6.7. Определенный интеграл и его свойства

Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и пусть $x_i\ (i = 1,2,...n)$- совокупность точек этого отрезка, таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Назовем эту совокупность точек разбиением отрезка $[a,b]$ на n частей. Обозначим $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$- i -ый отрезок разбиения, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$- длина i –ого отрезка разбиения.

Сумма вида $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i = 1,2,...n)$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Величина интегральной суммы зависит как от разбиения отрезка $[a,b]$, так и от выбора точки ξ_i на этих отрезках.

Обозначим через λ длину наибольшего их отрезков Δ_i, то есть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Предел суммы S_n при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ стремится к нулю, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, функция $f(x)$ - подынтегральная функция, выражение $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, а переменная x - переменная интегрирования.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке [a,b], называется *интегрируемой по Риману* на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Если функция f интегрируема на отрезке [a,b], то интеграл от этой функции является числом и не зависит от того какой буквой обозначать переменную интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Условия интегрируемости функции:

1.Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b], то она ограничена на этом отрезке.

Ограниченность функции на отрезке не является достаточным условием ее интегрируемости, то есть функция может быть ограничена на отрезке [a,b], но не интегрируема на этом отрезке. Например, функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$ на отрезке [0,1] ограничена, но не интегрируема на нем.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке [a,b], то она интегрируема на этом отрезке.

4. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке [a,b] и имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b], то для любых чисел $\alpha, \beta \in \Re$ функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на этом отрезке и имеет место равенство:

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b], то функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b], то она интегрируема на любом отрезке [c,d], лежащем внутри отрезка [a,b] ([c,d]$\subset$ [a,b]).

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b] и $a<c<b$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b], то

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

То есть если пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит только знак.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b] и точки c_1, c_2, c_3 - любые точки этого отрезка, то

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx=\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx.$$

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b] и для всех $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $f(x)\geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx.$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b] и для всех $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $f(x)\geq 0$

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b]; для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$ и существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) > 0$, причем функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

10. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b], то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [-a,a] и $f(x)$ четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$; если же $f(x)$ нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

12. *Оценка определенного интеграла*

а). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a,b] и числа m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке [a,b], то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

б). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b]; числа m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке [a,b] и функция $g(x)$ не меняет знака на отрезке [a,b], то

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

13. *Теоремы о среднем*

а). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует по крайней мере одна такая точка $c \in [a,b]$, что имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

б). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$; числа m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и функция $g(x)$ не меняет знака на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $C \in [m, M]$, что $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x) = C\int_a^b g(x)dx$.

Следствие.

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ интегрируема и не меняет знака на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x) = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, который называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Свойства интеграла с переменным верхним пределом.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке, причем одной из первообразных функции $f(x)$ является интеграл с переменным верхним пределом, следовательно, $\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + c$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $F(x)$ является ее первообразной, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Замена переменного в определенном интеграле.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(t) \in (a,b)$ при всех $t \in (\alpha,\beta)$ и $a = \varphi(\alpha)$, а $b = \varphi(\beta)$. Тогда справедлива формула замены переменного в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

При замене переменного в определенном интеграле, в отличие от замены переменного в неопределенном интеграле, не надо возвращаться к исходной переменной, так как преобразованный интеграл берется по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент. При вычислении неопределенного интеграла иногда производятся преобразования подынтегральной функции, тождественные не для всех возможных значений аргумента. В этих случаях для простоты подразумевается, что первообразная находится на тех промежутках, на которых необходимое тождество имеет место. При вычислении определенного интеграла первообразная ищется на заданном отрезке, поэтому здесь необходимо следить за тем, чтобы не произвести преобразование, не являющееся тождественным.

Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные, то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 6.9. Вычислить следующие определенные интегралы:

1) $\int_1^2 2^x dx$; 2) $\int_0^\pi x\sin x dx$;

3) $\int_0^2 xe^x dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x dx$;

5) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$; 6) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Решение

1) $\int_1^2 2^x dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$.

2) $\int_0^\pi x\sin x dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле. Тогда

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = -\pi\cos\pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi .$$

3) $\int_0^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2\cdot e^2 -$

$$-e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + e^0 = e^2 + 1.$$

4) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x dx$.

Сделаем замену $\sin x = t$, тогда $dt = \cos x dx$.
Найдем новые пределы интегрирования:

если $x = 0$, то $t = \sin 0 = 0$;

если $x = \pi/2$, то $t = \sin(\pi/2) = 1$.

Тогда $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

5) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Сделаем замену $e^x = t$, тогда $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$.

Найдем новые пределы интегрирования:

если $x = 0$, то $t = e^0 = 1$;

если $x = \ln 2$, то $t = e^{\ln 2} = 2$.

Тогда

$$\int_0^{ln2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_1^2\sqrt{t-1}\cdot\frac{dt}{t}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{t-1}=u\Rightarrow t-1=u^2;\\ dt=2udu;\\ u_1=0;u_2=1\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 u\cdot\frac{2udu}{u^2+1}=2\int_0^1\frac{u^2du}{u^2+1}=2\int_0^1\frac{(u^2+1-1)du}{u^2+1}=2\int_0^1 du-2\int_0^1\frac{du}{u^2+1}=$$

$$=2u\Big|_0^1-2arctgu\Big|_0^1=2-2arctg1+2arctg0=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

6) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Сделаем замену $x=a\sin t,t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $dx=a\cos tdt$.

Новые пределы интегрирования t_1 и t_2 найдем из уравнений: $a\sin t_1=0$ и $a\sin t_2=a$:

$$a\sin t_1=0\Rightarrow \sin t_1=0\Rightarrow t_1=0;$$

$$a\sin t_2=a\Rightarrow \sin t_2=1\Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}a^2t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2tdt=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\left(\sin\pi-\sin 0\right)=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 6.10. Найти среднее значение функции на отрезке:

1) $f(x)=x(2-x^2)^6$ на отрезке $[0,1]$;

2) $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ на отрезке $[1,3]$.

Решение

Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ найдем по формуле:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

1) Пусть $f(x)=x(2-x^2)^6$,

тогда

$$f(c)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 x(2-x^2)^6dx=\left|\begin{array}{l}2-x^2=t;\\ -2xdx=dt;\\ xdx=-\dfrac{dt}{2};\\ t_1=2;t_2=1\end{array}\right|=-\int_2^1 t^6\cdot\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 t^6dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^7}{7}\Big|_1^2=\frac{1}{14}(2^7-1)=\frac{127}{14}\,.$$

2) Пусть $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$,

тогда

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2}\,|\cos\frac{x}{2}|\,dx\,.$$

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ функция $cos\frac{x}{2}>0$, следовательно, $|cos\frac{x}{2}|=cos\frac{x}{2}$. Тогда

$$f(c)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos\frac{x}{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\cdot sin\frac{x}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(sin\frac{\pi}{4}-sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{\pi}.$$

3) Пусть $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$,

тогда

$$f(c)=\frac{1}{3-1}\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}=\left|\begin{array}{l} t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}; \\ dx=-\frac{dt}{t^2}; \\ t_1=1;\quad t_2=\frac{1}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{1/3}\frac{t\cdot(-dt)}{t^2\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}}=\frac{1}{2}\int_{1/3}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+5t+t^2}{t^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/3}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+5t+t^2}}=\frac{1}{2}\int_{1/3}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/3}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}=\frac{1}{2}ln\left(t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right)\Big|_{1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(ln(1+\frac{5}{2}+\sqrt{7}\,)-ln(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{5}{3}+1}\,)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(ln(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\,)-ln(\frac{17}{6}+\frac{5}{3})\right)=\frac{1}{2}\left(ln\frac{7+2\sqrt{7}}{2}-ln\frac{9}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

6.8. Площадь плоской фигуры

1.Пусть $y=f(x)$ – непрерывная неотрицательная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми y = 0, x = a, x = b (рис. 6.1), может быть найдена по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

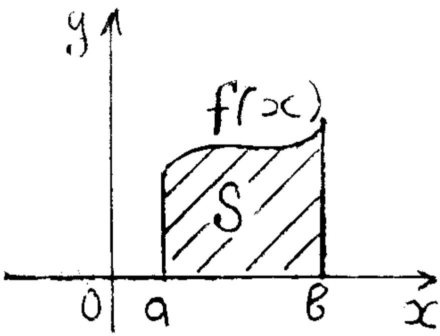

Рис. 6.1

2.Пусть $y=f_1(x), y=f_2(x)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Причем $f_1(x)\le f_2(x)$ на $[a,b]$. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и прямыми x = a, x = b (рис. 6.2), может быть найдена по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

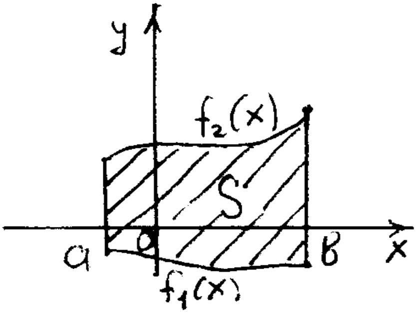

Рис. 6.2

3. Иногда (рис. 6.3) для вычисления площади плоской фигуры удобнее пользоваться формулой, в которой интегрирование ведется по переменной y. В этом случае переменная x рассматривается как функция от переменной y. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной слева функцией $f_1(y)$, справа функцией $f_2(y)$ ($f_1(y) \leq f_2(y)$ на отрезке [a,b]), а сверху и снизу прямыми $y = b$ и $y = a$, может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(y) - f_1(y))dy.$$

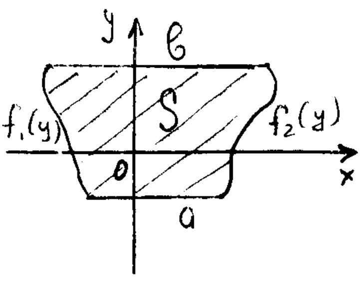

Рис. 6.3

4.Если требуется вычислить площадь более сложной фигуры, то необходимо ее разбить на несколько частей, площадь каждой из которых можно вычислить, применяя предыдущие формулы.

5. Пусть кривая ℓ задана в параметрической форме уравнениями

$$\ell : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } \begin{matrix} x(t_1) = a, \\ x(t_2) = b, \end{matrix}$$

а функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, и функция $x(t)$, кроме того, имеет на этом отрезке непрерывную производную.

Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой ℓ и прямыми $x = a, x = b$ $(a < b)$ может быть найдена по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt .$$

С помощью этой формулы можно также вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой. Тогда изменение параметра t от значения t_1 до значения t_2 должно соответствовать обходу контура по часовой стрелке.

6. Пусть кривая ℓ задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами *OA* и *OB*, соответствующими значениям $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ (рис.6.4), может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(r(\varphi) \right)^2 d\varphi .$$

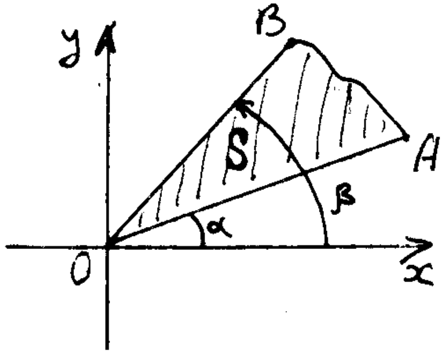

Рис. 6.4

Пример 6.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2, y = 0, x = 2$;

2) $y = x, y = \dfrac{1}{x}, y = 0, x = e$;

3) $y = x^2 - 4x + 5, y = x + 1$;

4) $y = -2x^2 - 5x + 1, x = -5, x = -4, y = 0$;

5) $y = -x^2 + 6x - 5, y = -x^2 + 4x - 3, y = 3x - 15$;

6) $y^2 = x + 1, y = x - 1$;

7) $x^2 + 4x - y^2 = 0, y^2 = 2x + 8$.

Решение:

1) $y = x^2, y = 0, x = 2$.

Данная фигура ограничена параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0, x = 2$. Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.5).

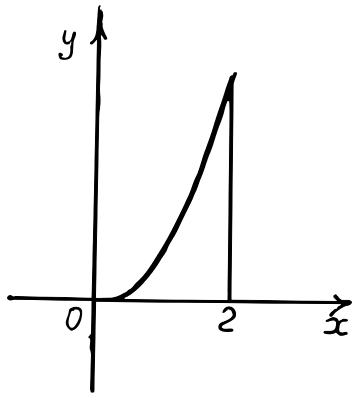

Рис. 6.5

Тогда $S=\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{8}{3}$.

2) $y=x, y=\frac{1}{x}, y=0, x=e$.

Данная фигура ограничена гиперболой $y=1/x$ и прямыми $y=x, y=0, x=e$. Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.6).

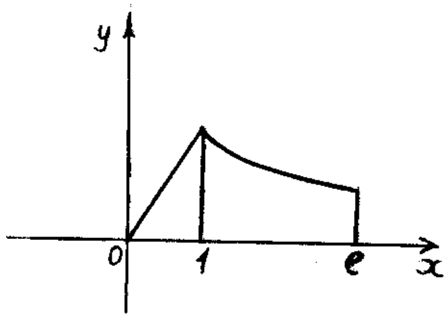

Рис 6.6

Разобьем фигуру с помощью прямой $x=1$ на две части: криволинейную трапецию, ограниченную функцией $y=x$ и криволинейную трапецию, ограниченную функцией $y=\frac{1}{x}$, и найдем площади каждой из получившихся фигур:

$$S_1=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$S_2=\int_1^e \frac{dx}{x}=ln\,|\,x\,|\left.\vphantom{\frac{dx}{x}}\right|_1^e=ln\,e-ln1=1.$$

Тогда

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

3) $y=x^2-4x+5, y=x+1.$

Данная фигура ограничена параболой $y=x^2-4x+5$ и прямой $y=x+1.$ Ветви параболы направлены вверх. Найдем вершину параболы:

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2;\quad y_в = y(2) = 4 - 8 + 5 = 1$, то есть точка $A(2,1)$ - вершина параболы.

Прямая проходит через точки с координатами (0, 1); (-1.0).

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.7).

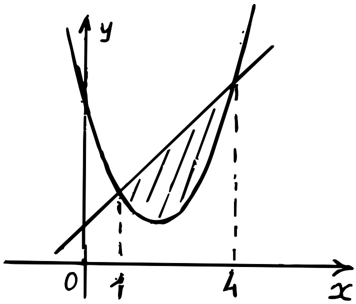

Рис 6.7

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 4x + 5$ и $y = x + 1$.

Для этого решим уравнение $x^2 - 4x + 5 = x + 1$. Из квадратного уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ найдем корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

Тогда

$$S = \int_1^4 (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_1^4 (x + 1 - (x^2 - 4x + 5))dx =$$

$$=\int_1^4 (5x-x^2-4)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4=\frac{5}{2}(16-1)-\frac{1}{3}(64-1)-4(4-1)=$$

$$=\frac{75}{2}-\frac{63}{32}-12=9.$$

4) $y=-2x^2-5x+1, x=-5, x=-4, y=0$.

Решение

Данная фигура ограничена параболой $y=-2x^2-5x+1$ и прямыми $x=-5, x=-4, y=0$. Ветви параболы направлены вниз. Найдем вершину параболы:

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{4};$$

$$y_в=y\left(-\frac{5}{4}\right)=-2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2-5\left(-\frac{5}{4}\right)+1=-\frac{25}{8}+\frac{25}{4}+1=\frac{33}{8}.$$

Точка $A\left(-\frac{5}{4};\frac{33}{8}\right)$ – вершина параболы,

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.8).

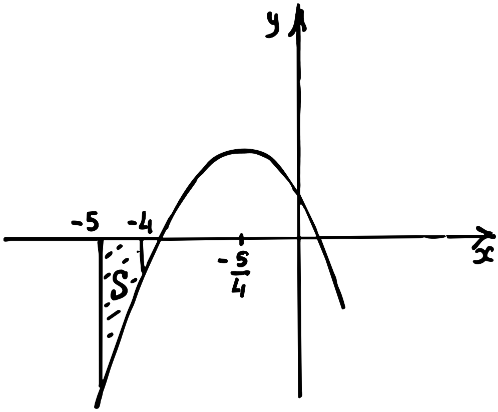

Рис. 6.8

Так как наша функция на отрезке $[-5, -4]$ отрицательная, то

$$S = \int_a^b \left(- f(x)\right) dx .$$

Тогда $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{-5}^{-4} \left(2x^2 + 5x - 1\right) dx =$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x \right)\Bigg|_{-5}^{-4} = \left(\frac{2(-4)^3}{3} + \frac{5(-4)^2}{2} - (-4) \right) - \left(\frac{2(-5)^3}{3} + \frac{5(-5)^2}{2} - (-5) \right) =$$

$$= -\frac{128}{3} + 40 + 4 + \frac{250}{3} - \frac{125}{2} - 5 = 39 + \frac{122}{3} - \frac{125}{2} = 39 + \frac{244 - 375}{6} =$$

$$= 39 - \frac{131}{6} = \frac{234 - 131}{6} = \frac{103}{6} .$$

5) $y = -x^2 + 6x - 5,\ y = -x^2 + 4x - 3,\ y = 3x - 15 .$

Данная фигура ограничена параболами $y=-x^2+6x-5, y=-x^2+4x-3$ и прямой $y=3x-15$.

Ветви обоих парабол направлены вниз. Точка $M(2,1)$- вершина параболы $y=-x^2+4x-3$, а точка $K(3,4)$ - вершина параболы $y=-x^2+6x-5$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.9).

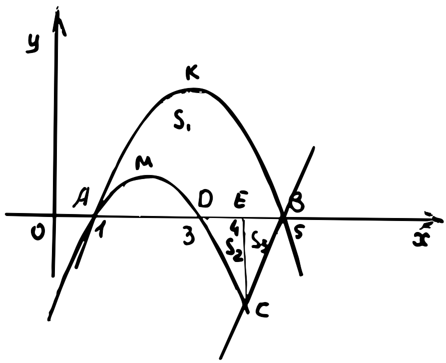

Рис 6.9

Точки A,B,D- точки пересечения данных парабол с осью *OX*. Найдем абсциссы этих точек. Для этого решим уравнения $-x^2+6x-5=0$ и $-x^2+4x-3=0$. Корнями первого уравнения являются числа $x_1=1$ и $x_2=5$, а корнями второго уравнения являются числа $x_1=1$ и $x_3=3$. Следовательно, координаты точек $A(1,0), B(5,0), D(3,0)$.

Для определения координат точки C – точки пересечения параболы $y=-x^2+4x-3$ и прямой $y=3x-15$ решим уравнение

$$-x^2+4x-3=3x-15.$$

Решая квадратное уравнение $x^2 - x - 12 = 0$, найдем, что $x = -3$ или $x = 4$. Абсцисса точки C положительная, следовательно, координаты точки C(4, -3).

Разобьем данную фигуру прямыми $x = 4$ на две части: первая часть сверху ограничена параболой $y = -x^2 + 6x - 5$, а снизу параболой $y = -x^2 + 4x - 3$; вторая часть сверху ограничена параболой $y = -x^2 + 6x - 5$, а снизу прямой $y = 3x - 15$. Вычислим площади каждой из получившихся фигур.

$$S_1 = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5 - (-x^2 + 4x - 3))dx = \int_1^4 (2x - 2)dx =$$

$$= \left. \left(\frac{2x^2}{2} - 2x \right) \right|_1^4 = (16 - 1) - 2(4 - 1) = 9;$$

$$S_2 = \int_4^5 (-x^2 + 6x - 5 - (3x - 15))dx = \int_4^5 (-x^2 + 3x + 10)dx =$$

$$= \left. \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x \right) \right|_4^5 = -\frac{1}{3}(125 - 64) + \frac{3}{2}(25 - 16) + 10(5 - 4) =$$

$$= -\frac{61}{3} + \frac{27}{2} + 10 = \frac{19}{6}.$$

Тогда $S = S_1 + S_2 = 9 + \frac{19}{6} = \frac{73}{6}$.

6) $y^2 = x + 1, y = x - 1$;

Данная фигура ограничена параболой $y^2 = x + 1$ и прямой $y = x - 1$.

Ось симметрии параболы $y^2 = x+1$- ось OX направлены вниз. Точка $M(-1,0)$- вершина параболы.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.10).

