдра на плоскость XOY служит треугольник, уравнения сторон которого $y = 2x - 8, y = 0, x = 0$ Изобразим проекцию на плоскость XOY (рис. 6.41).

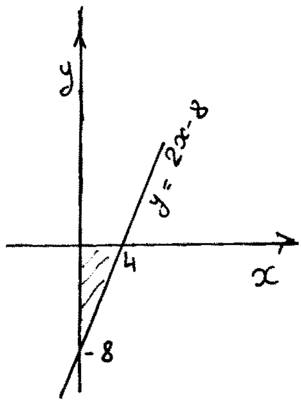

Рис. 6.41

Заметим, что в проекции на плоскость XOY получили область элементарную по переменной x. Заметим, что переменная x изменяется от 0 до 4, а переменная y изменяется от функции $\psi_1(x) = 0$ до функции $\psi_2(x) = 2x - 8$.

Тогда

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2x-8}^0 dy\int\limits_0^{\frac{8-2x+y}{3}} dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2x-8}^0\left(z\Big|_0^{\frac{8-2x+y}{3}}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2x-8}^0\frac{8-2x+y}{3}dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2x-8}^0\left(\frac{8}{3}-\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^4\left(\frac{8}{3}y-\frac{2xy}{3}+\frac{y^2}{3\cdot 2}\right)\Bigg|_{2x-8}^0 dx=\int\limits_0^4\left(-\frac{8}{3}(2x-8)+\frac{2x(2x-8)}{3}-\frac{(2x-8)^2}{6}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(-\frac{16}{3}x+\frac{64}{3}+\frac{4x^2}{3}-\frac{16}{3}x-\frac{4x^2}{6}+\frac{32}{6}x-\frac{64}{6}\right)dx=\int\limits_0^4\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{16}{3}x+\frac{32}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3\cdot 3}-\frac{16}{3}\frac{x^2}{2}+\frac{32}{3}x\right)\Bigg|_0^4=\frac{2\cdot 64}{9}-\frac{8}{3}\cdot 16+\frac{32}{3}\cdot 4=\mathbf{\frac{128}{9}}\ .$$

Пример 6.36. Найти объем V тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{cases}-4z-5=x^2+9y^2,\\ z=-25,\end{cases}$$

Решение

Данное тело ограничено параболоидом $-(4z+5)=x^2+9y^2$, с вершиной в точке $A\left(0,0,-\frac{5}{4}\right)$, и плоскостью $z=-25$, параллельной плоскости XOY (рис. 6.42). Любая прямая, параллельная оси OZ, проходящая внутри тела V, пересекает каждую из границ тела $\varphi_1(x,y)=-25$ и $\varphi_2(x,y)=-\dfrac{x^2+9y^2+5}{4}$ в одной точке, причем $\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$ внутри заданного тела. Тогда, интегрирование по переменной z совершается от $\varphi_1(x,y)$ до $\varphi_2(x,y)$.

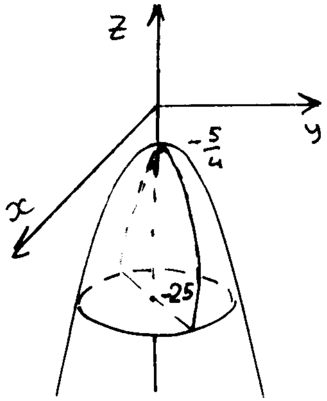

Рис. 6.42

Для того чтобы найти проекцию на плоскость XOY подставим $z = -25$ в уравнение параболоида. Тогда имеем

$$-(4(-25)+5) = x^2 + 9y^2.$$

В результате получим уравнение эллипса $x^2 + 9y^2 = 95$ с полуосями $a = \sqrt{95}$, $b = \dfrac{\sqrt{95}}{3}$.

Изобразим проекцию на плоскость XOY (рис. 6.43).

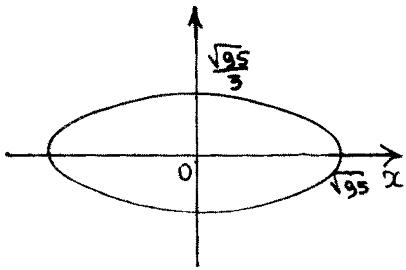

Рис. 6..43

Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = \dfrac{1}{3} r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан равен $I = \frac{1}{3} r$.

Запишем уравнение параболоида в обобщенных цилиндрических координатах. Для этого в уравнение параболоида $-(4z+5) = x^2 + 9y^2$ подставим $x = r\cos\varphi,\ y = \frac{1}{3} r\sin\varphi$.

Тогда

$$-(4z+5) = x^2 + 9y^2 \Rightarrow -4z-5 = r^2\cos^2\varphi + 9\cdot\frac{1}{9} r^2\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -4z-5 = r^2 \quad\Rightarrow z = \frac{-5-r^2}{4}.$$

Получили уравнение параболоида $z = \frac{-5-r^2}{4}$ в цилиндрической системе координат.

Уравнение эллипса $x^2 + 9y^2 = 95$ при $x = r\cos\varphi,\ y = \frac{1}{3} r\sin\varphi$ примет вид $r^2 = 95$.

Тогда угол φ изменяется от 0 до 2π, радиус r изменяется от 0 до $\sqrt{95}$, а переменная z изменяется от $\varphi_1(r,\varphi) = -25$ до $\varphi_2(r,\varphi) = \frac{-5-r^2}{4}$.

Следовательно,

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{95}}rdr\int\limits_{-25}^{\frac{-5-r^2}{4}}dz=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{95}}r\left(z\Big|_{-25}^{\frac{-5-r^2}{4}}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{95}}r\left(\frac{-5-r^2}{4}-(-25)\right)dr=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{95}}\left(-\frac{5}{4}r-\frac{r^3}{4}+25r\right)dr=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{95}}\left(\frac{95}{4}r-\frac{r^3}{4}\right)dr=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{95}{4}\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{95}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{95\cdot 95}{8}-\frac{95^2}{16}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{95^2}{3\cdot 16}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{95^2}{3\cdot 16}\cdot 2\pi=\boldsymbol{\frac{9025}{24}\pi}.$$

Пример 6.37. Найти объем *V* тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{cases}4x^2+25y^2=x,\\ z=9,\\ z=-64,\end{cases}$$

Решение

Данное тело ограничено цилиндром $4x^2+25y^2=x$ и двумя плоскостями $z=9$ и $z=-64$, параллельными плоскости XOY .(рис. 6.44).

В уравнении $4x^2+25y^2=x$ выделим полный квадрат по переменной *x*:

$$4x^2-x+25y^2=0,$$

$$4\left(x^2-\frac{1}{4}x\right)+25y^2=0,$$

$$4\left(\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}\right)+25y^2=0\ ,$$

$$4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{16}+25y^2=0,$$

$$4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+25y^2=\frac{1}{16}.$$

Получили уравнение эллиптического цилиндра

$$64\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+400y^2=1.$$

Любая прямая, параллельная оси OZ, проходящая внутри цилиндра, пересекает каждую из границ тела $\varphi_1(x,y)=-64$ и $\varphi_2(x,y)=9$ в одной точке, причем $\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$. Тогда, интегрирование по переменной z совершается от $\varphi_1(x,y)$ до $\varphi_2(x,y)$.

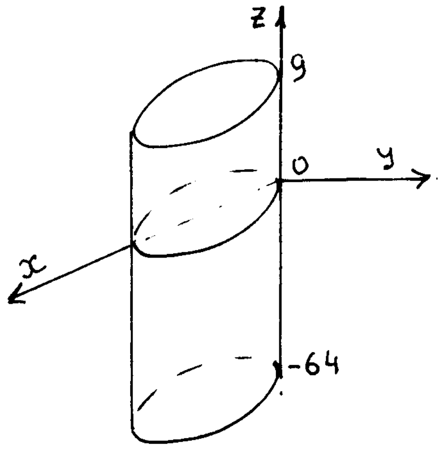

Рис. 6.44

Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} r\cos\varphi, \\ y = \dfrac{1}{5} r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

Якобиан равен $I = \dfrac{r}{10}$.

Запишем уравнение цилиндра в обобщенных цилиндрических координатах. Для этого в уравнение цилиндра $4x^2 + 25y^2 = x$ подставим $x = \dfrac{1}{2} r\cos\varphi,\ y = \dfrac{1}{5} r\sin\varphi$. Тогда

$$4 \cdot \frac{r^2}{4}\cos^2\varphi + 25 \cdot \frac{r^2}{25}\sin^2\varphi = r\cos\varphi \Rightarrow r^2 = r\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \cos\varphi.$$

Итак, уравнение $r = \cos\varphi$ задает уравнение цилиндра в обобщенных цилиндрических координатах.

В проекции на плоскость *XOY* получим эллипс

$64\left(x - \dfrac{1}{8}\right)^2 + 400y^2 = 1$ с центром в точке $M(\dfrac{1}{8};0)$ и полуосями $a = \dfrac{1}{8}$; $b = \dfrac{1}{20}$

Изобразим проекцию на плоскость *XOY* (рис.6.45).

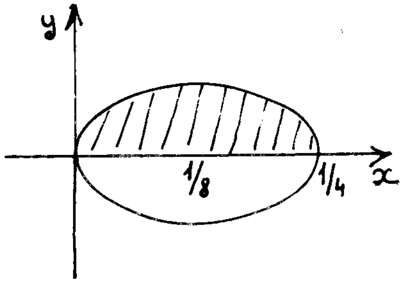

Рис. 6.45

Воспользуемся симметрией относительно оси OX и вычислим V_1 – половину объема цилиндра ($y \geq 0$).

Тогда угол φ изменяется от 0 до $\pi/2$, радиус r изменяется от 0 до $\cos\varphi$, а переменная z изменяется $\varphi_1(r,\varphi) = -64$ до $\varphi_2(r,\varphi) = 9$.

Следовательно,

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = 2V_1 = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} \frac{r}{10} dr \int\limits_{-64}^{9} dz = \frac{2}{10}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} r\left(z\Big|_{-64}^{9}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{5}(9+64)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\cos\varphi}\right) d\varphi = \frac{73}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{2} d\varphi = \frac{73}{10}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{73}{20}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{73}{20}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boldsymbol{\frac{73}{40}\pi}.$$

Пример 6.38. Найти объем V тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ 25z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 = 64, \end{cases}$$

Решение

Данное тело ограничено параболоидами $x^2 + y^2 = 4z$ и $x^2 + y^2 = 25z$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 64$ (рис. 6.46).

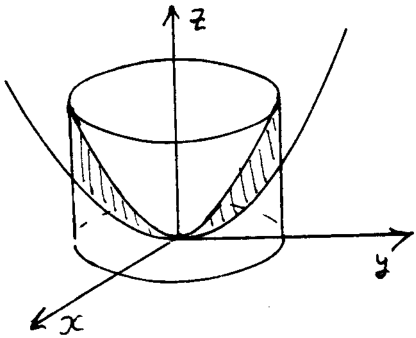

Рис. 6.46

Любая прямая, параллельная оси OZ, проходящая внутри тела V, пересекает каждую из границ тела $\varphi_1(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{25}$ и $\varphi_2(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{4}$ в одной точке, причем $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$. Тогда, интегрирование по переменной z совершается от $\varphi_1(x,y)$ до $\varphi_2(x,y)$.

Проекцией на плоскость XOY служит окружность $x^2 + y^2 = 64$, радиус которой равен 8.

Изобразим проекцию на плоскость XOY (рис. 6.47).

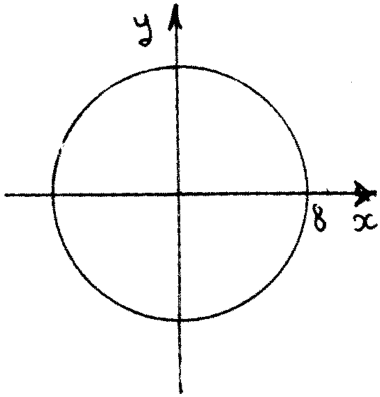

Рис. 6.47

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \qquad I = r. \\ z = z, \end{cases}$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 .$$

Запишем уравнения параболоидов в цилиндрических координатах:

$$x^2 + y^2 = 4z \;\; => \;\; r^2 = 4z \;\; => \;\; z = \frac{r^2}{4},$$

$$x^2 + y^2 = 25z \;\; => \;\; r^2 = 25z \;\; => \;\; z = \frac{r^2}{25}.$$

Тогда угол φ изменяется от 0 до 2π, радиус r изменяется от 0 до 8, а переменная z изменяется $\varphi_1(r,\varphi)=\dfrac{r^2}{25}$ до $\varphi_2(r,\varphi)=\dfrac{r^2}{4}$.