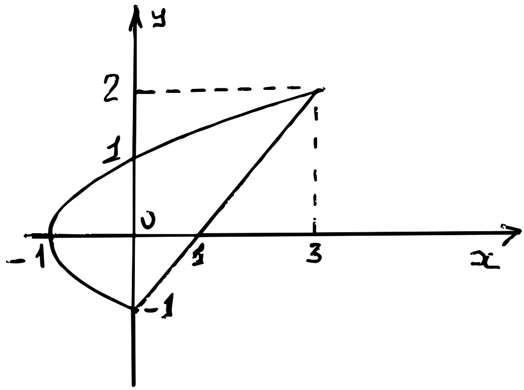

Рис 6.10

В данном примере проще воспользоваться формулой

$$S = \int_a^b (f_2(y) - f_1(y))dy$$, где

$f_2(y) = y+1$, а $f_1(y) = y^2 - 1$.

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций $y^2 = x+1$ и $y = x-1$.

Для этого решим уравнение $y^2 - 1 = y+1$. Из квадратного уравнения $y^2 - y - 2 = 0$ найдем $y_1 = -1$ и $y_2 = 2$.

Тогда

$$S = \int_{-1}^{2} (f_2(y) - f_1(y))dy = \int_{-1}^{2} (y+1-(y^2-1))dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4-1) - \frac{1}{3}(8+1) + 2(2+1) =$$

$$= \frac{3}{2} - 3 + 6 = \frac{9}{2}.$$

7) $x^2 + 4x - y^2 = 0,\ y^2 = 2x + 8$.

Данная фигура ограничена параболой $y^2 = 2x + 8$ и правой ветвью гиперболы $x^2 + 4x - y^2 = 0$.

Ось симметрии параболы $y^2 = 2x + 8$ - ось OX. Точка $M(-4, 0)$ - вершина параболы.

В уравнении $x^2 + 4x - y^2 = 0$ выделим полный квадрат по переменной *x*:

$$(x+2)^2 - y^2 = 4.$$

Получили уравнение равносторонней гиперболы с центром в точке $A(-2,0)$ и полуосями $a = b = 2$. Вершины данной гиперболы- точки $B_1(-4,0)$ $B_2(0,0)$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.11).

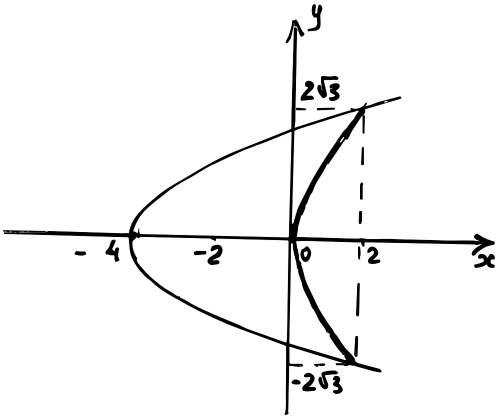

Рис 6.11

В данном примере проще воспользоваться формулой

$$S = \int_a^b (f_2(y) - f_1(y))dy$$

Найдем функции $f_2(y)$ и $f_1(y)$:

$$(x+2)^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{4+y^2}$$

Так как $x \geq 0$, то перед корнем выбираем знак “+”.

Тогда $x = \sqrt{4+y^2} - 2$.

Из уравнения $y^2 = 2x + 8$ выразим $x = \dfrac{y^2}{2} - 4$.

Данная фигура симметрична относительно оси абсцисс, следовательно, ее площадь равна двум площадям фигуры, лежащей выше оси *OX*.

Тогда

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}} (f_2(y) - f_1(y))dy = 2\int_0^{2\sqrt{3}} (\sqrt{y^2+4} - 2 - (\frac{y^2}{2} - 4))dy =$$

$$= 2\int_0^{2\sqrt{3}} (\sqrt{y^2+4} + 2 - \frac{y^2}{2})dy = 2\int_0^{2\sqrt{3}} (\sqrt{y^2+4})dy +$$

$$+ 2\int_0^{2\sqrt{3}} (2 - \frac{y^2}{2})dy .$$

Для вычисления интеграла $\int_0^{2\sqrt{3}} (\sqrt{y^2+4})dy$ воспользуемся подстановкой Эйлера:

$$t = \sqrt{x^2+4} + x .$$

Выразим переменную *x* через переменную *t*:

$$\sqrt{x^2+4} = t - x \Rightarrow x^2 + 4 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-4}{2t} .$$

Тогда $\sqrt{x^2+4} = t - x = t - \frac{t^2-4}{2t} = \frac{t^2+4}{2t}$;

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2-4)}{4t^2} dt = \frac{t^2+4}{2t^2} dt .$$

Найдем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4} + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} ,\ t_2 = 2 .$$

Тогда

$$\int_0^{2\sqrt{3}}(\sqrt{y^2+4})dy = \int_0^{4+2\sqrt{3}} \frac{t^2+4}{2t}\cdot\frac{t^2+4}{2t^2}dt =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{4+2\sqrt{3}} \frac{t^4+8t^2+16}{t^3}dt = =\frac{1}{4}\int_2^{4+2\sqrt{3}}\left(t+\frac{8}{t}+\frac{16}{t^3}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+8\ln|t|-\frac{16}{2t^2}\right)\Bigg|_2^{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\Big((4+2\sqrt{3})^2-4\Big)+2\Big(\ln(4+2\sqrt{3})-\ln 2\Big)-$$

$$-2\left(\frac{1}{(4+2\sqrt{3})^2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\Big(16+12+16\sqrt{3}-4\Big)+2\ln\frac{4+2\sqrt{3}}{2}-$$

$$-2\left(\frac{(4-2\sqrt{3})^2}{(4+2\sqrt{3})^2(4-2\sqrt{3})^2}-\frac{1}{4}\right)=3+2\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})-$$

$$-2\left(\frac{16+12-16\sqrt{3}}{(16-12)^2}-\frac{1}{4}\right)=3+2\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})-$$

$$-2\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}\right)=3+2\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})-2\frac{3-2\sqrt{3}}{2}=$$

$$=3+2\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})-3+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3}).$$

Вычислим

$$\int_0^{2\sqrt{3}}(2-\frac{y^2}{2})dy=\left(2y-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-\frac{1}{6}(24\sqrt{3})=4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=0\,.$$

Тогда $S=2(4\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3}))=8\sqrt{3}+4\ln(2+\sqrt{3})$.

Пример 6.12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 8cos^3 t, \\ y = 6sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\,(x \le 1)$;

2) $\begin{cases} x = 4cos\, t, \\ y = 25 sin\, t, \end{cases}$ $y = \dfrac{25}{2}$, $(y \ge \dfrac{25}{2})$;

3) Площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды: $\begin{cases} x = 4(t - sin\, t) \\ y = 4(1 - cos\, t) \end{cases}$ и осью абсцисс.

4) площадь петли линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$.

Решение

Площадь фигуры, ограниченной линией, заданной параметрическими уравнениями, может быть найдена по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,.$$

1) $\begin{cases} x = 8cos^3 t, \\ y = 8sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\,(x \le 1)$.

Данная фигура ограничена астроидой $\begin{cases} x = 8cos^3 t \\ y = 8sin^3 t \end{cases}$ и прямой $x = 1$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.12).

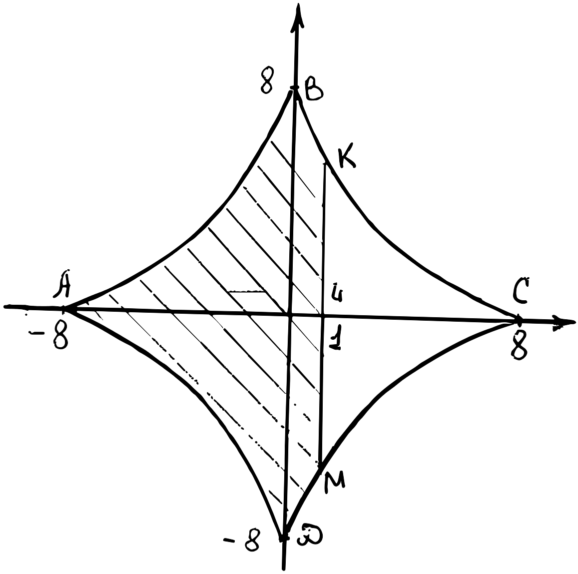

Рис 6.12

Фигура симметрична относительно оси абсцисс, следовательно, ее площадь можно найти как удвоенную площадь криволинейной трапеции $ABKL$, то есть $S = 2S_1$.

Найдем производную функции $x = x(t)$: $x' = -8 \cdot 3cos^2 t \cdot sin t = -24 cos^2 t \cdot sin t$.

Найдем пределы интегрирования. В данном случае переменная x изменяется от значения $a = -8$ до значения $b = 1$. Найдем значение параметра *t*, соответствующее этим значениям.

Полагая в уравнении $x = 8cos^3 t$ сначала $x = -8$, а затем $x = 1$, получим пределы интегрирования $t_1 = \pi$, $t_2 = \pi / 3$.

Тогда

$$S_1=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt=-24\int\limits_{\pi}^{\pi/3} 8\sin^3 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=$$

$$=-192\int\limits_{\pi}^{\pi/3}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt=-192\int\limits_{\pi}^{\pi/3}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=24\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt=24\int\limits_{\pi/3}^{\pi}dt-24\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\cos 2tdt-$$

$$-24\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}dt+24\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\cos^3 2tdt=24t\Big|_{\pi/3}^{\pi}-12\sin 2t\Big|_{\pi/3}^{\pi}-$$

$$-12t\Big|_{\pi/3}^{\pi}-12\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\cos 4tdt+12\int\limits_{\pi/3}^{\pi}(1-\sin^2 2t)d\sin 2t=24\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-$$

$$-12(\sin 2\pi-\sin\frac{2\pi}{3})-12\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{12}{4}\sin 4t\Big|_{\pi/3}^{\pi}+$$

$$+12\int\limits_{\sqrt{3}/2}^{0}(1-u^2)du=16\pi+12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-8\pi-3(\sin 4\pi-\sin\frac{4\pi}{3})+$$

$$+12u\Big|_{\sqrt{3}/2}^{0}-4u^3\Big|_{\sqrt{3}/2}^{0}=8\pi+6\sqrt{3}-3\frac{\sqrt{3}}{2}-12\frac{\sqrt{3}}{2}+4\frac{3\sqrt{3}}{8}=8\pi$$

Тогда $S=2S_1=16\pi$.

2) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=25\sin t, \end{cases}$ $y=\dfrac{25}{2}$, ($y\geq\dfrac{25}{2}$).

Данная фигура ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{625}=1$ с центром в начале координат и полуосями $a=4, b=25$ и прямой $y=\dfrac{25}{2}$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.13).

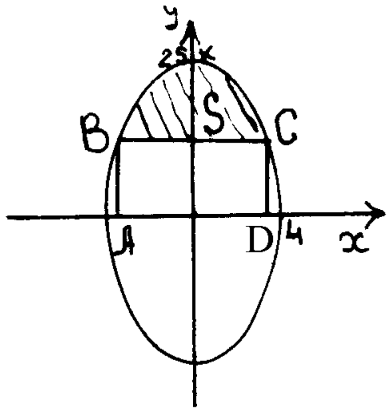

Рис. 6.13

Точки B,C - точки пересечения эллипса и прямой. Найдем координаты этих точек и соответствующие этим точкам значения параметра t. Для этого решим уравнение $\frac{25}{2} = 25 sin t \Rightarrow sint = \frac{1}{2}$. Тогда получим, что $sint = \frac{1}{2}$.

Так как $0 \le t \le \pi$, то $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Значение параметра $t_2 = \frac{5\pi}{6}$ соответствует точке B, тогда

$$x_B = 4cos\frac{5\pi}{6} = -2\sqrt{3}$$

Значение параметра $t_1 = \frac{\pi}{6}$ соответствует точке C, тогда

$$x_C = 4cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно, координаты точки $C\left(2\sqrt{3},\dfrac{25}{2}\right)$, а координаты точки $B\left(-2\sqrt{3},\dfrac{25}{2}\right)$.

Площадь нашей фигуры найдем как разность между площадью криволинейной трапеции, ограниченной сверху эллипсом, снизу осью абсцисс, а с боков прямыми AB и CD и площадью прямоугольника $ABCD$, то есть

$$S_{BKC} = S_{ABKCD} - S_{ABCD}.$$

$$S_{ABKCD} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (25\sin t)(-4\sin t)dt = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 100\sin^2 t dt =$$

$$= -100\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 50\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 50\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 50\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 50\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{100\pi}{3} + \frac{50\sqrt{3}}{2} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3}.$$

Площадь прямоугольника $ABCD$ найдем как произведение длин его сторон:

$$S_{ABCD} = |AD||AB| = 4\sqrt{3}\,\frac{25}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Тогда

$$S_{BKC} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 50\sqrt{3} = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}.$$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью абсцисс.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.14).

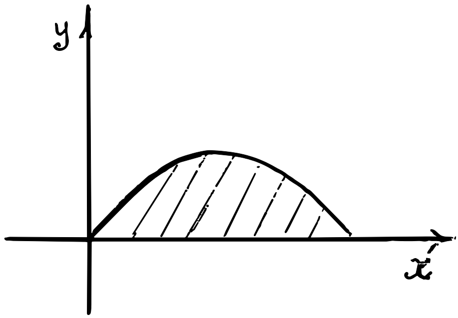

Рис 6.14

Полагая $y = 0$ в уравнении $y = 4(1 - \cos t)$, найдем пределы интегрирования $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos t) \cdot 4(1 - \cos t)dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 16t \Big|_0^{2\pi} - 32\sin t \Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ 16\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 32\pi - 32(\sin 2\pi - \sin 0) + 8t \Big|_0^{2\pi} + 8\int_0^{2\pi} \cos 2t dt =$$

$$= 32\pi + 16\pi + 8\frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 48\pi.$$

4) Найти площадь петли линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}.$

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями и соответствующие им значения параметра t.

При $x = 0$ имеем $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$,

при $y = 0$ имеем $t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ или $t = 0$.

Следовательно, получаем следующие точки пересечения кривой с осями координат - (-1,0),(0,0).

Заметим, что при изменении параметра t от 0 до -1, значение переменной x возрастают от -1 до 0, а значения переменной y положительные. Значит, изменению параметра t от 0 до -1 соответствует верхняя часть петли данной кривой.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.15)

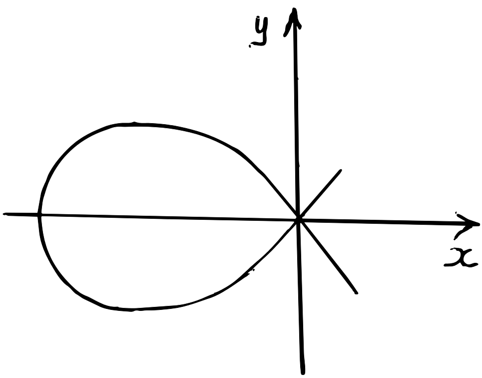

Рис 6.15

Фигура симметрична относительно оси абсцисс, следовательно, ее площадь можно найти как удвоенную площадь части фигуры, лежащей выше оси абсцисс, то есть $S = 2S_1$. Верхняя часть петли кривой проходится в положительном направлении при изменении параметра t от 0 до -1

Тогда

$$S = 2S_1 = 2\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = 2\int_{0}^{-1}(t^3 - t)\cdot 2tdt =$$

$$= 4\int_{0}^{-1}(t^4 - t^2)dt = 4\frac{t^5}{5}\Bigg|_0^{-1} - 4\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{-1} = -\frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Пример 6.13. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) кардиоидой $r = 1 + cos\,\varphi$;

2) первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и осью абсцисс;

3)линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r = cos\,6\varphi$;

4) линиями, заданными в полярной системе координат уравнениями $r = 25cos\,\varphi$, $r = 12cos\,\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

Решение

1) $r = 1 + cos\,\varphi$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.16).

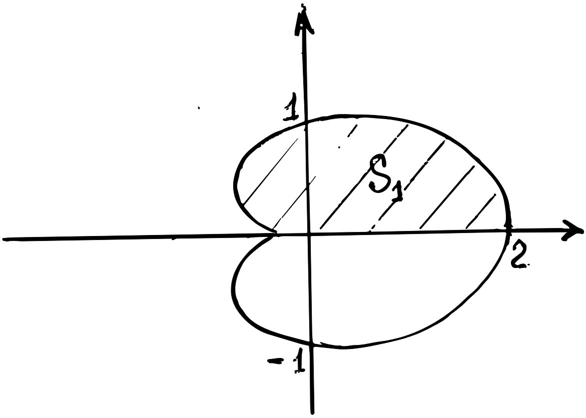

Рис 6.16

Фигура симметрична относительно оси абсцисс, следовательно, ее площадь можно найти как удвоенную площадь части фигуры, лежащей выше оси абсцисс, то есть $S = 2S_1$. Очевидно, что пределы интегрирования: $\alpha = 0, \beta = \pi$.

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi = \int_{0}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \int_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = \varphi\,\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \pi + \frac{\varphi}{2}\,\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\,\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

2) $r = a\varphi$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.17).

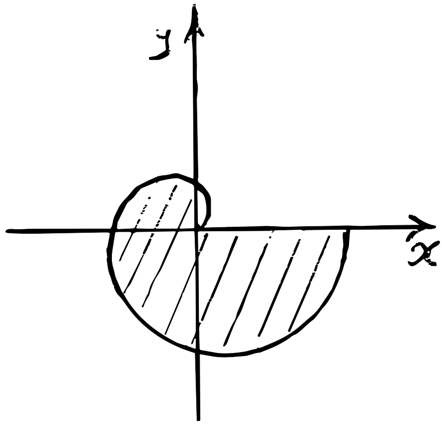

Рис 6.17

Очевидно, что пределы интегрирования: $\alpha = 0, \beta = 2\pi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{a^2}{6}(2\pi)^3 = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

3) $r = cos6\varphi$.

Функция $r = cos6\varphi$ четная и периодическая с периодом $T = \frac{\pi}{3}$, поэтому достаточно построить кривую для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, а затем, воспользовавшись ее периодичностью, построить ее на остальных интервалах. Заметим, что при $\varphi = 0$, $r = 1$, а при $\varphi = \frac{\pi}{12}$, $r = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Функция $r = cos6\varphi$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ монотонно убывает от 1 до 0, а значит, радиус убывает от 1 до 0. На интервале

$\left(\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$ имеем cos6φ < 0, то есть $r < 0$, значит, нет точек линии, расположенных внутри угла $\frac{\pi}{12} < \varphi < \frac{\pi}{4}$. На отрезке $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ функция $r = cos6\varphi$ монотонно возрастает от 0 до 1, а значит, радиус возрастает от 0 до 1.

Так как функция $r = cos6\varphi$ четная и периодическая с периодом $T = \frac{\pi}{3}$, то фигура состоит из шести одинаковых лепестков.

Изобразим 1/6 часть фигуры на координатной плоскости (рис. 6.18)

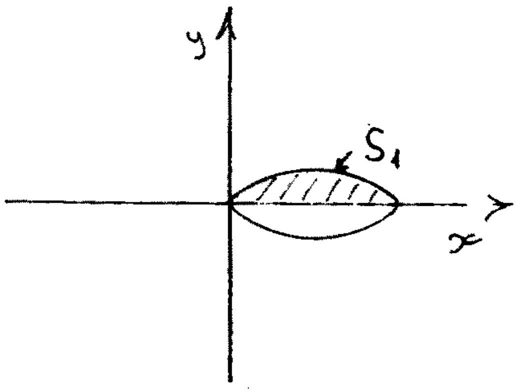

Рис. 6.18

Найдем площадь искомой фигуры как $S = 12S_1$, где S_1- площадь половины лепестка, лежащая выше оси абсцисс.

Тогда

$$S = 12S_1 = 12\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\cos^2 6\varphi d\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{1+\cos 12\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 3\left(\varphi+\frac{\sin 12\varphi}{12}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{12}} = 3\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sin\pi}{12}-\frac{\sin 0}{12}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4) $r = 25\cos\varphi$, $r = 12\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

Заметим, что уравнение $r = 25\cos\varphi$ задает уравнение окружности, радиус которой равен $\dfrac{25}{2}$, центр окружности находится в точке $A(\dfrac{25}{2},0)$, а уравнение $r = 12\cos\varphi$ задает уравнение окружности, радиус которой равен 6, а центр находится в точке $B(0,6)$.