Следовательно,

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^8 rdr\int_{\frac{r^2}{25}}^{\frac{r^2}{4}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^8 r\left(z\Big|_{\frac{r^2}{25}}^{\frac{r^2}{4}}\right)dr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^8 r\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^2}{25}\right)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^8\frac{21}{100}r^3dr=\frac{21}{100}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^8 d\varphi=\frac{21}{100}\cdot\frac{8^4}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{5376}{25}\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{5376}{25}2\pi=\mathbf{\frac{10752\pi}{25}}.$$

Пример 6.39. Найти объем V тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{cases}4x^2+25y^2+z^2=9,\\ 4x^2+25y^2=-8z.\end{cases}$$

Решение

Данное тело ограничено эллипсоидом $4x^2+25y^2+z^2=9$ и параболоидом $4x^2+25y^2=-8z$ (рис. 6.48).

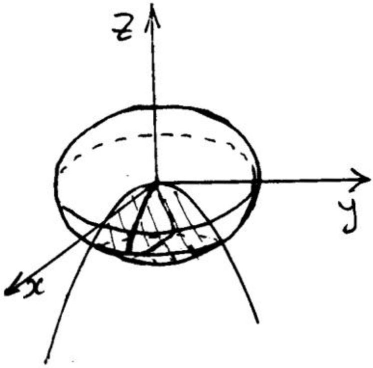

Рис. 6..48

Проекцией на плоскость XOY служит эллипс, который получается при пересечении параболоида и эллипсоида. Найдем его уравнение. Для этого рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2 + 25y^2 + z^2 = 9, \\ 4x^2 + 25y^2 = -8z. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим квадратное уравнение $z^2 - 8z + 9 = 0$, корнями которого являются числа $z_1 = 9$, $z_2 = -1$.

Так как $z < 0$, то $z = -1$.

Тогда имеем

$$\begin{cases} z = -1, \\ 4x^2 + 25y^2 = -8z, \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 25y^2 = 8.$$

Получили уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{\frac{8}{25}}=1,$ с полуосями $a=\sqrt{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{8}}{5}$.

Изобразим проекцию на плоскость XOY (рис. 6.49).

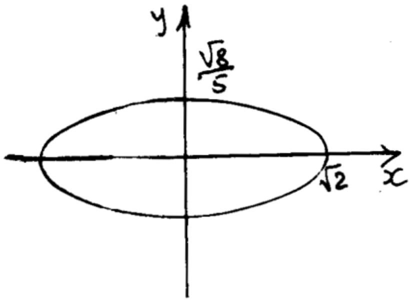

Рис. 6.49

Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}r\cos\varphi, \\ y=\dfrac{1}{5}r\sin\varphi, \quad \text{якобиан равен} \quad I=\dfrac{1}{10}r\,. \\ z=z, \end{cases}$$

Запишем уравнение эллипсоида в обобщенных цилиндрических координатах. Для этого подставим $x=\dfrac{1}{2}r\,cos\,\varphi$ и $y=\dfrac{1}{5}r\,sin\,\varphi$ в уравнение эллипсоида:

$$4\frac{1}{4}r^2 cos^2\varphi + 25\frac{1}{25}r^2 sin^2\varphi + z^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + z^2 = 9 \;\Rightarrow\; z^2 = 9 - r^2 \;=>\; z = \pm\sqrt{9 - r^2}\,.$$

Получили уравнение $z = \pm\sqrt{9 - r^2}$ эллипсоида в обобщенных цилиндрических координатах. У нас $z < 0$, следовательно, $z = -\sqrt{9 - r^2}$.

Запишем уравнение параболоида в обобщенных цилиндрических координатах. Для этого подставим $x = \frac{1}{2}r\,cos\varphi$ и $y = \frac{1}{5}r\,sin\varphi$ в уравнение параболоида:

$$4\frac{1}{4}r^2 cos^2\varphi + 25\frac{1}{25}r^2 sin^2\varphi = -8z \Rightarrow r^2 = -8z$$

Получили уравнение $z = -\frac{r^2}{8}$ параболоида в обобщенных цилиндрических координатах.

Тогда угол φ изменяется от 0 до 2π, радиус r изменяется от 0 до $\sqrt{8}$, а переменная z изменяется $\varphi_1(r,\varphi) = -\sqrt{9 - r^2}$ до $\varphi_2(r,\varphi) = -\frac{r^2}{8}$.

Тогда

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}rdr\int\limits_{-\sqrt{9-r^2}}^{-\frac{r^2}{8}}dz=\frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}r\left(z\Bigg|_{-\sqrt{9-r^2}}^{-\frac{r^2}{8}}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}r\left(-\frac{r^2}{8}+\sqrt{9-r^2}\right)dr=-\frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}\left(-\frac{r^3}{8}\right)dr+$$

$$+\frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}r\sqrt{9-r^2}\,dr=-\frac{1}{80}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{8}}\right)d\varphi+\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}\sqrt{9-r^2}\,dr^2=$$

$$=\left|\begin{array}{c}9-r^2=t\\ dt=-2rdr\\ t_1=9\\ t_2=1\end{array}\right|=-\frac{1}{80}\int\limits_0^{2\pi}\frac{64}{4}d\varphi+\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(-\int\limits_9^1\sqrt{t}dt\right)=-\frac{16}{80}\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^9\sqrt{t}dt=$$

$$=-\frac{1}{5}2\pi+\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^9\right)d\varphi=-\frac{2}{5}\pi+\frac{1}{30}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{2}{5}\pi+\frac{26}{30}2\pi=-\frac{2}{5}\pi+\frac{26}{15}\pi=\frac{20}{15}\pi=\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}.$$

6.14. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл I рода

Пусть $\overset{\cup}{AB}$ – дуга гладкой кривой (от точки *A* до точки *B*) и пусть в некоторой области *D*, содержащей данную кривую, задана функция $f(x,y)$. Разобьем дугу кривой $\overset{\cup}{AB}$ произвольным образом на *n* частей точками $A=A_0,A_1,\dots,A_n=B$. На каждой из получившихся частичных дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку

$P_i(x_i, y_i)$. Длину дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ обозначим $\Delta\ell_i$. Наибольшую из длин частичных дуг обозначим $\Delta\ell$, то есть $\Delta\ell = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta\ell_i$. Тогда интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по длине дуги кривой $\overset{\cup}{AB}$ называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta\ell_i .$$

Криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x,y)$ по кривой $\overset{\cup}{AB}$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой $\overset{\cup}{AB}$ на частичные дуги и от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$ на каждой из дуг разбиения, то есть

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)d\ell = \lim_{\Delta\ell\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta\ell_i .$$

Здесь $d\ell$ - дифференциал длины дуги.

В этом случае функция называется интегрируемой вдоль кривой $\overset{\cup}{AB}$, кривая $\overset{\cup}{AB}$ называется контуром интегрирования.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой $\overset{\cup}{AB}$, то криволинейный интеграл первого рода по кривой $\overset{\cup}{AB}$ от функции $f(x,y)$ существует.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

1. Пусть кривая задана в явном виде как функция переменной x: $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$. Тогда криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)d\ell = \int_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx .$$

2. Если кривая задана на плоскости параметрическими уравнениями:

$$\ell : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t_1 \le t \le t_2$.

Тогда криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)d\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt .$$

3. Можно рассматривать также криволинейные интегралы первого рода от функций трех переменных, взятые по пространственной кривой. Если кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями,

$$l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t_1 \le t \le t_2, \text{ тогда} \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y,z)dr = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt .$$

4. Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$\ell : r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dr = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi .$$

Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования, т. е. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)d\ell = \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x,y)d\ell$.

2. Если для функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ существует криволинейный интеграл первого рода по кривой $\overset{\smile}{AB}$, то для любых чисел $\alpha,\beta \in \Re$, для функции $\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)$ также

существует криволинейный интеграл по кривой $\overset{\cup}{AB}$, причем
$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y))d\ell=\alpha\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}f(x,y)d\ell+\beta\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}g(x,y)d\ell.$$

3. Если контур интегрирования состоит из двух частей $\overset{\cup}{AC}$ и $\overset{\cup}{CB}$, тогда
$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}f(x,y)d\ell=\int\limits_{\overset{\cup}{AC}}f(x,y)d\ell+\int\limits_{\overset{\cup}{CB}}f(x,y)d\ell.$$

4. Если функция $f(x,y)\geq 0$ на кривой $\overset{\cup}{AB}$, то
$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}f(x,y)d\ell\geq 0.$$

5. Если для функции $f(x,y)$ существует криволинейный интеграл первого рода по кривой $\overset{\cup}{AB}$, то для функции $|f(x,y)|$ существует криволинейный интеграл по кривой $\overset{\cup}{AB}$, причем
$$\left|\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}f(x,y)d\ell\right|\leq\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}|f(x,y)|d\ell.$$

6. Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой $\overset{\cup}{AB}$, то на этой кривой существует такая точка $P_c(x_c,y_c)$, что
$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}f(x,y)d\ell=f(x_c,y_c)|\ell|,$$ где $|\ell|$- длина кривой ℓ.

7. $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}d\ell=|\ell|$, где $|\ell|$- длина кривой ℓ.

Если $\gamma=\gamma(x,y)$- переменная линейная плотность на кривой $\overset{\cup}{AB}$, то массу этой кривой можно вычислить с помощью криволинейного интеграла первого рода:

$$m = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \gamma(x,y)d\ell .$$

Криволинейный интеграл II рода

Если в каждой точке $M(x,y)$ определена векторная величина $\overline{A} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$, то говорят, что задано векторное поле $\overline{A}$.

Пусть на дуге $\overset{\cup}{AB}$ кусочно-гладкой кривой ℓ задано векторное поле

$$\overline{A} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j} .$$

Разобьем дугу кривой $\overset{\cup}{AB}$ произвольным образом на n частей точками $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$, координаты которых $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. На каждой из получившихся дуг $A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$ выберем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i) \in A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$.

Тогда интегральной суммой для векторного поля $\overline{A}$ по дуге кривой $\overset{\cup}{AB}$ называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ - проекции i-ого участка разбиения на координатные оси.

Криволинейным интегралом второго рода от векторного поля $\overline{A}$ по дуге кривой $\overset{\cup}{AB}$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего частичного участка разбиения данной кривой ($\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta y_i \to 0$) , если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения кривой $\overset{\cup}{AB}$ на частичные дуги и ни от выбора точек $M_i(\xi_i, \eta_i)$, то есть

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i))\cdot \Delta y_i .$$

В частности, если $Q(x,y)=0$, то имеем

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i$$ - криволинейный

интеграл по координате *x;*

если $P(x,y)=0$, то имеем

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i$$ криволинейный

интеграл по координате *y.*

Криволинейный интеграл второго рода обозначается:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\overline{A}, d\overline{r}) \quad \text{или} \quad \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны, то криволинейный интеграл второго рода существует.

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\overline{A}, d\overline{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

1.Пусть кривая задана в явном виде как функция переменной *x*: $y = y(x)$, где $a \le x \le b$. Тогда криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\overline{A}, d\overline{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$$

.

2. Пусть кривая задана на плоскости параметрическими уравнениями:

$$\ell : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t_1 \le t \le t_2$.

Тогда криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\,P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt$$

где t_1, t_2 – значения параметра t, отвечающие точкам A и B кривой, соответственно.

3.Можно рассматривать также криволинейные интегралы второго рода, взятые по пространственной кривой.

Пусть на дуге $\overset{\cup}{AB}$ кусочно-гладкой пространственной кривой задано векторное поле

$$\overline{A} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k} =$$
$$= (P(x,y,z);\, Q(x,y,z);\, R(x,y,z)).$$

И пусть кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями:

$$\ell : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \text{ тогда} \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(\overline{A},d\overline{r})=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра *t*, отвечающие точкам А и В кривой, соответственно.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1.Криволинейный интеграл II рода зависит от направления, по которому совершается интегрирование вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$.

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(\overline{A},d\overline{r})=-\int\limits_{\overset{\smile}{BA}}(\overline{A},d\overline{r}).$$

2. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}P(x,y)dx+\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}Q(x,y)dy$.

3. Связь с криволинейным интегралом первого рода:

$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(\overline{A},d\overline{r})=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(\overline{A},\overline{r})d\ell$, где $\bar{r}$ - единичный вектор касательной к кривой $\overset{\smile}{AB}$, направленный в сторону ориентации кривой $\overset{\smile}{AB}$.

Остальные свойства аналогичны свойствам криволинейного интеграла первого рода.

Физический смысл криволинейный интеграл второго рода – это работа силового поля $\overline{A}=\overline{A}(\bar{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой $\overset{\smile}{AB}$ из точки *A* в точку *B.*

Криволинейный интеграл второго рода от векторного поля $\overline{A}$ по замкнутому контуру, называется *циркуляцией* векторного поля $\overline{A}$ по данному контуру.

Если путь интегрирования замкнутая кривая, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру обозначают $\oint\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\overline{A},d\overline{r})$. При этом величина криволинейного интеграла второго рода не зависит от выбора начальной точки интегрирования (она же является и конечной). Направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева, называют положительным направлением. В этом случае обход контура совершается против часовой стрелки.