Действительно, если в уравнение окружности $(x-\dfrac{25}{2})^2 + y^2 = \dfrac{625}{4}$ подставим полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ то получим, что

$$r^2\cos^2\varphi - 25r\cos\varphi + \frac{625}{4} + r^2\sin^2\varphi = \frac{625}{4} \Rightarrow r^2 = 25r\cos\varphi \Rightarrow$$

$r = 25\cos\varphi$.

Если в уравнение окружности $(x-6)^2 + y^2 = 36$ подставим полярные координаты, то получим, что

$$r^2\cos^2\varphi - 12r\cos\varphi + 36 + r^2\sin^2\varphi = 36 \Rightarrow r = 12\cos\varphi.$$

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.19)

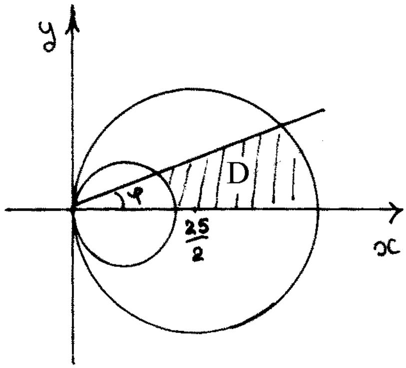

Рис. 6.19

По условию задачи пределы интегрирования равны $\alpha = 0, \beta = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi))d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}((25\cos\varphi)^2 - (12\cos\varphi)^2)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}481\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{481}{4}\int_{0}^{\pi/6}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{481}{4}\varphi\,\Bigg|_0^{\pi/6} + \frac{481}{8}\sin 2\varphi\,\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{481}{4}\cdot\frac{\pi}{6} +$$

$$+ \frac{481}{8}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{481\pi}{24} + \frac{481\sqrt{3}}{16}.$$

6.9. Длина дуги кривой

Длиной дуги кривой называется предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной при неограниченном увеличении числа ее сторон и при стремлении длины наибольшей из этих сторон к нулю, если этот предел существует.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, а функция $f(x)$ и ее первая производная $f'(x)$ непрерывны. Тогда длина дуги кривой может быть найдена по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Пусть кривая задана в параметрической форме на плоскости уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда длина дуги кривой может быть найдена по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2 + \left(y_t'(t)\right)^2}\,dt.$$

Пусть кривая задана в параметрической форме в пространстве уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, а функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, имеют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда длина дуги кривой может быть найдена по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2 + \left(y_t'(t)\right)^2 + \left(z_t'(t)\right)^2}\,dt.$$

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, а функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда длина дуги кривой может быть найдена по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi..$$

Пример 6.14. Вычислить длину дуги кривой.

1) $y=-2\sqrt{x}-5$, $1\le x\le 4$;

2) $y=1-ln\,sin\,x$, $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases}x=25(t-\sin t)\\ y=25(1-\cos t)\end{cases}$, $\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{6}$;

4) $\begin{cases}x=e^{t}(cos\,t+sin\,t\,)\\ y=e^{t}(cos\,t-sin\,t\,)\end{cases}$, $\quad \dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{\pi}{4}$;

5) $r=2e^{\frac{5}{8}\varphi}$, $\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}$;

6) $r=3(1-sin\,\varphi\,)$, $\ -\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}$;

Решение

1) $y=-2\sqrt{x}-5$, $\ 1\le x\le 4$.

Найдем производную:

$$y'=-\frac{2}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}\ .$$

Тогда

$$\ell\ =\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int\limits_1^4\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}1+\dfrac{1}{x}=t^2,\ \dfrac{1}{x}=t^2-1,\ x=\dfrac{1}{t^2-1}\\ dx=-\dfrac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\\ t_1^2=1+1=2\Rightarrow\ t_1=\sqrt{2}\\ t_2^2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow t_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{array}\right|=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}t\left(-\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\right)dt=-2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt=$$

Интегрируем по частям:

$$=\left|\begin{matrix} u=t, \qquad dv=\dfrac{t}{\left(t^2-1\right)^2}dt, \\ du=dt, v=\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-1} \end{matrix}\right|=$$

$$=-2\left(-\frac{t}{2\left(t^2-1\right)}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{dt}{t^2-1}\right)=\frac{t}{\left(t^2-1\right)}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{4}-1}-\frac{\sqrt{2}}{2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\frac{\sqrt{5}\cdot 4}{2\cdot 1}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\mathbf{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|}.$$

2) $y=1-ln\,sin\,x,\quad \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}.$

Найдем производную:

$$y'=-\frac{cos\,x}{sin\,x}.$$

Тогда

$$\ell=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\left(-\frac{cos\,x}{sin\,x}\right)^2}dx=$$

$$=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{sin^2\,x+cos^2\,x}{sin^2\,x}}dx=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{sin^2\,x}}dx=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{|\,sin\,x\,|}dx=$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{sin\, x} dx = ln\,|\,tg\,\frac{x}{2}\,|\;\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= ln\,|\,tg\,\frac{\pi}{4}\,| - ln\,|\,tg\,\frac{\pi}{6}\,| = ln 1 - ln\,\frac{1}{\sqrt{3}} = ln\,\sqrt{3}\,.$$

3) $\begin{cases} x = 25(t - \sin t) \\ y = 25(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}.$

Найдем производные от функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = 25(1 - \cos t), \\ y'(t) = 25 \sin t \end{cases}$$

Тогда

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(y'(t)\right)^2 + \left(x'(t)\right)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{25^2 (1 - cos\, t)^2 + 25^2\, sin^2\, t}\, dt =$$

$$= 25 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t}\, dt = 25 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= 25\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 25\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 50 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 50 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 50\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = 100\left(-\cos\frac{\pi}{12} + \cos 0\right) = 100\left(1 - \cos\frac{\pi}{12}\right).$$

4) $\begin{cases} x = e^t (cos\, t + sin\, t) \\ y = e^t (cos\, t - sin\, t) \end{cases}, \qquad \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}.$

Найдем производные от функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = e^t(cost + sint) + e^t(-sin\,t + cos\,t) = 2e^t\ cos\,t \\ y'(t) = e^t(cos\,t - sin\,t) + e^t(-sin\,t - cos\,t) = -2e^t\ sin\,t \end{cases}$$

Тогда

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(y'(t)\right)^2 + \left(x'(t)\right)^2}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{(2e^t\ cos\,t)^2 + (-2e^t\ sin\,t)^2}\,dt =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{4e^{2t}(cos^2 t + sin^2 t)}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2e^t dt = 2e^t \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = 2(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{6}}).$$

5) $r = 2e^{\frac{5}{8}\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

Найдем производную от функции $r = r(\varphi)$:

$$r'(\varphi) = 2 \cdot \frac{5}{8} e^{\frac{5}{8}\varphi} = \frac{5}{4} e^{\frac{5}{8}\varphi}.$$

Тогда

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\left(2e^{\frac{5}{8}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}e^{\frac{5}{8}\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4e^{\frac{5}{4}\varphi} + \frac{25}{16}e^{\frac{5}{4}\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{64+25}{16}} e^{\frac{5}{8}\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{89}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\frac{5}{8}\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{89}}{4} \frac{8}{5} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\frac{5}{8}\varphi} d\left(\frac{5}{8}\varphi\right) = \frac{2\sqrt{89}}{5} e^{\frac{5}{8}\varphi} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{89}}{5}\left(e^{\frac{5}{8}\cdot\frac{\pi}{6}} - e^0\right) = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{89}}{5}\left(e^{\frac{5\pi}{48}} - 1\right)}.$$

6) $r = 3(1 - sin\,\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

Найдем производную от функции $r = r(\varphi)$:

$r'(\varphi) = 3(-\cos\varphi)$.

Тогда

$$\ell = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{\left(3(1-\sin\varphi)\right)^2 + \left(-3\cos\varphi\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\, d\varphi = 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{2-2\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)}\, d\varphi = 3\sqrt{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})}\, d\varphi =$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{2}\,|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})|\, d\varphi = 6\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\, d\varphi =$$

$$= 6(-\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}))\cdot(-2)\,\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = 12\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\,\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} =$$

$$= 12(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12})-\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})) = 12(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}) =$$

$$= 12(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}) = 6(\sqrt{3}-1).$$

6.10. Объем тела и площадь поверхности вращения

Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

Рассмотрим тело, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью. Пусть известна площадь любого сечения тела плоскостью перпендикулярной к оси абсцисс, причем площадь такого сечения является функцией $S(x)$, зависящей от положения секущей плоскости, и функция $S(x)$ является непрерывной функцией на отрезке [a,b]. Тогда объем тела вычисляется по формуле:

$$V=\int_a^b S(x)dx,$$ где a и b- абсциссы крайних сечений тела.

Объем тела вращения

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $y=0$, $x=a$ и $x=b$ ($a \le x \le b$), вращается вокруг оси OX или OY. Тогда объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси OX, находится по формуле

$$V_{OX}=\pi\int_a^b f^2(x)dx,$$

а вокруг оси OY – по формуле

$$V_{OY}=2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $x=g(y)$, осью OY и двумя параллелями $y = c$ и $y = d$, можно найти по формуле:

$$V_{OY}=\pi\int_c^d g^2(y)dy.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть некоторая дуга гладкой кривой $y=f(x)$, где $a\le x\le b$ вращается вокруг оси абсцисс. Тогда площадь поверхности вращения может быть найдена по формуле:

$$Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Пусть дуга гладкой кривой, заданной в параметрической форме уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, вращается вокруг оси абсцисс. Тогда площадь поверхности вращения может быть найдена по формуле:

$$Q_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Пусть дуга гладкой кривой, заданная в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, вращается вокруг оси абсцисс. Тогда площадь поверхности вращения может быть найдена по формуле:

$$Q_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример 6.15. Найти объем тела вращения вокруг оси *OX* и *OY* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = -2e^{-5x}$ и прямыми $x = 16$, $x = 18$, $y = 0$.

Решение

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.20).