Формула Грина

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладким контуром ℓ, то

$$\oint\limits_{\ell} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ ,$$

где обход контура выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Условия, при которых криволинейный интеграл второго рода не зависит от контура интегрирования

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой области D и контур интегрирования целиком находится в этой области, то для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\ell}(\overline{A},d\overline{r})$, не зависел от контура интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру ℓ, содержащемуся в области D, равен нулю.

Подынтегральное выражение в случае если $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Пример 6.40. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l \dfrac{dl}{-2x-5y}$,

$$l:\begin{cases} y=x+3, \\ -4\le x\le -1. \end{cases}$$

Решение

Кривая задана в явном виде как функция $y = x + 3$, где $-4 \le x \le -1$.

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int\limits_l f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Так как $y'(x)=1$, то

$$\int\limits_l \frac{dl}{-2x-5y}=\int\limits_{-4}^{-1}\frac{\sqrt{1+1}}{-2x-5(x+3)}dx=\sqrt{2}\int\limits_{-4}^{-1}\frac{dx}{-2x-5x-15}=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_{-4}^{-1}\frac{dx}{-7x-15}=-\sqrt{2}\int\limits_{-4}^{-1}\frac{dx}{7x+15}=-\frac{\sqrt{2}}{7}\int\limits_{-4}^{-1}\frac{d(7x+15)}{7x+15}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{7}\ln|7x+15|\Bigg|_{-4}^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{7}\left(\ln|-28+15|-\ln|-7+15|\right)=\frac{\sqrt{2}}{7}\ln\frac{13}{8}.$$

Пример 6.41. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{l}(-4x+6y)dl$

где l: $x^2+y^2=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Решение

Контур интегрирования –это четвертая часть окружности, расположенная в первой четверти, радиус которой равен 2, а центр находится в начале координат, (рис. 6.50).

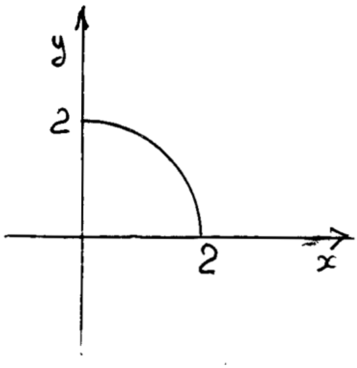

Рис. 6.50

Параметризуем окружность:

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, \quad 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

Найдем производные от функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$:

$$\begin{cases} x'=-2\sin t \\ y'=2\cos t \end{cases}.$$

Вычислим криволинейный интеграл первого рода по формуле:

$$\int\limits_{l} f(x,y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f((x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Тогда

$$\int_l (-4x+6y)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4\cdot 2\cos t + 6\cdot 2\sin t)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\sin t - 8\cos t)dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin t - 2\cos t)dt =$$

$$= 8(-3\cos t - 2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8(3-2) = \mathbf{8}.$$

Пример 6.42. Вычислить криволинейный интеграл $\int_l ydl$, где l – четырехугольник с вершинами в точках $O_1(-4, 0)$, $O_2(6, 0)$, $O_3(-2, -5)$ и $O_4(-2, 5)$.

Решение

Изобразим контур интегрирования на координатной плоскости (рис. 6.51).

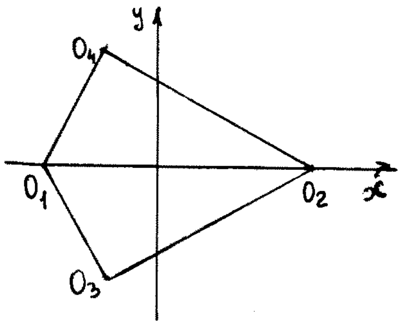

Рис. 6.51

Тогда криволинейный интеграл $\int_l ydl$ будет равен сумме четырех интегралов:

$$\int_l ydl = \int_{O_1O_3} ydl + \int_{O_3O_2} ydl + \int_{O_2O_4} ydl + \int_{O_4O_1} ydl \,.$$

Вычислим каждый из интегралов в отдельности.

Напишем уравнение прямых O_1O_3, O_3O_2, O_2O_4, O_4O_1.

а) Прямая O_1O_3 проходит через точки $O_1(-4, 0)$ и $O_3(-2, -5)$, тогда каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x+4}{-4+2} = \frac{y-0}{0+5} \Rightarrow \frac{x+4}{-2} = \frac{y}{5}\,.$$

Имеем $y = -\frac{5}{2}(x+4)$ – уравнение прямой O_1O_3.

б) Прямая O_3O_2 проходит через точки $O_3(-2, -5)$ и $O_2(6, 0)$, тогда каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x-6}{6+2} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow \frac{x-6}{8} = \frac{y}{5}$$

$y = \frac{5}{8}(x-6)$ – уравнение прямой O_3O_2.

в) Прямая O_2O_4 проходит через точки $O_2(6, 0)$ и $O_4(-2, 5)$, тогда каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x-6}{6+2} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow \frac{x-6}{8} = \frac{y}{-5}$$

$y = -\frac{5}{8}(x-6)$ – уравнение прямой O_2O_4.

г) Прямая O_4O_1проходит через точки Q_4 (–2, 5) и Q_1 (–4, 0), тогда каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x+4}{-2+4} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow \frac{x+4}{2} = \frac{y}{5}$$

Имеем $y = \frac{5}{2}(x+4)$ – уравнение прямой O_4O_1.

Вычислим каждый из интегралов в отдельности по формуле:

$$\int_l ydl=\int_a^b y(x)\sqrt{(y'(x))^2+1}dx$$, где $a\le x\le b$.

Тогда

$$\int_{O_1O_3} ydl=\int_{-4}^{-2}\left(-\frac{5}{2}(x+4)\right)\sqrt{1+\frac{25}{4}}dx=-\frac{5}{4}\sqrt{29}\int_{-4}^{-2}(x+4)dx=$$

$$=-\frac{5\sqrt{29}}{4}\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{-2}=-\frac{5\sqrt{29}}{4}\left(\frac{4}{2}-8-8+16\right)=-\frac{5\sqrt{29}}{2},$$

$$\int_{O_3O_2} ydl=\int_{-2}^{6}\frac{5}{8}(x-6)\cdot\sqrt{1+\frac{25}{64}}dx=\frac{5\sqrt{89}}{64}\int_{-2}^{6}(x-6)dx=\frac{5\sqrt{89}}{64}\left(\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_{-2}^{6}=$$

$$=\frac{5\sqrt{89}}{64}(18-36-2-12)=-\frac{5\sqrt{89}}{2},$$

$$\int_{O_2O_4} ydl=\int_{-2}^{6}\left(-\frac{5}{8}\right)(x-6)\sqrt{1+\frac{25}{64}}dx=-\frac{5\sqrt{89}}{64}\int_{-2}^{6}(x-6)dx=\frac{5\sqrt{89}}{2},$$

$$\int_{O_4O_1} ydl=\int_{-4}^{-2}\frac{5}{2}(x+4)\sqrt{1+\frac{25}{4}}dx=\frac{5\sqrt{29}}{4}\int_{-4}^{-2}(x+4)dx=\frac{5\sqrt{29}}{2}.$$

Значит,

$$\int_l ydl=-\frac{5\sqrt{29}}{2}-\frac{5\sqrt{89}}{2}+\frac{5\sqrt{89}}{2}+\frac{5\sqrt{29}}{2}=\mathbf{0}.$$

Пример 6.42. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_l \frac{(6z^2-5)dl}{\sqrt{4x^2+4y^2}},\ \text{где } l:\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{3} \\ y=\dfrac{\sin t}{3} \\ z=\sqrt{64}t \end{cases};\ \text{где } 0\le t\le 2\pi.$$

Решение

Найдем производные от функций $x=x(t),y=y(y),z=z(t)$:

$$x' = -\frac{1}{3}\sin t,\ \ y' = \frac{1}{3}\cos t,\ \ z' = \sqrt{64}.$$

Кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями, следовательно, для вычисления криволинейного интеграла можно воспользоваться формулой:

$$\int\limits_l f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_l \frac{(6z^2-5)dl}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{6\cdot 64t^2-5}{\sqrt{4\left(\frac{\cos^2 t}{9}+\frac{\sin^2 t}{9}\right)}}\sqrt{\frac{1}{9}\cos^2 t + \frac{1}{9}\sin^2 t + 64}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{3(384t^2-5)}{2}\sqrt{\frac{2}{9}+64}\,dt = \frac{\sqrt{578}}{3}\cdot\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(384t^2-5)dt = \frac{\sqrt{578}}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{384}{3}t^3-5t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{578}}{2}\left(\frac{384\cdot 8\pi^3}{3}-10\pi\right) = \frac{\sqrt{578}}{2}\left(1024\pi^3-10\pi\right) = \boldsymbol{\sqrt{578}\left(512\pi^3-5\pi\right)}.$$

Пример 6.43. Вычислить криволинейный интеграл II рода от векторного поля $\overline{A} = -2xy\overline{i} - 5y\overline{j}$ по кривой l: $-4x + 6y = 1$, $-3 \le x \le 0$.

Решение

Контур интегрирования – отрезок прямой $y = \frac{1+4x}{6}$, где $-3 \le x \le 0$ (рис. 6.52).

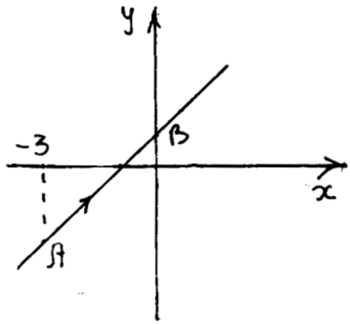

Рис. 6.52

Производная от функции $y = \dfrac{1+4x}{6}$ равна $y' = \dfrac{2}{3}$.

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int_l (\overline{A}, d\overline{r}) = \int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx.$$

Тогда

$$\int_l (\overline{A}, d\overline{r}) = \int_l (-2xy)dx - 5ydy = -\int_{-3}^{0}\left(2x \cdot \frac{4x+1}{6} + 5\frac{1+4x}{6} \cdot \frac{2}{3}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\left(4x^2 + x + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \cdot 4x\right)dx = -\frac{1}{9}\int_{-3}^{0}\left(12x^2 + 3x + 5 + 20x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{9}\int_{-3}^{0}\left(12x^2 + 23x + 5\right)dx = -\frac{1}{9}\left(\frac{12x^3}{3} + \frac{23x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{-3}^{0} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(4(-3)^3 + \frac{23}{2}9 - 15\right) = \frac{1}{9}\left(-108 + \frac{207}{2} - 15\right) = \frac{1}{18}\left(-216 + 207 - 30\right) =$$

$$= -\frac{39}{18} = -\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}.$$

Пример 6.44. Вычислить криволинейный интеграл II рода от векторного поля $\overline{A} = -2xy\overline{i} - 5y\overline{j}$ по кривой

$$l: y^2 = x\,,\ \frac{3}{2} \le y \le 3\,.$$

Решение

Контур интегрирования – часть параболы $y^2 = x$ от точки A до точки B, при этом $\frac{3}{2} \le y \le 3$ (рис. 6.53).

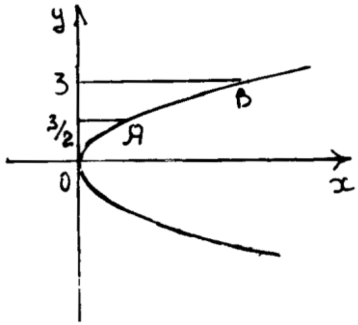

Рис. 6.53

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int\limits_l \left(\overline{A}, d\overline{r}\right) = \int\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_c^d \left(P(x(y),y)\right)x'(y) + Q(x(y),y))dy\,.$$

Найдем производную от функции $x = x(t)$: $x' = 2y$, тогда

$$\int\limits_l (-2xy)dx - 5ydy = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \left((-2 \cdot y^2 \cdot y)2y + (-5y)\right)dy = -\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \left(4y^4 + 5y\right)dy =$$

$$=-\left(\frac{4y^5}{5}+\frac{5y^2}{2}\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{3}\right)=-\frac{4}{5}3^5-\frac{5}{2}3^2+\frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^5+\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{4}{5}\left(\frac{243}{32}-243\right)+$$

$$+\frac{5}{2}\left(\frac{9}{4}-9\right)=-\frac{4}{5}\frac{7533}{32}-\frac{5}{2}\frac{27}{4}=-\frac{7533}{40}-\frac{135}{8}=\mathbf{-205{,}2}.$$

Пример 6.45. Вычислить криволинейный интеграл II рода от векторного поля $\overline{A}=-2xy\overline{i}-5y\overline{j}$ по кривой l, где $l-\frac{1}{4}$часть окружности $x^2+y^2=36$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. (обход против часовой стрелки).

Решение

Контур интегрирования – четверть окружности $x^2+y^2=36$, с центром в начале координат, лежащая в первой четверти, радиус окружности равен 6 (рис. 6.54)

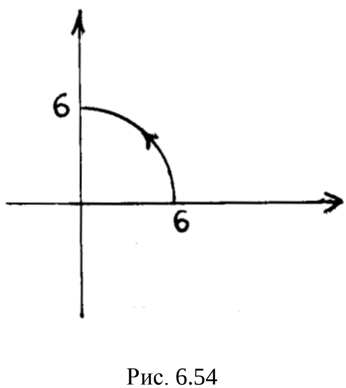

Рис. 6.54

Параметризуем окружность:

$$\begin{cases} x=6\cos t \\ y=6\sin t \end{cases},\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$$

Найдем производные от функций $x=x(t),y=y(t)$:

$$\begin{cases} x' = -6\,sin\,t \\ y' = 6\,cos\,t \end{cases}.$$

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt\,.$$

Тогда

$$\int\limits_l (-2xy)dx - 5ydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [-2\cdot 6\cos t\cdot 6\sin t)(-6\sin t) - 5\cdot 6\sin t\cdot 6\cos t]dt =$$

$$= 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (12\sin^2 t\cos t - 5\sin t\cos t)dt = 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (12\sin^2 t - 5\sin t)\cos t dt =$$

$$= 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (12\sin^2 t - 5\sin t)d\sin t = 36\left(\frac{12\sin^3 t}{3} - \frac{5\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 36\left(4 - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot 36 = \mathbf{54}.$$

Пример 6.46. Вычислить криволинейный интеграл II рода от векторного поля $\overline{A} = -2x\overline{i} - 5y\overline{j} + z\overline{k}$ по кривой l,где l – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-4,\ -8,\ 6)$ и $B(1,\ -2,\ -3)$.

Решение

Напишем уравнение прямой AB. Каноническое уравнение прямой, проходящей через 2 точки: точку $A(x_1,y_1,z_1)$ и точку $B(x_2,y_2,z_2)$, записывается по следующей формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Так как $A(-4, -8, 6)$ и $B(1, -2, -3)$, то

$$\frac{x+4}{1+4}=\frac{y+8}{-2+8}=\frac{z-6}{-3-6}\Rightarrow$$

$$\frac{x+4}{5}=\frac{y+8}{6}=\frac{z-6}{-9}$$ – уравнение прямой AB.

От канонического уравнения перейдем к параметрическому:

$$\begin{cases} x+4=5t \\ y+8=6t \\ z-6=-9t \end{cases} => \begin{cases} x=5t-4 \\ y=6t-8 \\ z=-9t+6 \end{cases}$$

и найдем производные от функций $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$:

$$\begin{cases} x'_t=5 \\ y'_t=6 \\ z'_t=-9 \end{cases}$$

Координатам точки $A(-4, -8, 6)$ соответствует значение параметра $t_1 = 0$, координатам точки $B(1, -2, -3)$ соответствует значение параметра $t_2 = 1$.

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int\limits_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int\limits_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+$$
$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Тогда

$$\int_l (-2x)dx - 5ydy + zdz = \int_0^1 (-2(5t-4)5 - 5(6t-8)6 + (-9t+6)(-9))dt =$$

$$= \int_0^1 (-50t + 40 - 180t + 240 + 81t - 54)dt = \int_0^1 (226 - 149t)dt =$$

$$= \left(226t - \frac{149t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 226 - \frac{149}{2} = \mathbf{\frac{330}{2}}.$$

Пример 6.47. Вычислить криволинейный интеграл II рода от векторного поля $\overline{A} = -2x\overline{i} - 5y\overline{j} + z\overline{k}$ по кривой l, где

l – первый виток винтовой линии. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{2}, \\ y = \dfrac{\sin t}{5}, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 8t, \end{cases}$

Решение

Найдем производные от функций $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{2}, \\ y = \dfrac{\sin t}{5}, \\ z = 8t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{\sin t}{2}, \\ y' = \dfrac{\cos t}{5}, \\ z' = 8. \end{cases}$$

Вычислим криволинейный интеграл по формуле:

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt.$$

Тогда

$$\int_l (-2x)dx - 5ydy + zdz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(-2\frac{\cos t}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}\sin t \right) + \left(-5\frac{\sin t}{5} \right) \frac{1}{5}\cos t + 8t \cdot 8 \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t\cos t - \frac{1}{5}\sin t\cos t + 64t \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{10}\sin t\cos t + 64t \right) dt =$$

$$= \frac{64t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{3}{10}\int_0^{2\pi} \sin t d\sin t = 32(2\pi)^2 + \frac{3}{10}\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \mathbf{128\pi^2}.$$

6.15. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл I рода

Пусть задана кусочно-гладкая поверхность S и пусть на поверхности S задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Разобьем поверхность S произвольным образом на n частичных поверхностей $S_1, S_2, ..., S_n$, площади которых равны соответственно $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, На каждой из получившихся частичных поверхностей $S_1, S_2, ..., S_n$ выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Пусть $\Delta d_1, \Delta d_2, ..., \Delta d_n$ - диаметры частичных поверхностей. Наибольший из диаметров частичных поверхностей обозначим Δd, то есть $\Delta d = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta d_i$. Тогда интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по площади поверхности S называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i\,.$$

Поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x,y,z)$ на поверхности S называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных поверхностей, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности S на частичные поверхности ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$ на каждой из поверхностей разбиения, то есть

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i z_i) \cdot \Delta S_i .$$

Здесь dS - дифференциал площади поверхности.

Определение интеграла по поверхности аналогично определению двойного интеграла, поэтому основные свойства поверхностных интегралов первого рода аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению обычного двойного интеграла.

Если проекция D_{XOY} гладкой поверхности S на плоскость XOY однозначна, т. е. любая прямая, параллельная оси OZ, пересекает поверхность S лишь в одной точке, то

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{D_{XOY}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy ,$$

где $z = z(x, y)$ – уравнение этой поверхности.

Если прямая, параллельная оси OZ, пересекает поверхность S более чем в одной точке, то поверхность S разбивается на части, каждая из которых пересекает эту прямую только один раз. Затем интегрируем по каждой из получившихся поверхностей.

Аналогично можно рассматривать проекции на плоскость XOZ или YOZ.

Значение поверхностного интеграла первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

С помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислить массу материальной поверхности: если $\gamma(x,y,z)$ - поверхностная плотность, тогда масса поверхности S равна

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z)dS .$$

Поверхностный интеграл II рода

Гладкая поверхность S называется двусторонней, если в некоторой точке P поверхности S выбрать определенную нормаль $\overline{n}$, а затем непрерывно ее двигать по поверхности, не переходя через границу поверхности, то каждый раз при возвращении в первоначальную точку P мы будем получать ту же самую нормаль $\overline{n}$. Выбор определенной стороны поверхности называется ориентацией поверхности. В частности, для замкнутой поверхности во всех точках берется либо внешняя нормаль, либо внутренняя.

Рассмотрим двустороннюю кусочно-гладкую поверхность S и выберем на ней определенную сторону S^+, характеризуемую направлением вектора нормали $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Пусть на данной поверхности S задано непрерывное векторное поле $\overline{A} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$.

Тогда *поверхностным интегралом второго рода* по поверхности S называется величина $\iint\limits_{S^+}(\overline{A}, d\overline{S})$, равная поверхностному интегралу первого рода от скалярного произведения $(\overline{A}, \overline{n})$ по поверхности S:

$$\iint\limits_{S^+}(\overline{A}, d\overline{S}) = \iint\limits_{S}(\overline{A}, \overline{n})dS \cdot$$

Обозначение поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{S^+}(\overline{A}, d\overline{S}) = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода:

$$\iint\limits_{S^+}(\overline{A}, d\overline{S}) = \iint\limits_{S}(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS \cdot$$

где $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - единичная нормаль к поверхности.

При переходе на другую сторону поверхности S этот интеграл меняет знак на противоположный.

Если поверхность S задана, как функция $z=z(x, y)$, а D_{XOY} – проекция поверхности S на плоскость XOY, то

$$\iint\limits_{S^+}(\overline{A},d\overline{S}) = \pm \iint\limits_{D_{XOY}}(-P(x,y,z(x,y))z'_x - Q(x,y,z(x,y))z'_y +$$

$$+R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

где знак «+» берем в случае, если вектор нормали $\overline{n}$ к поверхности S^+ составляет острый угол с осью OZ, знак «–» – если этот угол тупой.

Поверхностный интеграл II рода по замкнутой поверхности называется потоком векторного поля $\overline{A}$ через поверхность S.

Формула Стокса

Пусть $\overline{A} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, ℓ – замкнутый контур, тогда ротором векторного поля $\overline{A}$ называется вектор $rot\overline{A}$, вычисляемый по формуле:

$$rot\overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

Циркуляция дифференцируемого векторного поля $\overline{A}$ по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру ℓ равна потоку вектора $rot\overline{A}$ через поверхность S, ограниченную этим контуром. При этом вектор нормали $\overline{n}$ к поверхности S направлен так, чтобы обход контура ℓ проводился в положительном по отношению к нормали $\overline{n}$ направлении (против хода часовой стрелки).

$$\oint\limits_{\ell}(\overline{A},d\overline{r}) = \oint\limits_{\ell}(Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_{S}(rot\overline{A},d\overline{S}) =$$

$$= \iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали.

Поток векторного поля $\overline{A}$ через замкнутую поверхность S в направлении ее внешней нормали равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции векторного поля.

Пусть $\overline{A} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$,

$div\overline{A} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля $\overline{A}$, тогда

$$\iint\limits_S (\overline{A}, d\overline{S}) = \iiint\limits_V div\overline{A}\, dxdydz .$$

Пример 6.48. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (6z - 2x - 5y)dS$, где S – часть плоскости $x - 3y - 8z = 1$, отсекаемая координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (рис. 6.55).

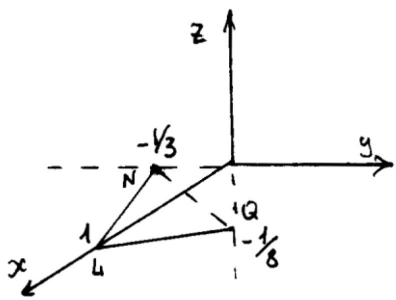

Рис. 6.55

Решение

Из уравнения плоскости $x - 3y - 8z = 1$ выразим переменную z:

$z = \dfrac{x - 3y - 1}{8}$.

Тогда частные производные от этой функции равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{8} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{8}\ .$$

В проекции данной поверхности на плоскость XOY получим треугольник со сторонами $x-3y=1$, $x=0$ и $y=0$ (рис. 6.56).

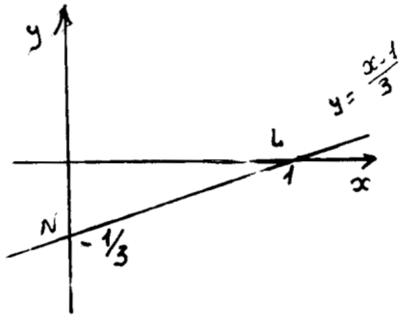

Рис. 6.56

Вычислим поверхностный интеграл по формуле:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{XOY}} f(\,x,y,z(\,x,y\,))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\ ,$$ где

D_{XOY} - проекция поверхности S на плоскость XOY .

Тогда

$$\iint_S (6z-2x-5y)dS=\iint_{\Delta NLO}\left(6\frac{x-3y-1}{8}-2x-5y\right)\sqrt{1+\frac{1}{64}+\frac{9}{64}}dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\frac{x-1}{3}}^{0}\left(\frac{3}{4}(x-3y-1)-2x-5y\right)\sqrt{\frac{74}{64}}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{8}\int_0^1 dx\int_{\frac{x-1}{3}}^{0}\left(\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}y-\frac{3}{4}-2x-5y\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{8}\int_0^1 dx\int_{\frac{x-1}{3}}^{0}\left(-\frac{5}{4}x-\frac{29}{4}y-\frac{3}{4}\right)dy=-\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1 dx\int_{\frac{x-1}{3}}^{0}(5x+29y+3)dy=$$

$$=-\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1\left(5xy+\frac{29y^2}{2}+3y\right)\Bigg|_{\frac{x-1}{3}}^{0}dx=-\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1\left(-5x\frac{x-1}{3}-\frac{29}{2}\left(\frac{x-1}{3}\right)^2-3\frac{x-1}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1\left(\frac{5x^2}{3}-\frac{5x}{3}+\frac{29}{18}\left(x^2-2x+1\right)+x-1\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1\left(\frac{5x^2}{3}-\frac{2x}{3}-1+\frac{29x^2}{18}-\frac{29x}{9}+\frac{29}{18}\right)dx=\frac{\sqrt{74}}{32}\int_0^1\left(\frac{59x^2}{18}-\frac{35x}{9}+\frac{11}{18}\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{32}\left(\frac{59x^3}{18\cdot 3}-\frac{35x^2}{9\cdot 2}+\frac{11}{18}x\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{74}}{32}\left(\frac{59}{54}-\frac{35}{18}+\frac{11}{18}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{74}}{32}\frac{59-105+33}{54}=\boldsymbol{\frac{13\sqrt{74}}{1728}}.$$

Пример 6.49. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (6+2x-5y)dS$, где S: $\begin{cases}0\le y\le 4,\\ 0\le x\le 6,\\ 1\le z\le 3,\end{cases}$ (S – поверхность параллелепипеда).