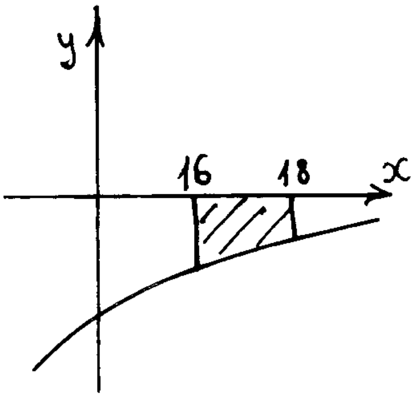

Рис. 6.20

$$V_{OX} = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_{16}^{18} 4e^{-10x}dx = 4\pi\int_{16}^{18} e^{-10x}dx = \frac{4\pi}{-10}e^{-10x}\Big|_{16}^{18} =$$

$$= -\frac{2\pi}{5}\left(e^{-180} - e^{-160}\right) = \frac{2\pi}{5}\left(e^{-160} - e^{-180}\right).$$

$$V_{OY} = 2\pi\int_a^b x\cdot|f(x)|dx = 2\pi\int_{16}^{18} x\cdot 2e^{-5x}dx = 4\pi\int_{16}^{18} x\cdot e^{-5x}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^{-5x}dx \\ du = dx, & v = \dfrac{e^{-5x}}{-5} \end{matrix}\right| = 4\pi\left(-\frac{xe^{-5x}}{5}\Big|_{16}^{18} + \frac{1}{5}\int_{16}^{18} e^{-5x}dx\right) =$$

$$= 4\pi\left(-\frac{18e^{-90}}{5} + \frac{16e^{-80}}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-5x}}{-5}\Bigg|_{16}^{18} \right) = 4\pi\left(\frac{16e^{-80}}{5} - \frac{18e^{-90}}{5} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{25}\cdot\left(e^{-90} - e^{-80}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}\left(16e^{-80} - 18e^{-90} + \frac{e^{-80}}{5} - \frac{e^{-90}}{5} \right) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{4\pi}{25}\left(81e^{-80} - 91e^{-90}\right)}.$$

Пример 6.16. Найти объем тела вращения вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной параболами $2x - x^2 - y = 0$ и $2x^2 - 4x + y = 0$.

Решение

Данная фигура ограничена двумя параболами, ветви которых направлены вниз. Вершина первой параболы – точка с координатами (1,1); Вершина второй параболы - точка (1,2).

Найдем точки пересечения парабол с осью абсцисс. Для этого решим уравнения $2x - x^2 = 0$ и $2x^2 - 4x = 0$. Корнями и первого и второго уравнения являются числа $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

$$V_{OX} = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.21).

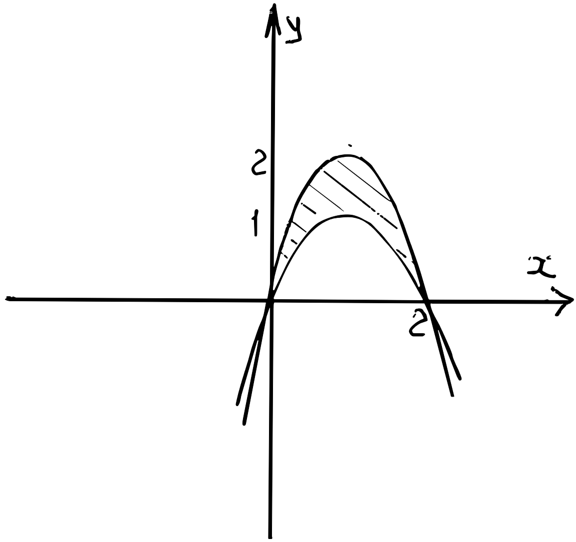

Рис 6.21.

Искомый объем , равен разности объемов тел, образованных вращением парабол $2x^2 - 4x + y = 0$ и $2x - x^2 - y = 0$.

$V = V_1 - V_2$, где

$$V_1 = \pi \int_0^2 (4x - 2x^2)^2 \, dx;$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 \, dx.$$

Тогда

$$V = \pi \int_0^2 (4x - 2x^2)^2 \, dx - \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^2 (16x^2 - 16x^3 + 4x^4 - (4x^2 - 4x^3 + x^4)) dx =$$

$$= \pi \int_0^2 (12x^2 - 12x^3 + 3x^4)dx = \pi\left(\frac{12x^3}{3} - \frac{12x^4}{4} + \frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi(32 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot \frac{32}{5}) = \frac{16\pi}{5}.$$

Пример 6.17. Найти объем тела вращения вокруг оси OY трапеции, ограниченной линиями

$$y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$$

Решение

Данная фигура ограничена гиперболой $y = x^3$, прямыми $y = 0, y = 1$ и параболой $y^2 = x - 2$, осью симметрии которой служит ось OX, а вершина параболы – точка М (2,0).

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 6.22).

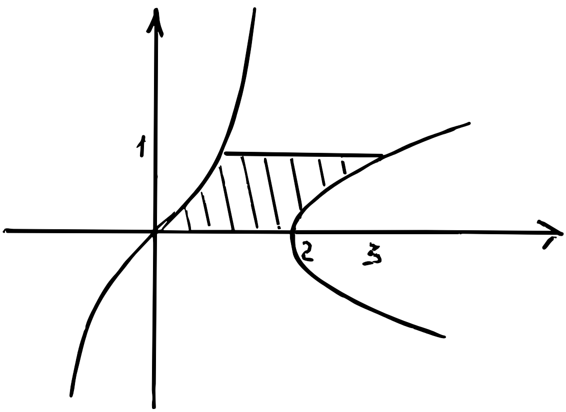

Рис 6. 22

В данном случае проще воспользоваться формулой

$$V_{OY} = \pi \int_a^b f^2(y)dy.$$

Тогда искомый объем, равен разности объемов тел, образованных вращением параболы $y^2 = x - 2$ и гиперболы $y = x^3$ вокруг оси OY.

$V = V_1 - V_2$, где

$$V_1 = \pi \int_0^2 (y^2 + 2)^2 dy;$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 (\sqrt[3]{y})^2 dy.$$

$$V = \pi \int_0^1 ((y^2 + 2)^2 - (\sqrt[3]{y})^2) dy = \pi \int_0^1 (y^4 + 4y^2 + 4 - y^{2/3}) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3} + 4y - \frac{3y^{5/3}}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{3}{5} \right) = \frac{74\pi}{15}.$$

6.11. Несобственные интегралы

Рассматривая определенный интеграл, мы считали, что отрезок интегрирования конечен и подынтегральная функция ограничена. Однако, довольно часто возникает необходимость распространить определение определенного интеграла на случаи бесконечного интервала интегрирования и случаи неограниченной подынтегральной функции.

Интегралы на бесконечном промежутке (несобственные интегралы первого рода).

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ определена для любого $x \ge a$, где a-фиксированное число, и интегрируема на отрезке при любом $b \ge a$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$ или несобственным интегралом первого рода.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx = A$, то говорят, что несобственный интеграл сходится и равен A, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a,+\infty)$. Если же конечного предела не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Интеграл на бесконечном промежутке вида $(-\infty,b)$ определяется точно так же:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx .$$

Интеграл на бесконечном промежутке $(-\infty,\infty)$ разложим на сумму двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Данный несобственный интеграл сходится, тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx$ и $\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$. Если хотя бы один из указанных пределов не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Интеграл на конечном промежутке от неограниченной функции (несобственные интегралы второго рода).

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном полуинтервале $[a,b)$, интегрируема на отрезке $[a,c]$ для любого $c \geq a$, но не ограничена в некоторой левой полуокрестности $(b-\varepsilon,b), \varepsilon > 0$, точки b. Тогда интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$- несобственный интеграл второго рода. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$, то говорят, что несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$, сходится, и равен A. Если же конечного предела не существует, то несобственный интеграл расходится.

Аналогично, если функция $f(x)$ не ограничена на интервале $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

сходится, если указанный предел существует и конечен; и расходится, если предел не существует или равен бесконечности.

Если же функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ не ограничена только в окрестности точки $c \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Если пределы в правой части существуют и конечны, то несобственный интеграл сходится; если же хотя бы один из этих пределов не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

Свойства несобственных интегралов.

Будем рассматривать несобственные интегралы первого и второго рода, предполагая что

а) функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, где b - либо конечная точка, либо символ $+\infty$;

б) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,c]$ для любого $c \in [a,b)$.

То есть, рассматриваем несобственные интегралы вида:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx, \text{ если } b=+\infty;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \text{ если } b\neq+\infty.$$

Для несобственных интегралов первого и второго рода справедливы следующие свойства:

1) Если сходятся несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке [*a*,*b*), то для любых чисел $\alpha,\beta\in\Re$ сходится несобственный интеграл от функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$ на промежутке [*a*,*b*), причем

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2) Для несобственных интегралов верна формула интегрирования по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на промежутке [*a*,*b*) и имеют непрерывные производные на любом отрезке [*a*,*c*], где $a<c<b$, то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

3) Для несобственных интегралов верна формула Ньютона-Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке [*a*,*b*) и $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{c\to b}F(c)$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b}F(c)-F(a).$$

4) Замена переменной в несобственном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке [*a*,*b*); а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta)$, где β может быть как конечным числом, так и символом

∞; функция $x=\varphi(t)$ монотонна на этом промежутке и удовлетворяет условиям $\varphi(\alpha)=a,\ \lim\limits_{t\to\beta-0}=b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

при условии, что хотя бы один из этих интегралов сходится.

5) Теоремы сравнения

В большинстве задач вычислять несобственный интеграл не требуется, а необходимо лишь установить сходится этот интеграл или расходится. Вопрос о сходимости несобственного интеграла решается с помощью теорем сравнения.

Первая теорема сравнения

Пусть для любого $x\in[a,b)$, выполнено условие $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда

1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Вторая теорема сравнения

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и неотрицательны для любого $x\ge a$, $g(x)\ne 0$ и пусть

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0,$$ где c – некоторая константа.

Тогда интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

В качестве интегралов для сравнения часто используются интегралы от степенной функции:

$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, где, $a>0$, и $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^n}$.

Покажем, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ сходится при $n>1$ и расходится при $n \le 1$.