Решение

Вычислим поверхностный интеграл по каждой грани параллелепипеда.

1) Рассмотрим грани $x = 6$, $x = 0$. Здесь будем проектировать на плоскость YOZ (рис. 6.57).

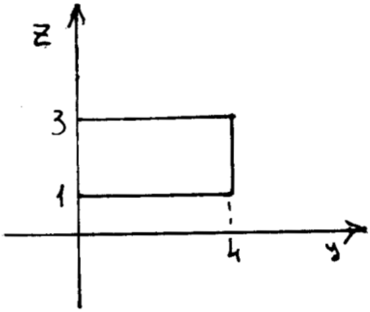

Рис. 6.57

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{YOZ}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz.$$

а) Пусть $x = 6$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0\,;\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{x=6}(6+2x-5y)dS = \iint\limits_{D_{YOZ}}(6+12-5y)\sqrt{1+0+0}\,dydz =$$

$$= \int_0^4 dy\int_1^3 (18-5y)dz = \int_0^4 (18-5y)\left(z\Big|_1^3\right)dy = 2\int_0^4 (18-5y)dy = 2\left(18y-\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2\left(18\cdot 4-\frac{5\cdot 16}{2}\right) = 2(72-40) = 64.$$

б) Пусть $x = 0$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial x}{\partial z}=0\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{x=0}(6+2x-5y)dS=\iint\limits_{D_{YOZ}}(6-5y)dydz=\int\limits_0^4 dy\int\limits_1^3(6-5y)dz=$$

$$=\int\limits_0^4(6-5y)\left(z\Big|_1^3\right)dy=2\int\limits_0^4(6-5y)dy=2\left(6y-\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=2\left(6\cdot 4-\frac{5\cdot 16}{2}\right)=$$

$= 2(24 – 40) = –32.$

2) Грани $y = 0$ и $y = 4$ – будем проектировать на плоскость XOZ (рис. 6.58).

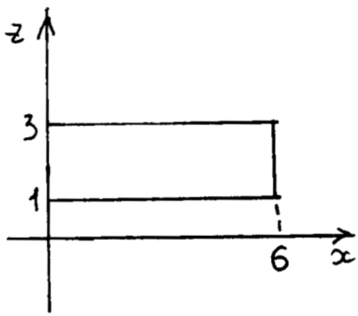

Рис. 6.58

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{XOZ}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz\,.$$

а) Пусть $y = 4$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{y=4} (6+2x-5y)dS = \iint\limits_{D_{XOZ}} (6+2x-20)dxdz = \int\limits_0^6 dx \int\limits_1^3 (2x-14)dz =$$

$$= \int\limits_0^6 (2x-14)\left(z\Big|_1^3\right)dx = 2\int\limits_0^6 (2x-14)dx = 2\left(\frac{2x^2}{2} - 14x\right)\Bigg|_0^6 = 2(36 - 14 \cdot 6) = -96.$$

б) Пусть $y = 0$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{y=0} (6+2x-5y)dS = \iint\limits_{D_{XOZ}} (6+2x)dxdz = \int\limits_0^6 dx \int\limits_1^3 (2x+6)dz =$$

$$\int\limits_0^6 (2x+6)\left(z\Big|_1^3\right)dx = 2\int\limits_0^6 (2x+6)dx = 2\left(\frac{2x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_0^6 = 2(36 + 36) = 144.$$

3) Грани $z = 1$ и $z = 3$ – будем проектировать на плоскость XOY (рис. 6.59).

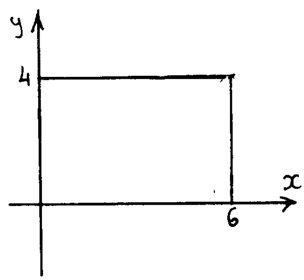

Рис. 6.59

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{XOY}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

а) Пусть $z = 3$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Тогда

$$\iint_{z=3}(6+2x-5y)dS = \iint_{D_{XOY}}(6+2x-5y)dxdy=\int_0^6 dx\int_0^4(6+2x-5y)dy=$$

$$=\int_0^6\left(\left(6y+2xy-\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4\right)dx=\int_0^6(24+8x-40)dx=\int_0^6(8x-16)dx=$$

$$+\left(\frac{8x^2}{2}-16x\right)\Bigg|_0^6 = (4\cdot 36-16\cdot 6) = 144-64 = 80.$$

б) Пусть $z = 1$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Тогда

$$\iint_{z=1}(6+2x-5y)dS = \iint_{z=3}(6+2x-5y)dS = 80.$$

Следовательно,

$$\iint_S(6+2x-5y)dS = 80+80+144-96-32+64 = \mathbf{240}.$$

Пример 6.50. Вычислить поток векторного поля $\overline{A}=-2z\overline{i}-5x\overline{j}+y\overline{k}$ через поверхность S: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}-z=3$ (нормаль внешняя) (рис. 6.60).

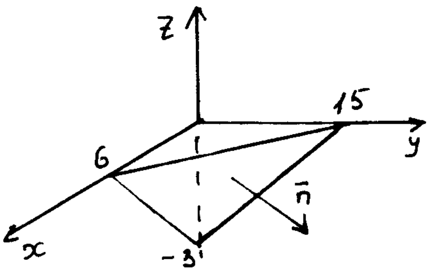

Рис. 6.60

Решение

Поток векторного поля $\overline{A}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ через поверхность S находим по формуле:

$$\iint\limits_{S^+}\left(\overline{A},d\overline{S}\right)=\pm\iint\limits_{D_{XOY}}\left(-P(x,y,z(x,y))z'_x-Q(x,y,z(x,y))z'_y+R(x,y,z(x,y))\right)dxdy.$$

Вектор внешней нормали $\overline{n}$ составляет тупой угол с осью OZ, поэтому в формуле берем знак "–".

Из уравнения $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}-z=3$ выразим переменную z : $z=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}-3$, тогда частные производные равны $z'_x=\dfrac{1}{2}$, $z'_y=\dfrac{1}{5}$.

Проекцией на плоскость XOY служит треугольник со сторонами $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=3$, $x=0, y=0$.

Прямая $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=3$ проходит через точки с координатами (0,15) и (6,0).

Изобразим проекцию на плоскость *XOY* (рис. 6.61):

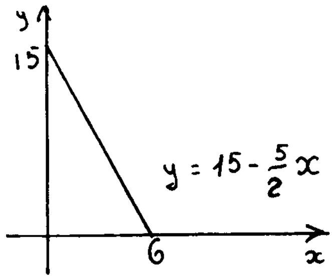

Рис. 6.61

Тогда

$$\iint_{S^+}\left(\overline{A},d\overline{S}\right)=-\iint_{D_{XOY}}\left(-\left(-2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}-3\right)\frac{1}{2}\right)-(-5x)\frac{1}{5}+y\right)dxdy=$$

$$=-\int_0^6 dx\int_0^{15-\frac{5}{2}x}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}-3+x+y\right)dy=-\int_0^6 dx\int_0^{15-\frac{5}{2}x}\left(\frac{3x}{2}+\frac{6y}{5}-3\right)dy=$$

$$=-\int_0^6\left(\frac{3}{2}xy+\frac{6y^2}{5\cdot 2}-3y\right)\Bigg|_0^{15-\frac{5}{2}x}dx=-\int_0^6\left(\frac{3}{2}x\left(15-\frac{5}{2}x\right)+\frac{3}{5}\left(15-\frac{5}{2}x\right)^2-\right.$$

$$\left.-3\left(15-\frac{5}{2}x\right)\right)dx=-\int_0^6\left(\frac{15}{2}x\left(3-\frac{1}{2}x\right)+15\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2-15\left(3-\frac{1}{2}x\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{15}{2}\int_0^6\left(\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)+2\left(9-3x+\frac{1}{4}x^2\right)-2\left(3-\frac{1}{2}x\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{15}{2}\int_0^6\left(3x-\frac{1}{2}x^2+18-6x+\frac{1}{2}x^2-6+x\right)dx=-\frac{15}{2}\int_0^6(-2x+12)dx=$$

$$=15\int_0^6(x-6)dx=15\left(\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_0^6=15\left(\frac{36}{2}-36\right)=-\frac{15\cdot 36}{2}=-270.$$

Пример 6.51. Вычислить поток векторного поля $\overline{A}=-2x^2\overline{i}-5y^2\overline{j}+z\overline{k}$ через поверхность S: $x^2+y^2+z^2=36$ (нормаль внешняя).

Решение

Первый способ.

Вычислим поток векторного поля с помощью формулы Гаусса – Остроградского.

Пусть задано векторное поле $\overline{A}=-P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, тогда

$$\iint_{S^+}\left(\overline{A},d\overline{S}\right)=\iiint_V div\overline{A}dxdydz, \text{ где } div\overline{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial P}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial y};\frac{\partial R}{\partial z}$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=(-2x^2)'_x=-4x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=(-5y^2)'_y=-10y,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=(z)'_z=1.$$

Найдем дивергенцию от векторного поля $\overline{A}=-2x^2\overline{i}-5y^2\overline{j}+z\overline{k}$:

$div\overline{A} = -4x - 10y + 1.$

Тогда

$$\iint_{S^+} \left(\overline{A}, d\overline{S}\right) = \iiint_{\text{по сфере}} (-4x - 10y + 1)dxdydz = J.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Модуль якобиана равен $|I| = r^2 \sin\theta$.

Запишем уравнение сферы в сферических координатах:

$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta =$

$= r^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta = r^2 = 36 \Rightarrow r = 6.$

Итак, получили $r = 6$ - уравнение сферы в сферических координатах.

Тогда

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^6 r^2(-4r\cos\varphi\sin\theta - 10r\sin\varphi\sin\theta + 1)dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^6 \left(4r^3\cos\varphi\sin\theta + 10r^3\sin\varphi\sin\theta - r^2\right)dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left.\left(\frac{4r^4}{4}\cos\varphi\sin\theta + \frac{10r^4}{4}\sin\varphi\sin\theta - \frac{r^3}{3}\right)\right|_0^6 d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta(1296\cos\varphi\sin\theta + 3240\sin\varphi\sin\theta - 72)d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(1296\cos\varphi \sin^2\theta + 3240\sin\varphi \sin^2\theta - 72\sin\theta\right) d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\left(1296\cos\varphi + 3240\sin\varphi\right)\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 72\sin\theta \right) d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\left(648\cos\varphi + 1620\sin\varphi\right)\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + 72\cos\theta \right)\Bigg|_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\left(648\cos\varphi + 1620\sin\varphi\right)\left(\pi - 0\right) + 72(-1-1)\right) d\varphi =$$

$$= \left(-\pi\left(648\sin\varphi - 1620\cos\varphi\right) + 144\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \left(-\pi\left(0 - 1620(1-1)\right)\right) + 144\cdot 2\pi =$$

$$= \mathbf{288\pi}.$$

Второй способ.

Разобьем поверхность на две поверхности: S_1 – верхняя часть сферы $\left(z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right)$ и S_2 – нижняя часть сферы $\left(z = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}\right)$ и вычислим поверхностный интеграл по каждой из этих частей.

Тогда поток векторного поля через всю поверхность сферы будет равен сумме получившихся поверхностных интегралов второго рода: $I = I_1 + I_2$.

а) Пусть $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ (рис. 6.62).

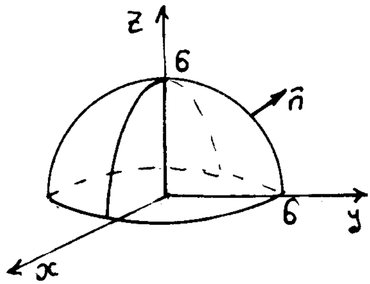

Рис. 6.62

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(-2x)}{2\sqrt{36-x^2-y^2}}=-\frac{x}{\sqrt{36-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(-2y)}{2\sqrt{36-x^2-y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{36-x^2-y^2}}.$$

Поверхностный интеграл по верхней части сферы вычислим по формуле:

$$\iint\limits_{S^+}\left(\overline{A},d\overline{S}\right)=\pm\iint\limits_{D_{XOY}}\left(-P(x,y,z(x,y))z'_x-Q(x,y,z(x,y))z'_y+R(x,y,z(x,y))\right)dxdy.$$

Так как вектор нормали $\overline{n}$ составляет острый угол с осью *OZ*, то в формуле берем знак "+".

Тогда

$$I_1 = \iint\limits_{S^+} \left(-2x^2 dydz - 5y^2 dxdz + zdxdy\right) =$$

$$= \iint\limits_{D_{XOY}} \left[-\left(-2x^2\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}\right) - \left(-5y^2\right)\left(-\frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{36 - x^2 - y^2} \right] dxdy = \iint\limits_{D_{XOY}} \left[-\frac{2x^3}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} - \frac{5y^3}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} + \sqrt{36 - x^2 - y^2} \right] dxdy.$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

якобиан равен $I = r$.

Проекцией на плоскость XOY служит окружность с центром в начале координат, радиус окружности равен 6. (рис. 6.63).

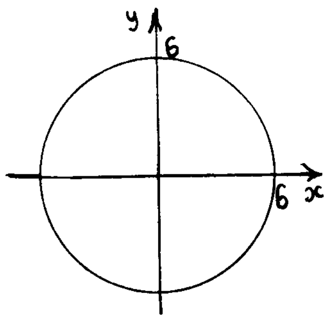

Рис. 6.63

Уравнение окружности в полярной системе координат: $r = 6$, следовательно,

$$I_1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6 r\left[-\frac{2r^3\cos^3\varphi}{\sqrt{36-r^2}}-\frac{5r^3\sin^3\varphi}{\sqrt{36-r^2}}+\sqrt{36-r^2}\right]dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6\left[\left(-2\cos^3\varphi-5\sin^3\varphi\right)\frac{r^4}{\sqrt{36-r^2}}+r\sqrt{36-r^2}\right]dr\,.$$

Вычислим каждый из этих интегралов отдельно.

$$1)\ \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6\left(-2\cos^3\varphi-5\sin^3\varphi\right)\frac{r^4}{\sqrt{36-r^2}}dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6\left(-2\cos^3\varphi-\right.$$

$$\left.-5\sin^3\varphi\right)\frac{r^4}{\sqrt{36-r^2}}\,dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(-2\cos^3\varphi-5\sin^3\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^6\frac{r^4}{\sqrt{36-r^2}}dr=0$$

так как заметим, что $\int\limits_0^6\frac{r^4}{\sqrt{36-r^2}}dr$ – это некоторое число, не зависящее от φ, а

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(-2\cos^3\varphi-5\sin^3\varphi\right)d\varphi=-2\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi-5\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\sin\varphi+5\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\cos\varphi=-2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi+$$

$$+5\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi=\left[-2\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)+5\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-2\cdot 0+5\left(1-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=0.$$

$$2)\ \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6 r\sqrt{36-r^2}\,dr=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6\sqrt{36-r^2}\,d\left(36-r^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\left(36-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^6 d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[0-\frac{2}{3}6^3\right]d\varphi=72\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=72\varphi\Big|_0^{2\pi}=144\pi\,.$$

Следовательно, $I_1 = 144\pi + 0 = 144\pi$.

б) Пусть $z = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}$ (рис. 6.64),

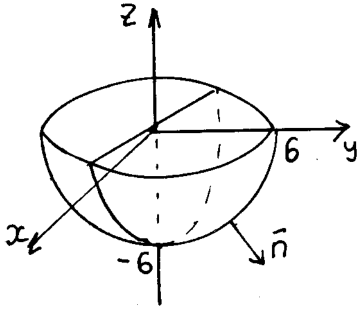

Рис. 6.64

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(-2x)}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(-2y)}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}.$$

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой:

$$\iint_{S^+} \left(\overline{A}, d\overline{S}\right) = \pm \iint_{D_{XOY}} \left(-P(x, y, z(x, y))z'_x - Q(x, y, z(x, y))z'_y + R(x, y, z(x, y))\right) dxdy.$$

Так как вектор нормали $\overline{n}$ составляет тупой угол с осью OZ, то в формуле берем знак "–". Проекцией на плоскость XOY служит окружность с центром в начале координат, радиус окружности равен 6. (рис. 6.63).

Тогда:

$$I_2=-\iint\limits_{окр}\left[-\left(-2x^2\right)\left(\frac{x}{\sqrt{36-x^2-y^2}}\right)-\left(-5y^2\right)\left(\frac{y}{\sqrt{36-x^2-y^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-\sqrt{36-x^2-y^2}\right)\right]dxdy=\iint\limits_{окр}\left[-\frac{2x^3}{\sqrt{36-x^2-y^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{5y^3}{\sqrt{36-x^2-y^2}}+\sqrt{36-x^2-y^2}\right]dxdy=I_1=144\pi.$$

Следовательно,

$$I=I_1+I_2=144\pi+144\pi=288\pi.$$

Пример 6.52. Вычислить двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса) циркуляцию векторного поля $\overline{A}=-4yz\overline{i}-5xz\overline{j}+xy\overline{k}$ вдоль окружности

$$\begin{cases}x=6\cos t\\ y=6\sin t\\ z=2\end{cases}$$ (обход контура против часовой стрелки).

Решение

1.Вычислим циркуляцию векторного поля непосредственно по формуле:

$$Ц=\oint\limits_l(\overline{A},d\overline{r})=\oint\limits_l Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+$$

$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$$

Кривая l задана в пространстве параметрическими уравнениями:

$$l:\begin{cases}x=6\cos t,\\ y=6\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi.\\ z=2,\end{cases}$$

Найдем производные от функций $x = x(t), y = y(t), z = z(y)$:

$$\begin{cases} x' = -6\cos t, \\ y' = 6\cos t, \\ z' = 0, \end{cases}$$

Тогда

$$Ц = \int_l (-4yzdx - 5xzdy + xydz) = \int_0^{2\pi} (-4 \cdot 6\sin t \cdot 2(-6\sin t) -$$

$$-5 \cdot 6\cos t \cdot 2 \cdot 6\cos t + 6\cos t \cdot 6\sin t \cdot 0)dt = 36\int_0^{2\pi} (8\sin^2 t - 10\cos^2 t)dt =$$

$$= 72\int_0^{2\pi} (4\sin^2 t - 5(1 - \sin^2 t))dt = 72\int_0^{2\pi} (9\sin^2 t - 5)dt =$$

$$= 72\int_0^{2\pi} \left(9\frac{(1 - \cos 2t)}{2} - 5\right)dt =$$

$$= 72\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\cos 2t\right)dt = -36\left(t + \frac{9\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -36 \cdot 2\pi = -72\pi .$$

2.Вычислим циркуляцию по формуле Стокса:

$\oint_l (\overline{A}, d\bar{r}) = \iint_S (\mathrm{rot}\overline{A}, d\overline{S})$, где

$$\mathrm{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Найдем ротор векторного поля $\overline{A} = -4yz\bar{i} - 5xz\bar{j} + xy\overline{k}$:

$$rot\overline{A}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -4yz & -5xz & xy\end{vmatrix}=\bar{i}(x+5x)-\bar{j}(y+4y)+\bar{k}(-5z+4z)=$$

$$=6x\bar{i}-5y\bar{j}-z\bar{k}.$$

Тогда

$$Ц=\iint\limits_S (6xdydz-5ydxdz-zdxdy).$$

В проекции на плоскость XOY – окружность радиусом 6.

Координаты вектора нормали: $\bar{n}(0,0,1)$.

Тогда

$$Ц=\iint\limits_S (\overline{A},\bar{n})dS=\iint\limits_{D_{XOY}}(-2)dxdy=-2\iint\limits_{D_{XOY}}dxdy=-2\cdot\pi\cdot 6^2=-72\pi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\iint\limits_{D_{XOY}}dxdy=S_{окр}=\pi R^2=\pi\cdot 6^2.$$

Пример 6.53. Вычислить поток векторного поля $\overline{A}=-3x\bar{i}-4z\bar{j}-8y\bar{k}$ через поверхность S: $\begin{cases}z=6-x^2-y^2\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$, (внутри конуса) непосредственно и по формуле Гаусса – Остроградского (нормаль внешняя)

Решение

Данная поверхность S ограничена конусом $z^2=x^2+y^2$ и параболоидом $z=6-x^2-y^2$ (рис. 6.65).

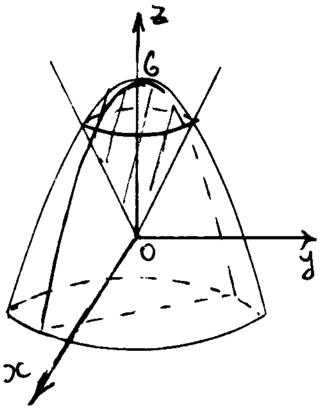

Рис. 6.65

а) Вычислим поток вектора по формуле Гаусса – Остроградского:

$$\iint\limits_{S^+} (\overline{A}, d\overline{S}) = \iiint\limits_{V} div\overline{A}dxdydz, \text{ где}$$

$$\overline{A} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$$

$$div\overline{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вычислим дивергенцию векторного поля $\overline{A} = -3x\overline{i} - 4z\overline{j} - 8y\overline{k}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -3, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \Rightarrow div\overline{A} = -3.$$

Тогда

$$\iint\limits_{S^+} (\overline{A}, d\overline{S}) = -3\iiint\limits_{V} dxdydz.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

якобиан равен $I = r$.

Найдем значение аппликаты z, при котором пересекаются параболоид и конус. Для этого рассмотрим систему:

$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 - z \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 - z \\ z^2 = 6 - z \end{cases}.$$

Корни квадратного уравнения $z^2 + z = 6$ равны $z_1 = 2$ или $z_2 = -3z$.

Значение $z = -3$ нам не подходит, так как $z \geq 0$, следовательно, $z = 2$. Подставим $z = 2$ в уравнение $x^2 + y^2 = 6 - z$, тогда проекцией на плоскость XOY служит окружность $x^2 + y^2 = 4$ с центром в начале координат, радиус окружности равен 2 (рис. 6.66).

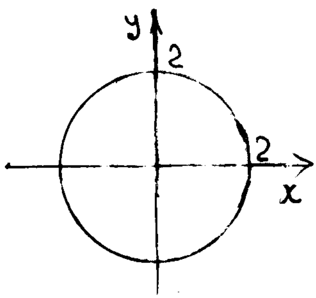

Рис. 6.66

Запишем уравнение конуса в цилиндрических координатах:

$z = r$.

Запишем уравнение параболоида в цилиндрических координатах: $z = 6 - r^2$.

Тогда

$$\iint\limits_{S^+}(\overline{A},d\overline{S})=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 rdr\int\limits_r^{6-r^2}zdz=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r(z)\Big|_r^{6-r^2}dr=$$

$$=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r(6-r^2-r)dr=-3\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{6r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=$$

$$=-3(3\cdot 4-4-\frac{8}{3})\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-3\left(8-\frac{8}{3}\right)4\Big|_0^{2\pi}=-16\cdot 2\pi=-32\pi;$$

б) вычислим поток векторного поля непосредственно по формуле:

$$\iint\limits_{S^+}\left(\overline{A},d\overline{S}\right)=\pm\iint\limits_{D_{XOY}}\left(-P(x,y,z(x,y))z'_x-Q(x,y,z(x,y))z'_y+R(x,y,z(x,y))\right)dxdy\ .$$

Поверхность S разобьем на две части: часть поверхности конуса S_1 и часть поверхности параболоида S_2 и найдем поверхностный интеграл по каждой из этих частей.

а) Пусть S_1: $z^2=x^2+y^2,\quad z\geq 0\quad \Rightarrow\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 6.67).

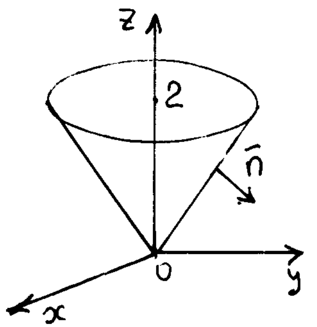

Рис. 6.67

Вектор нормали составляет тупой угол с осью *OZ*, следовательно, в формуле выбираем знак “-“.

Вычислим частные производные от функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тогда

$$\Pi_1=\iint\limits_{S_1^+}(\overline{A},d\overline{S})=-\iint\limits_{D_{XOY}}[-P(x,y,z(x,y))z'_x-Q(x,y,z(x,y))z'_y+$$

$$+R(x,y,z(x,y))]dxdy=\iint\limits_{D_{XOY}}[(-3x)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+(-4)\sqrt{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+8y]dxdy=\iint\limits_{D_{XOY}}\left(\frac{-3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+4y\right)dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}$$

якобиан равен $I=r$.

В проекции на плоскость *XOY* – окружность радиусом 2, тогда

$$\Pi_1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r\left(\frac{-3r^2\cos^2\varphi}{r}+4r\sin\varphi\right)dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(-3\cos^2\varphi+4\sin\varphi)\cdot r^2dr=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(-3\cos^2\varphi+4\sin\varphi)\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}(4\sin\varphi-3\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{8}{3}[4(-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-3\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi]=\frac{8}{3}[4(-1+1)-\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}]=\frac{8}{3}\left(-\frac{3}{2}\cdot2\pi\right)=-8\pi;$$

б) Пусть $S_2: z = 6 - x^2 - y^2, \quad 2 \le z \le 6$ (рис. 6.68)

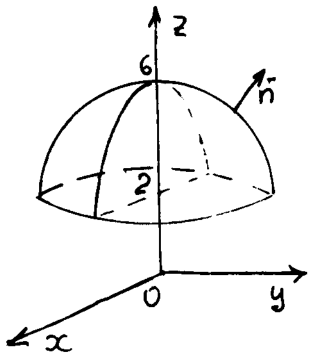

Рис. 6.68

Вектор нормали $\bar{n}$ составляет острый угол с осью OZ. следовательно, в формуле выбираем знак “+“.