Пусть $n \ne 1$, тогда

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \left.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right|_a^\infty = \frac{1}{1-n}\lim_{b\to+\infty} b^{1-n} - \frac{a^{1-n}}{1-n}.$$

Если $n>1$, то показатель степени $1-n<0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-n} = 0$, следовательно, в этом случае несобственный интеграл сходится.

Если $n<1$, то показатель степени $1-n>0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-n} = +\infty$, следовательно, в этом случае несобственный интеграл расходится.

Пусть $n=1$, тогда

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x} = ln\,|\,x\,|\Big|_a^\infty = \lim_{b\to+\infty} ln\,|\,b\,| - ln\,a.$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty} ln\,|\,b\,| = +\infty$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ расходится.

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, $a>0$ сходится при $n>1$ и расходится при $n \le 1$.

Покажем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^n}$ сходится при $n<1$ и расходится при $n \ge 1$.

Пусть $n \ne 1$, тогда

$$\int_0^b \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_o^b = \frac{b^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\lim_{a\to 0} a^{1-n}.$$

Если $n > 1$, то показатель степени $1-n < 0$ и $\lim\limits_{a\to 0} a^{1-n} = \infty$, следовательно, в этом случае несобственный интеграл расходится.

Если $n < 1$, то показатель степени $1-n > 0$ и $\lim\limits_{a\to 0} a^{1-n} = 0$, следовательно, в этом случае несобственный интеграл сходится.

Пусть $n = 1$, тогда

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = ln\,|\,x\,|\Big|_0^b = ln\,b - \lim_{a\to +0} ln\,|\,a\,|.$$

Так как $\lim\limits_{a\to +0} ln\,|\,a\,| = -\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ расходится.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^b \frac{dx}{x^n}$ сходится при $n < 1$ и расходится при $n \geq 1$.

Заметим, что признаки сравнения были сформулированы для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Очевидно, что исследование на сходимость несобственного интеграла от отрицательной функции сводится к предыдущему. Более сложным оказывается исследование на сходимость несобственных интегралов от функций, не сохраняющих постоянный знак на заданном интервале.

Абсолютная и условная сходимость интегралов.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется условно сходящимся, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Заметим, что если несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также сходится и выполняется неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Пример 6. 18. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$1)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx; \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx;$$

$$3)\ \int_1^{+\infty} x\sin xdx; \qquad 4)\ \int_2^{+\infty} \frac{ln^2 xdx}{\sqrt{x^3}};$$

$$5)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+8}.$$

Решение

$$1)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=-x^2 \Rightarrow dt=-2xdx; \\ t_1=0; \quad t_2=-\infty \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t \Big|_0^{-\infty} = -\frac{1}{2}(\lim_{b\to-\infty} e^b - e^0) = \frac{1}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{b \to -\infty} e^{b} = 0$, то по определению несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ сходится и его величина равна $\frac{1}{2}$.

$$2)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctgx \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ t_1 = arctg0 = 0;\ t_2 = \lim\limits_{b \to +\infty} arctgb = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{\pi/2} tdt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ сходится и его величина равна $\frac{\pi^2}{8}$.

$$3)\ \int\limits_{1}^{+\infty} x\sin xdx;$$

Вычислим интеграл, применяя интегрирование по частям:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} x\sin xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x \Bigg|_{1}^{+\infty} + \int\limits_{1}^{+\infty} \cos xdx = -\lim_{b \to +\infty} b\cos b + \cos 1 + \sin x \Bigg|_{1}^{+\infty} =$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} b\cos b + \cos 1 + \lim_{b \to +\infty} \sin b - \sin 1.$$

Так как $\lim\limits_{b \to +\infty} b\cos b = \infty$, а $\lim\limits_{b \to +\infty} \sin b$ не существует, то по определению несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x\sin xdx$ расходится.

4) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{ln^2 xdx}{\sqrt{x^3}}$.

Вычислим интеграл, применяя интегрирование по частям:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{ln^2 xdx}{\sqrt{x^3}} = \left| \begin{matrix} u = ln^2 x; & du = \frac{2\,ln\,xdx}{x}; \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; & v = -\frac{2}{\sqrt{x}} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{2\,ln^2 x}{\sqrt{x}} \Bigg|_1^{+\infty} + 2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{ln\,xdx}{\sqrt{x^3}} = \left| \begin{matrix} u = ln\,x; & du = \frac{dx}{x}; \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; & v = -\frac{2}{\sqrt{x}} \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\lim_{b\to+\infty} \frac{ln^2 b}{\sqrt{b}} + \frac{2\,ln^2 1}{\sqrt{1}} + 2\left(-\frac{2\,ln\,x}{\sqrt{x}} \Bigg|_1^{+\infty} + 2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}\right) = I$$

В пределе $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{ln^2 b}{\sqrt{b}}$ имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому для его вычисления можно воспользоваться правилом Лопиталя. Тогда

$$I = -2\lim_{b\to+\infty} \frac{2\,ln\,b / b}{1 / 2\sqrt{b}} - 4\lim_{b\to+\infty} \frac{ln\,b}{\sqrt{b}} - \frac{8}{\sqrt{x}} \Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= -8\lim_{b\to+\infty} \frac{ln\,b}{\sqrt{b}} - 4\lim_{b\to+\infty} \frac{ln\,b}{\sqrt{b}} \Bigg|_2^{+\infty} - \lim_{b\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{b}} + 8 = -12\lim_{b\to+\infty} \frac{ln\,b}{\sqrt{b}} + 8,$$

так как $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{b}} = 0$.

В пределе $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}$ имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому для его вычисления можно воспользоваться правилом Лопиталя. Тогда

$$I=-12\lim_{b\to+\infty}\frac{1/b}{1/(2\sqrt{b})}+8=-12\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{b}}+8=8.$$

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{ln^2 xdx}{\sqrt{x^3}}$ сходится и его величина равна 8.

5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+8}$.

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

Приведем дробь к общему знаменателю и приравняем числитель получившейся дроби к числителю дроби, стоящей слева:

$1=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$. Для нахождения неопределенных коэффициентов A,B и C подставим в получившееся тождество $x=-2,0,1$.

При $x=-2$ имеем $1=12A\Rightarrow A=\frac{1}{12}$;

при $x=0$ имеем $1=4A+2C\Rightarrow 1=\frac{1}{3}+2C\Rightarrow C=\frac{1}{3}$;

при $x=1$ имеем $1=3A+3B+3C\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad 1=3A+3B+3C\Rightarrow 1=\frac{1}{4}+3B+1\Rightarrow B=-\frac{1}{12}.$$

Тогда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{12}\int_1^{+\infty}\frac{(x-4)dx}{x^2-2x+4}=\frac{ln|x+2|}{12}\Bigg|_1^{+\infty}-$$

$$-\frac{1}{12}\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(2x-2)-3}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}ln|x+2|\Bigg|_1^{+\infty}-\frac{1}{24}\int_1^{+\infty}\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+4}+$$

$$+\frac{3}{12}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4}=\frac{1}{12}ln\,|\,x+2\,|\,\Bigg|_1^{+\infty}-\frac{1}{24}ln\,|\,x^2-2x+4\,|\,\Bigg|_1^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{24}ln(x+2)^2\,\Bigg|_1^{+\infty}-\frac{1}{24}ln\,|\,x^2-2x+4\,|\,\Bigg|_1^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}\,\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{24}ln\,\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\,\Bigg|_1^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\lim_{b\to+\infty}arctg\,\frac{b-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\,0=\frac{1}{24}\lim_{b\to+\infty}ln\,\frac{(b+2)^2}{b^2-2b+4}-$$

$-\frac{1}{24}ln\frac{9}{3}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{24}ln\,3+\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$, так как предел $\lim\limits_{b\to+\infty}ln\,\frac{(b+2)^2}{b^2-2b+4}=0$.

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+8}$ сходится и его величина равна $-\frac{1}{24}ln\,3+\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$.

Пример 6. 19. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4-2x^3+5}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^5+4x^2+3x}}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{(5+sin\,x)dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}(ln(1+x^3)-3ln\,x)dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x+4x^2}\cdot\sqrt[3]{x+5}}$; 6) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\,ln\,ln\,x}$.

Решение

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4-2x^3+5}dx.$$

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4-2x^3}$ на эквивалентную при $x \to +\infty$ ей функцию $g(x)=\dfrac{x^3}{x^4}=\dfrac{1}{x}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Так как $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=ln\,|\,x\,|\,\Big|_1^{\infty}=\lim_{b\to+\infty} ln\,|\,b\,|=\infty$, то несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, а значит, по признаку сравнения расходится и несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4-2x^3+5}dx$.

$$2)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+4x^2+3x}};$$

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^5+4x^2+3x}}$ на эквивалентную при $x \to +\infty$ ей

функцию $g(x)=\dfrac{1}{x^{5/2}}$ и исследуем на сходимость несобственный

интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/2}}$.

Так как $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/2}}=-\dfrac{2x^{-\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^{\infty}=-\dfrac{2}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}b^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$, то

несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/2}}$ сходится, а значит, по признаку

сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^5+4x^2+3x}}$.

3) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{(5+\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$.

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода.

Так как для любого *x* верно следующее неравенство:

$\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}} \le \dfrac{5+\sin x}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}} \le \dfrac{6}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$, то для того,

чтобы установить сходимость или расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(5+\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$ достаточно исследовать несобственный

интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$.

Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$ на эквивалентную при $x \to +\infty$ ей функцию $g(x)=\frac{1}{x^{7/5}}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/5}}$.

Так как $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/5}} = -\frac{5x^{-\frac{2}{5}}}{2}\Bigg|_1^{\infty} = -\frac{5}{2}\lim\limits_{b\to+\infty} b^{-\frac{2}{5}} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, то несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/5}}$ сходится, тогда, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$, а значит, сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(5+\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^7+4x+5}}$.

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} (\ln(1+x^3)-3\ln x)dx$

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=ln(1+x^3)-3ln\,x=ln\,\frac{x^3+1}{x^3}=ln(1+\frac{1}{x^3})$ на эквивалентную при $x\to+\infty$ ей функцию $g(x)=\frac{1}{x^3}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$.