Найдем частные производные от функции $z = 6 - x^2 - y^2$:

$z'_x = -2x, \quad z'_y = -2y.$

Тогда

$$\Pi_2 = \iint\limits_{D_{XOY}} [-P(x,y,z(x,y))z'_x - Q(x,y,z(x,y))z'_y + R(x,y,z(x,y))]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{XOY}} [-(-3x)(-2x) - (-4)\cdot(6 - x^2 - y^2)(-2y) - 8y]dxdy =$$

$$=-\iint\limits_{D_{XOY}}(6x^2+8y(6-x^2-y^2)+8y)dxdy=-2\iint\limits_{D_{XOY}}(3x^2+24y-4x^2y-$$

$$-4y^3+4y)dxdy=-2\iint\limits_{D_{XOY}}(3x^2+28y-4x^2y-4y^3)dxdy=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r(3r^2\cos^2\varphi+28r\sin\varphi-4r^3\cos^2\varphi\sin\varphi-4r^3\sin^3\varphi)dr=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(3r^3\cos^2\varphi+28r^2\sin\varphi-4r^4(\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi))d\varphi=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}[\left.\left(\frac{3r^4}{4}\right)\right|_0^2\cos^2\varphi+\left.\left(\frac{28r^3}{3}\right)\right|_0^2\sin\varphi-\left.\left(\frac{4r^5}{5}\right)\right|_0^2(\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^3\varphi)]d\varphi=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}(12\cos^2\varphi+\frac{224}{3}\sin\varphi-\frac{128}{5}(\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi))d\varphi=$$

$$=-24\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi-\frac{448}{3}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi+\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi)d\varphi=$$

$$=-24\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi-\frac{448}{3}(-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}+\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi=-12\left.\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{2\pi}+\frac{448}{3}(1-1)+\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi(-d\cos\varphi)+$$

$$+\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi(-d\cos\varphi)=-12(2\pi+0)-\frac{256}{5}\left.\left(\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{256}{5}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi=-24\pi-\frac{256}{15}(1-1)-\frac{256}{5}\left.\left(\cos\varphi-\frac{\cos^2\varphi}{3}\right)\right|_0^{2\pi}=-24\pi,$$

Следовательно, $\Pi=\Pi_1+\Pi_2=-8\pi-24\pi=-32\pi$.

6.16. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Для получения варианта домашнего задания Вам необходимо, пользуясь таблицей 6.1, заполнить первую строку таблицы 6.2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из таблицы 6.1. Например, Ваш вариант 5.14. Тогда по таблице 6.1 имеем:

5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*

Вписываем эти буквы в первую строку таблицы 6.1 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициент						
	A	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
14	4	5	2	-6	-3	7	8

Таблица 6.1

Порядок следования коэффициентов

№	Коэффициенты						
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*
2	*C*	*D*	*B*	*A*	*K*	*F*	*M*
3	*B*	*A*	*K*	*D*	*C*	*F*	*M*
4	*C*	*A*	*B*	*K*	*D*	*F*	*M*
5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
6	*A*	*K*	*B*	*D*	*C*	*F*	*M*
7	*B*	*K*	*A*	*C*	*D*	*F*	*M*
8	*C*	*K*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*
9	*B*	*D*	*K*	*C*	*A*	*F*	*M*
10	*D*	*K*	*A*	*C*	*B*	*F*	*M*
11	*D*	*C*	*K*	*B*	*A*	*F*	*M*
12	*K*	*C*	*A*	*D*	*B*	*F*	*M*
13	*D*	*A*	*B*	*K*	*C*	*F*	*M*
14	*K*	*B*	*C*	*D*	*A*	*F*	*M*
15	*K*	*A*	*C*	*B*	*D*	*F*	*M*
16	*K*	*C*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*

Таблица 6.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты					
1	2	3	–1	5	7	4	14
2	–5	–9	2	1	–4	3	8
3	6	4	1	2	–7	3	12
4	2	–1	6	–9	8	5	13
5	1	5	–4	–3	6	2	–8
6	4	3	11	–1	–4	3	9
7	2	5	1	4	10	3	24
8	5	–2	9	3	–1	4	7
9	–2	7	6	11	–1	4	8
10	–4	10	5	–3	7	2	13
11	–3	2	–4	7	1	4	12
12	–6	5	–1	8	11	2	–6
13	3	–2	9	–5	1	4	17
14	4	5	2	–6	–3	7	8
15	9	3	–5	7	4	3	–12
16	2	5	–1	–3	4	6	–10
17	1	–6	2	3	–5	4	14
18	10	–2	6	–4	3	5	21
19	–4	7	–3	9	6	2	–17
20	2	1	7	12	4	6	–8
21	8	5	–2	4	1	3	17
22	–3	2	–4	6	–7	5	14
23	–1	7	2	5	4	6	3
24	3	–5	6	–4	1	2	8
25	10	–2	4	7	5	3	–27
26	2	11	6	4	–3	5	16
27	1	4	–3	2	9	6	–17
28	4	5	–9	7	3	2	–12
29	3	2	–5	4	7	6	13
30	–2	10	–4	1	–3	4	37

Условие домашнего задания

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{Ax+B}{Cx+D}dx$;

2) $\int (Ax+B)^M dx$;

3) $\int \frac{C}{(Dx-B)^M}dx$;

4) $\int \frac{Fdx}{(x-A)(x-B)}$;

5) $\int \sqrt[F]{(Cx+D)^M}dx$;

6) $\int \frac{e^{Ax}}{B+Ce^{Ax}}dx$;

7) $\int \frac{Mx^2+B\ln^F x}{Cx}dx$;

8) $\int C(F)^{Ax+B}dx$;

9) $\int \frac{M\cdot \mathrm{tg}(Cx+D)}{\sin^2(Cx+D)}dx$;

10) $\int \frac{x\cdot e^{-\left(A^2x^2+B\right)}}{C}dx$;

11) $\int (F)^x\sqrt{A-B(F)^x}dx$;

12) $\int \frac{B\cdot \mathrm{arctg}Cx-Kx}{1+C^2x^2}dx$;

13) $\int \frac{\sin\left(\log_F(Bx)\right)}{Kx}dx$;

14) $\int (Dx+K)e^{-Fx}dx$;

15) $\int \left(Ax^2+Bx+C\right)\sin(Kx)dx$

16) $\int \ln\left(Dx^2+Kx+F\right)dx$;

17) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{Mx+K}\,dx$;

18) $\int \frac{Fx+M}{Ax^2+Bx+C}dx$;

19) $\int \left(B\sin(Mx)+K\cos(Fx)\right)dx$;

20) $\int \cos^F(Ax+K)dx$;

21) $\int \sin(Cx)\cos(Bx)\sin(Kx)dx$;

22) $\int \left(\operatorname{tg}(Ax)+\operatorname{ctg}(Bx)\right)dx$;

23) $\int \frac{\sin(Fx)}{C+D\sin(Fx)}dx$;

24) $\int \frac{dx}{A-B\cos(Fx)+K\sin(Fx)}$;

25) $\int \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{Kx^2+Fx+M}dx$;

26) $\int \frac{M}{\sqrt{Cx^2+Bx+F}}dx$;

27) $\int \frac{A\sqrt[6]{x}-B}{K\sqrt{x}+M\sqrt[3]{x}}dx$;

28) $\int \frac{Cx+D}{\sqrt{Fx^2-Kx-M}}dx$;

29) $\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{Kx^2+Mx+F}}$;

30) $\int \sqrt{K^2+Mx-Fx^2}\,dx$.

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = Ax^2 + Bx + C$ $x = B$, $x = K$, $y = 0$;

2) $\begin{cases} x = A^2\cos t, \\ y = B^2\sin t, \end{cases}$ $y \geq \frac{|B|}{2}$;

3) $r = C^2\cos(F\varphi)$.

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой;

1) $y = A\sqrt{x} + B, \quad C^2 \le x \le C^2 + 3$;

2) $\begin{cases} x = B^2(t - \sin t) \\ y = B^2(1 - \cos t) \end{cases}, \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{F}$;

3) $r = Ae^{\frac{B\varphi}{M}}, \ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{F}$.

Задача 4. Вычислить объем тела вращения вокруг оси OX и вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = Ae^{Bx}$ и прямыми $x = K^2$, $x = K^2 + 2$, $y = 0$.

Задача 5. Вычислить двойной интеграл:

1) $\iint\limits_D F^{Ax+By}dxdy, \quad$ где $\quad D: \begin{cases} C \le x \le C + 2, \\ D \le y \le D + 1; \end{cases}$

2) $\iint\limits_D (Fx + By)dxdy, \quad$ где $\quad D: \begin{cases} x = 0, y = 0, \\ Ax + Dy = M; \end{cases}$

3) $\iint\limits_D x(Cy + D)dxdy, \quad$ где $\quad D: \begin{cases} y = (Cx)^2, \\ x = Ky. \end{cases}$

Задача 6. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле двумя способами:

1) $\iint\limits_D f(x, y)dxdy, \quad$ где $\quad D: \begin{cases} y = A^2 x, \\ y = B^2 x, \\ x + y = C^2, \\ x + y = K^2; \end{cases}$

2) $\iint\limits_D f(x, y)dxdy, \quad$ где $\quad D: \begin{cases} y^2 \le A(x - B), \\ (x - B)^2 + y^2 \le D^2; \end{cases}$

3) $\iint\limits_D f(x, y)dxdy, \quad$ где $\quad \mathrm{D}: \begin{cases} (Ay)^2 - (Bx)^2 = 1, \\ x = F, \\ x = M. \end{cases}$

Задача 7. Вычислить двойной интеграл в полярных (обобщенных полярных) координатах:

1) $\iint\limits_D \sqrt{(Cx)^2+(My)^2}\,dxdy$, где $D:\begin{cases}(Cx)^2+(My)^2=A^2,\\ (Cx)^2+(My)^2=B^2;\end{cases}$

2) $\iint\limits_D dxdy$, где $D:\begin{cases}x^2+y^2=A^2x,\\ x^2+y^2=B^2x,\\ y=0,\\ y=\dfrac{1}{M^2}x.\end{cases}$

Задача 8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=A^2,\ y=B^2x,\ y=C^2x,\ x\geq 0.$

Задача 9. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt[F]{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,

где $V:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=M^2,\\ x^2+y^2+z^2=B^2,\\ x\leq 0,\ y\leq 0,\ z\leq 0.\end{cases}$

Задача 10. Найти объем тела:

1) $V:\begin{cases}Ax+Cy+Dz=M,\\ x=0,\ y=0,\ z=0;\end{cases}$

2) $V:\begin{cases}(Cx)^2+(Dy)^2=-A^2z+B,\\ z=-B^2;\end{cases}$

3) $V:\begin{cases}(Ax)^2+(By)^2=Cx,\\ z=D,\\ z=-M^2;\end{cases}$

4) $V:\begin{cases}A^2z=x^2+y^2,\\ B^2z=x^2+y^2,\\ x^2+y^2=M^2;\end{cases}$

5) $V:\begin{cases}A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=D^2,\\ A^2x^2+B^2y^2=Mz\end{cases}$ (внутри параболоида).

Задача 11. Вычислить криволинейный интеграл I рода:

1) $\int\limits_l \frac{dl}{Ax+By}$, где $l: \begin{cases} y = Cx - D, \\ K \le x \le K+3; \end{cases}$

2) $\int\limits_l (Kx+Fy)dl$, где l: $x^2 + y^2 = A^2$ – часть окружности, лежащая в 1-й координатной четверти;

3) $\int\limits_l ydl$, где l – четырехугольник с вершинами в точках $O_1(K, 0)$, $O_2(F, 0)$, $O_3(A, B)$, $O_4(A, -B)$;

4) $\int\limits_l \frac{\left(Fz^2+B\right)dl}{\sqrt{(Ax)^2+(Ay)^2}}$, где l – первый виток винтовой линии

$$x = \frac{\cos t}{|D|};\ y = \frac{\sin t}{|D|};\ z = \sqrt{M^2}t,\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Задача 12. Вычислить криволинейный интеграл II рода:

1) Если заданы векторное поле $\overline{A} = Axy\overline{i} + By\overline{j}$ и кривые:

а) l: $Kx+Fy=1$, $D \le x \le D+3$;

б) l: $y^2 = C^2x$, $\frac{|D|}{2} \le y \le |D|$;

в) l: $\frac{1}{4}$ часть окружности $x^2 + y^2 = F^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (обход против часовой стрелки);

2) Если заданы векторное поле $\overline{A} = Ax\overline{i} + By\overline{j} + Cz\overline{k}$ и кривые:

а) l – отрезок прямой, соединяющий точки $A(K, M, F)$ и $B(C, A, D)$;

б) l – первый виток винтовой линии $x = \frac{\cos t}{|A|}; y = \frac{\sin t}{|B|}; z = |M|t$ $0 \le \mathrm{t} \le 2\pi$.

Задача 13. Вычислить поверхностный интеграл I рода

1) $\iint\limits_S (Fz+Ax+By)dS$, где S – часть плоскости $Cx + Dy + Mz = 1$, ограниченная координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2) $\iint\limits_S (|A|x + By + F)dS$, где $S: \begin{cases} 0 \le y \le |K|, \\ 0 \le x \le F, \\ |C| \le z \le |C| + 2. \end{cases}$

Задача 14. Вычислить поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_S \left(\overline{A}, d\overline{S}\right)$, если задано:

1) $\overline{A} = Az\overline{i} + Bx\overline{j} + Cz\overline{k}$, $S: \dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} + z = D$ – внешняя сторона части поверхности плоскости, ограниченной координатными плоскостями;
2) $\overline{A} = Az\overline{i} + Bx\overline{j} + Cz\overline{k}$, S – внешняя сторона поверхности сферы радиусом F.

Задача 15. Вычислить двумя способами:

1) циркуляцию векторного поля $\overline{A} = Ayz\overline{i} + Bxz\overline{j} + Cxy\overline{k}$ вдоль эллипса S: $x = F\cos t$, $y = F\sin t$, $z = -A$ (обход против часовой стрелки, непосредственно и по формуле Стокса);
2) поток векторного поля $\overline{A} = Dx\overline{i} + Kz\overline{j} + My\overline{k}$ через поверхность S, где S – замкнутая поверхность S: $z = F - x^2 - y^2$, $C^2z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$ (нормаль внешняя, непосредственно и по формуле Гаусса – Остроградского).

6.17. Вопросы для самопроверки

1) Дать определения первообразной и неопределенного интеграла. Сформулировать их свойства.

2) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int 5dx; \qquad \int \sqrt[5]{x^3}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \qquad \int 5^x dx;$$

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

3) Написать и обосновать формулу замены переменной в неопределенном интеграле.

4) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx; \qquad \int \sin(3x-4)dx;$$

$$\int (1-4x)^{10}dx; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{8-3x}; \qquad \int x\sqrt{1-x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{x\ln^4 x}; \qquad \int \sin^3 x\cos x dx;$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} \qquad \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4};$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}; \qquad \int \frac{3x-1}{x^2+9}dx;$$

$$\int \frac{x - arctg^4 x}{x^2+1}dx; \qquad \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}.$$

5) Написать и обосновать формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

6) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int x\cdot 3^x dx; \qquad \int (x^2-2ч+3)\cdot e^x dx;$$

$$\int \ln x dx; \qquad \int \sqrt{x}\, ln^2 xdx;$$

$$\int \arcsin x dx; \qquad \int e^x \cos x dx;$$

$$\int (2x-1)cosxdx; \quad \int x\,sin\,3xdx;$$

$$\int \frac{xdx}{cos^2 x}; \qquad \int \frac{x^2dx}{(x^2+5)^2}.$$

7) Какая рациональная дробь называется правильной? Какие дроби называются простейшими?

8) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int \frac{xdx}{x+4}; \qquad \int \frac{dx}{x(x+1)};$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+4x+1}; \qquad \int \frac{x^2dx}{x^3+4x^2+4x};$$

$$\int \frac{3x^2+4x+9}{(x+1)(x^2+2x+5)}dx; \qquad \int \frac{x^2dx}{x^3+64}dx;$$

$$\int \frac{(x^3+x-1)dx}{(x^2+2)^2}dx; \qquad \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}.$$

9) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int sin^4 x\,cos^5 xdx; \qquad \int sin^2 xdx;$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx; \qquad \int cos^6 \frac{x}{2}dx;$$

$$\int \frac{dx}{sin^3 x};\qquad \int ctg^3 2xdx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{cos^3 x \cdot sin x}};\qquad \int tg^4 xdx.$$

10) Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+4}};\qquad \int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx;\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}};$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x};\qquad \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx.$$

11) Дать определение определенного интеграла, сформулировать его свойства.

12) Написать и обосновать формулу Ньютона – Лейбница.

13)Написать и обосновать формулу замены переменной в определенном интеграле.

14) Вычислить определенные интегралы:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx;\qquad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+x)^3};$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx;\qquad \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}\,dx}{e^x+2};$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{5e^x-1}\; e^x dx;\qquad \int_0^{arctg(1/3)} \frac{(8+tgx)dx}{9\sin^2 x+\cos^2 x};$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}};\qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+8cos^2 x};$$

$$\int_9^{15}\sqrt{\frac{x-6}{18-x}}dx; \qquad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$$

15). Написать и обосновать формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

16) Вычислить определенные интегралы:

$$\int_1^e x\ln x dx; \qquad \int_1^8 \sqrt[3]{x}\ \ln x dx;$$

$$\int_0^{\pi/2}(2x-1)cosxdx; \quad \int_{-1}^{1/2} arctg\sqrt{1-2x}dx;$$

$$\int_0^{\pi/2}(2x+3)\sin x dx; \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{sin^2 x}.$$

17) Сформулировать теорему о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу.

18)Найти производную от функции $F(x)=\int_0^x sin t^2 dt$.

19) Дать определение среднего значения функции на отрезке.

20) Вычислить среднее значение функции

$$f(x)=\frac{(x+3)}{(x+1)^2(x^2+1)} \text{ на отрезке } [1,2].$$

21)Вычислить среднее значение функции $f(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$ на отрезке [0,4].

22) Дать определения несобственного интеграла на бесконечном промежутке и на конечном промежутке.

23) Дать определения сходящихся и расходящихся несобственных интегралов. Сформулировать признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций.

24)Сформулировать условия сходимости несобственного интеграла.

25) Выяснить, когда сходятся интегралы Дирихле:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^p}.$$

26) Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx;$$

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad \int_3^{+\infty} \frac{(2x+5)dx}{x^2+3x-10};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+1} dx; \qquad \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$$

27) Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{arcctgx}{x^2(1+x^2)} dx; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+4x^2+1}} dx \qquad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx;$$

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2} dx;$$

;

28) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 2x, \quad y = x;$

2) $y^2 = 2x+1, \; x - y - 1 = 0$

3) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$

4) $r = \cos 2\varphi$.

29) Написать формулу для нахождения длин дуги кривой, если кривая задана уравнением $y = y(x)$.

30) Написать формулу для нахождения длины дуги кривой, если кривая задана параметрическими уравнениями в пространстве.

31) Найти длину дуги кривой l, если

1) $l : y = \sqrt{x - x^2} + arcsin\sqrt{x},\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

2) $l : x = t^2, y = t - t^3/3,\ 0 \le t \le \sqrt{3}$

3) l: $r = 5\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}$;

4) $l : r = 2(1 + \cos\varphi)$.

32)Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $xy=1$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

33) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = arcsin\, x$, $x=0$, $x=1$.

34)Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2, y = x,\ \ x = 0$.

35) Дать определение двойного интеграла. В чем заключается геометрический смысл двойного интеграла? Сформулировать свойства двойного интеграла.

36) Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

37) Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$, если:

1) $S:\begin{cases} x=0,\ x=1, \\ y=0,\ y=2; \end{cases}$

2) $S:\begin{cases} x+y=1, \\ x=0, \\ y=0; \end{cases}$

3) S: $y=-x^2$, $y=-1$.

4) S: $x=y^2$, $y=x-2$.

38) Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры S:

1) $S:\begin{cases} x=0,\ x=1, \\ y=0,\ y=2; \end{cases}$

2) $S:\begin{cases} x+y=1, \\ x=0, \\ y=0; \end{cases}$

3) S: $x^2+y^2\le 2x,\quad y\le x,\quad y\ge 0$,

4) S: $1\le x^2/4+y^2\le 25,\quad x\ge 0,\quad y\ge x/2$,

39)Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x-3y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=\sqrt{x-4}$, $x=5$, $y=0$.

40) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $yx=1$, $y=x$, $y=2$.

41) Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$, где S: $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, в полярной системе координат.

42) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, где

S: $x^2 + y^2 \leq 1$.

43) Дать определение тройного интеграла. Сформулировать его свойства.

44) Написать формулы перехода к цилиндрической и сферической системе координат в тройном интеграле.

45)Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz, \quad x + y + z = 1, \quad V: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

46) Вычислить тройной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 dz$.

47) Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в цилиндрической системе координат, если

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \mathrm{z} = 4. \end{cases}$$

48)Вычислить объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 4 - x^2$, $z = 0$.

49)Вычислить объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 2z$; $x \leq 0$, $y \leq 0$.

50) Дать определение криволинейного интеграла первого рода. Сформулировать его свойства.

51)Записать формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода.

52) Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$\int\limits_{\ell} \frac{d\ell}{x-y}$, где ℓ - отрезок прямой, соединяющий точки (0,-2) и (4,0).

53) Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$\int\limits_{\ell} \sqrt{2y}d\ell$, где ℓ - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

54) Дать определение криволинейного интеграла второго рода. Сформулировать его свойства.

55)Записать формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода.

56) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_{\ell} xydx + (y - x)dy$, вдоль линии ℓ, соединяющей точку (0,0) и точку (1,1), если:

1) ℓ: $y = x$;

2) ℓ: $y = x^2$;

3) ℓ: $y^2 = x$;

4) ℓ: $y = x^3$.

57) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\ell} ydx - xdy\text{, где } \ell \text{ - эллипс, } x = 4\cos t\text{, } y = 9\sin t.$$

58)Записать формулу Грина. Сформулировать условия, при которых криволинейный интеграл второго рода не зависит от контура интегрирования.

59) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\ell} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}\text{, где } \ell \text{ - окружность } x^2 + y^2 = 4.$$

60) Дать определение поверхностного интеграла первого рода.

61) Вычислить поверхностный интеграл первого рода:

$\iint_S xydS$, где S – верхняя половина сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

62) Вычислить поверхностный интеграл первого рода:

$\iint_S xyzdS$, где S – часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, лежащая в первом октанте.

63)Дать определение поверхностного интеграла второго рода.

64) Сформулировать теорему Стокса и теорему Гаусса-Остроградского.

65)Дать определение циркуляции векторного поля.

66) Вычислить циркуляцию векторного поля $A = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ плоскостью $x + z = 0$.

67) Дать определение потока вектора через поверхность.

68) Найти поток векторного поля $A = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ через всю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $2x + 3y - 4z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.

69)Найти поток векторного поля $A = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + z^2\bar{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 = 1$, вырезаемую плоскостями $z = 0, z = 2$.

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа 1
по теме «Определенный и неопределенный интеграл»

1. Вычислить интеграл:

1) $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$;

3) $\int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$;

4) $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$ или $\int \cos^4 x \cdot \sin^4 x dx$;

5) $\int \frac{(2 - 5x)dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}}$ или $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$ или $\int\limits_0^1 \sqrt{2x + x^2} dx$.

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{4+3\sin 3x}{\sqrt{x+9}}\,dx.$$

Или

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}\,dx$$

3. Вычислить при помощи определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

или площадь петли линии

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t-t^3 \end{cases}$$

или площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах

$$\begin{cases} r = 1, \\ r = 2\cos\varphi; \end{cases}$$

4. Вычислить длину дуги кривой

$y = \ln x$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$

или

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t_1 = 0,\ t_2 = \pi,$$

или $\quad r = a(1 + \cos\varphi)$;

5. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$, вокруг оси OX,

или

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси OY.

Контрольная работа 2
по теме « Кратные и криволинейные интегралы»

1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ двумя способами, если D: четырехугольник с вершинами в точках $A(1, 2)$, $B(-3, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(4, -3)$.

Или

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{8x - x^2}} f(x, y)dy$$

2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D xdxdy,\ \text{если}\ D:\ \begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

3. Вычислить двойной интеграл в полярной системе координат:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,\ \text{если}\ D:\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ x^2 + y^2 = 4y. \end{cases}$$

4. Вычислить объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$V:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 2 - z. \end{cases}$$ (область содержит точку $O(0, 0, 0)$.)

5.Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\ell} \frac{d\ell}{x-y}$, где ℓ - отрезок прямой $y = 4x + 1$, соединяющий точку (0,1) с точкой (2,9).

Или

Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, где S- часть поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1$.

6.Вычислить циркуляцию векторного поля $A = 2y\bar{i} + \bar{j} - 2yz\bar{k}$ по сечению конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ плоскостью $z = 4$.

7.Найти поток векторного поля $A = x\bar{i} + (y + yz)\bar{j} + (z - y^2)\bar{k}$ через верхнюю половину сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика: Учеб. пособие /Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 1999. Ч.1, 2 (№990 и 1431).
2. Пискунов Н.Ц. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985. Т.1, 2.
3. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А.В. Ефимова, Б.Г. Демидовича. – М.: Наука, 1986. Ч.1, 2.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1986.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1998. Т.1.