Так как $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{x^{-2}}{2}\Bigg|_1^{+\infty}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}b^{-2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, то несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится, а значит, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}(ln(1+x^3)-3ln\,x)dx$.

$$5)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x+4x^2}\cdot\sqrt[3]{x+5}};$$

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4x^2}\cdot\sqrt[3]{x+5}}$ на эквивалентную ей при $x\to+\infty$

функцию $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{x^{5/6}}$ и исследуем на сходимость

несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/6}}$.

Так как $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/6}}=6x^{1/6}\Big|_1^{+\infty}=6\lim\limits_{b\to+\infty}b^{1/6}+6=\infty$, то

несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/6}}$ расходится, а значит по признаку

сравнения расходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x+4x^2}\cdot\sqrt[3]{x+5}}$.

6) $$\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}=\left|\begin{array}{l} t=\ln x; \\ dt=\dfrac{dx}{x}; \\ t_1=\ln e^2=2; \\ t_2=+\infty \end{array}\right|=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dt}{\ln t}.$$

Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dt}{\ln t}$.

Заметим, что для любого $t>0$ верно неравенство $\ln t<t$, тогда $\dfrac{1}{\ln t}>\dfrac{1}{t}$. Несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dt}{t}$ расходится, а значит, расходится по признаку сравнения интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dt}{\ln t}$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$ также расходится по признаку сравнения.

Пример 6. 20. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$1)\ \int\limits_0^1 x\ln x dx; \qquad 2)\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3};$$

$$3)\ \int\limits_{-1}^1 \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}}dx; \qquad 4)\ \int\limits_{-1}^1 \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx;$$

$$5)\ \int\limits_2^4 \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}} \qquad 6)\ \int\limits_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x^2}.$$

Решение

$$1)\ \int\limits_0^1 x\ln x dx.$$

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0{,}1]$ одну особую точку $x=0$. Вычислим данный интеграл, применяя интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^1 x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x; & du=\dfrac{dx}{x}; \\ dv=xdx; & v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2\ln x\ \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx =$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\lim_{b\to 0} b^2\ln b-\frac{x^2}{4}\ \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\lim_{b\to 0}\frac{\ln b}{b^{-2}}-\frac{1}{4}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to 0}\frac{1/b}{-2b^{-3}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\lim_{b\to 0}\frac{b^3}{b}-\frac{1}{4}=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

Здесь для вычисления предела $\lim\limits_{b\to 0} b^2 \ln b$ мы воспользовались правилом Лопиталя.

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x \ln x dx$ сходится и его величина равна $-\frac{1}{4}$.

2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Разложим знаменатель на множители: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0,2]$ одну особую точку $x=1$.

Разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Для сходимости интеграла $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$, выделяя в знаменателе полный квадрат:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{(x-2)-1}{(x-2)+1}\right| \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \lim_{b\to 1} ln\left|\frac{b-3}{b-1}\right| - \frac{1}{2} ln 3 = \infty .$$

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ расходится, а значит, расходится и несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

3) $\int_{-1}^{1} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx$.

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[-1,1]$ одну особую точку $x=0$.

Разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx + \int_{0}^{1} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx .$$

Для сходимости интеграла $\int_{-1}^{1} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int_{-1}^{0} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx$ и $\int_{0}^{1} \frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}} dx$.

Вычислим интеграл

$$\int_{-1}^{0}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}}dx = 2\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt[7]{x^4}} + 5\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[7]{x^4}} = 2\int_{-1}^{0}x^{\frac{3}{7}}dx + 5\int_{-1}^{0}x^{-\frac{4}{7}}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{7x^{\frac{10}{7}}}{10}\Bigg|_{-1}^{0} + 5\cdot\frac{7x^{\frac{3}{7}}}{3}\Bigg|_{-1}^{0} = -2\cdot\frac{7}{10} - 5\cdot\frac{7}{3}(-1) = \frac{154}{15}.$$

$$\int_{0}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}}dx = 2\cdot\frac{7x^{\frac{10}{7}}}{10}\Bigg|_{0}^{1} + 5\cdot\frac{7x^{\frac{3}{7}}}{3}\Bigg|_{0}^{1} = 2\cdot\frac{7}{10} + 5\cdot\frac{7}{3} = \frac{196}{15}.$$

Тогда $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}}dx = \frac{154}{15} + \frac{196}{15} = \frac{70}{3}$.

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^4}}dx$ сходится и его величина равна $\dfrac{70}{3}$.

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$.

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[-1,1]$ одну особую точку $x = 0$.

Разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx + \int_{0}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$$

Для сходимости интеграла $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int\limits_{-1}^{0}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$.

Вычислим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx = 2\int\limits_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt[7]{x^9}} + 5\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[7]{x^9}} = 2\int\limits_{-1}^{0}x^{-\frac{2}{7}}dx + 5\int\limits_{-1}^{0}x^{-\frac{9}{7}}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{7x^{\frac{5}{7}}}{5}\Bigg|_{-1}^{0} + 5\cdot\frac{7x^{-\frac{2}{7}}}{-2}\Bigg|_{-1}^{0} = -2\cdot\frac{7}{5}(-1) - \lim_{b\to 0}5\cdot\frac{7}{2}b^{-\frac{2}{7}} = \infty.$$

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$ расходится, а значит, расходится и несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x+5}{\sqrt[7]{x^9}}dx$.

5) $\int\limits_{2}^{4}\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$.

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[2,4]$ одну особую точку $x=2$.

Сделаем замену $x-2=t^2$, тогда $dx=2tdt$.

Найдем новые пределы интегрирования:

если $x=2$, то $t_1=0$; если $x=4$, то $t_2=\sqrt{2}$.

Тогда

$$\int_2^4 \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(t^2+2+1)\cdot 2tdt}{(t^2+2)\cdot t} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{(t^2+2+1)dt}{t^2+2} =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{(t^2+2)dt}{t^2+2} + 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+2} = 2\int_0^{\sqrt{2}} dt + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2t \Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(arctg1 - arctg0) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int_2^4 \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$ сходится и его величина равна $2\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}$.

6) $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x^2}$.

Подынтегральная функция имеет на интервале $[1,+\infty]$ две особые точки $x=1$ и $x=+\infty$.

Сделаем замену $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$, тогда $\frac{x+1}{x-1} = t^2$.

Выразим переменную *x*: $x+1 = t^2x - t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$.

Тогда $dx = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}dt = \frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}$.

Найдем новые пределы интегрирования:

$$\lim_{x\to 1+0}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1.$$

Следовательно,

$$\int_1^{+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x^2}=\int_{+\infty}^{1}t\cdot\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\cdot\left(\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}\right)=-4\int_{+\infty}^{1}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=$$

$$=4\int_1^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}.$$

Вычислим получившийся интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$u=t;\quad\Rightarrow\quad du=dt;$$

$$dv=\frac{tdt}{(t^2+1)^2};$$

$$v=\int\frac{tdt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}$$

Тогда

$$4\int_1^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=4\left(-\frac{t}{2(t^2+1)}\Bigg|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=4\left(-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{2(b^2+1)}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}arctgt\Bigg|_1^{+\infty}\right)=1+2\lim_{b\to+\infty}arctgb-$$

$$-2arctg1=1+2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}=1+\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, по определению несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x^2}$ сходится и его величина равна $1+\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. 21. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

1) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$;

3) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{e^{\sqrt{\cos x}}-e}$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+5x^3}}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$.

Решение

1) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}$

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода и на отрезке $[0,9]$ имеет одну особую точку $x=0$. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}$ на эквивалентную при $x\to 0$ ей функцию $g(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^9 \frac{dx}{x^{1/7}}$.

$$\int_0^9 \frac{dx}{x^{1/7}} = \frac{7x^{\frac{6}{7}}}{6}\Bigg|_0^9 = \frac{7}{6}\cdot 9^{\frac{6}{7}} - \frac{7}{6}\lim_{b\to 0} b^{\frac{6}{7}} = \frac{7}{6}\cdot 9^{\frac{6}{7}}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^9 \frac{dx}{x^{1/7}}$ сходится по определению, а значит, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}$.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$.

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода и на отрезке $[0,1]$ имеет одну особую точку $x=0$. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения. Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ на эквивалентную при $x\to 0$ ей функцию $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lim_{b\to 0} b^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ сходится по определению, а значит, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$.

3) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{e^{\sqrt{\cos x}}-e}$.

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода и на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ имеет одну особую точку $x=0$. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком сравнения.

Найдем функцию эквивалентную при $x \to 0$ подынтегральной функции $f(x)=\frac{\sin x}{e^{\sqrt{\cos x}}-e}$.

Так как $\frac{\sin x}{e^{\sqrt{\cos x}}-e}=\frac{\sin x}{e(e^{\sqrt{\cos x}-1}-1)}$, то

$$f(x)=\frac{\sin x}{e^{\sqrt{\cos x}}-e} \sim \frac{\sin x}{e(\sqrt{\cos x}-1)} \sim \frac{x(\sqrt{\cos x}+1)}{e(\cos x-1)} \sim \frac{2x}{-ex^2}=-\frac{2}{ex}$$

и исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x}=\ln|x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\frac{\pi}{4}-\lim_{b\to 0}\ln|b|=\infty .$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x}$ расходится по определению, а значит, по признаку сравнения расходится и несобственный интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{e^{\sqrt{\cos x}} - e}$.

$$4) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}.$$

Данный интеграл на интервале $[0,+\infty]$ имеет две особые точки $x = 0$ и $x = +\infty$.

Разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}$$

Для сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}$.

Исследуем на сходимость каждый из получившихся интегралов.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5x^3}}$.

Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+5x^3}}$ на эквивалентную при $x\to 0$ ей функцию $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{2x+5x^3}}$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{2x+5x^3}}$.

Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+5x^3}}$ на эквивалентную при $x\to\infty$ ей функцию $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3}}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{2x+5x^3}}$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{2x+5x^3}}$ сходится.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$.

Данный интеграл на интервале $[0,+\infty]$ имеет две особые точки $x=0$ и $x=+\infty$.

Разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}.$$

Для сходимости интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$ и $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$.

Исследуем на сходимость каждый из получившихся интегралов.

Рассмотрим интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$.

Заменим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$ на эквивалентную при $x\to 0$ ей функцию $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$. Несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ расходится, следовательно, по признаку сравнения расходится и несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}$ расходится.