

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3 ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Для выполнения домашнего задания необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие вашему номеру варианта данные из табл. 1. Например, Вы учитесь в группе 5, Ваш номер в списке 14. Тогда по табл. 1 имеем:

5	A	C	D	B	K	F	M
---	---	---	---	---	---	---	---

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициент						
	A	C	D	B	K	F	M
14	4	5	2	-6	-3	7	8

Таблица 1

Значения коэффициентов для разных групп

Группа	Коэффициент						
1	A	B	C	D	K	F	M
2	C	D	B	A	K	F	M
3	B	A	K	D	C	F	M
4	C	A	B	K	D	F	M
5	A	C	D	B	K	F	M
6	A	K	B	D	C	F	M
7	B	K	A	C	D	F	M
8	C	K	D	A	B	F	M
9	B	D	K	C	A	F	M
10	D	K	A	C	B	F	M
11	D	C	K	B	A	F	M
12	K	C	A	D	B	F	M
13	D	A	B	K	C	F	M
14	K	B	C	D	A	F	M
15	K	A	C	B	D	F	M
16	K	C	D	A	B	F	M

Таблица 2.

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
1	2	3	-1	5	7	4	14
2	-5	-9	2	1	-4	3	8
3	6	4	1	2	-7	3	12
4	2	-1	6	-9	8	5	13
5	1	5	-4	-3	6	2	-8
6	4	3	11	-1	-4	3	9
7	2	5	1	4	10	3	24
8	5	-2	9	3	-1	4	7
9	-2	7	6	11	-1	4	8
10	-4	10	5	-3	7	2	13
11	-3	2	-4	7	1	4	12
12	-6	5	-1	8	11	2	-6
13	3	-2	9	-5	1	4	17
14	4	5	2	-6	-3	7	8
15	9	3	-5	7	4	3	-12
16	2	5	-1	-3	4	6	-10
17	1	-6	2	3	-5	4	14
18	10	-2	6	-4	3	5	21
19	-4	7	-3	9	6	2	-17
20	2	1	7	12	4	6	-8
21	8	5	-2	4	1	3	17
22	-3	2	-4	6	-7	5	14
23	-1	7	2	5	4	6	3
24	3	-5	6	-4	1	2	8
25	10	-2	4	7	5	3	-27
26	2	11	6	4	-3	5	16
27	1	4	-3	2	9	6	-17
28	4	5	-9	7	3	2	-12
29	3	2	-5	4	7	6	13
30	-2	10	-4	1	-3	4	37

Домашнее задание №3

Задача 1. Найти дифференциал 1-го и 2-го порядка функций:

1) $z = xy^A - Bx^Cy^D + 5x^F$ в точке $M(1, 1)$;

2) $z = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}$ в точке $M(0, 1)$.

Задача 2. Найти частные производные 1-го порядка:

1) $z = \sqrt[F]{Ax^2 + By^2 + C^2} + D \ln(x^A + xy^M)$;

2) $U = (z + M)^{(Ax + Ky)}$ $z > -M$;

3) $z = B \operatorname{arctg} \frac{Ax}{y^F} + Bt g^2(x^F y + y^F x - 1)$.

Задача 3. Найти y'_x , если
$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{At^2 + B}, \\ y = \frac{C}{\sqrt{Bt + 1}}. \end{cases}$$

Задача 4. Найти y'_x, y''_{xx} , если
$$\begin{cases} x = A \cos(Ft), \\ y = B \sin(Ft). \end{cases}$$

Задача 5. Найти производную функции $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ в точке $M(D, K)$ в направлении вектора $\overline{MO}$, где $O(0, 0)$.

Задача 6. Найти производные:

1) $\frac{dy}{dx}$, если $(F)^x = Ax + By^{Cx}$;

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $(A^2 z)^{Fy} - Mx^C y^K z^D = B$.

Задача 7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = Ax^3y^F + By^3x - Dx^2 - Ky^F$ в точке $O(1, 1, z_0)$.

Задача 8. Найти уравнение плоскости, касательной к поверхности $A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1$ и параллельной плоскости $Mx + Ky + Dz = 1$.

Задача 9. Найти экстремумы функций:

1) $z = Axy(C - Kx - My)$;

2) $z = e^{Ax}(Cx + Dy^2 + My)$.

Задача 10. Найти условный экстремум функции $z = Axy + B$

при условии $\frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{K^2} = C^2$.

Задача 11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$ в замкнутой ограниченной области D :

1) $z = Ax^2 + By^2 - C$

$D: |x| + |y| \leq F$;

2) $z = Cx + My + K$

$D: x^2 + y^2 \leq F^2, y \geq x - F$.

Пример выполнения домашнего задания №3

Номер п/п	Коэффициенты						
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
*	−2	−5	1	−3	−4	6	−8

Домашнее задание №1

Задача 1. Найти дифференциал 1-го и 2-го порядка:

1) $z = xy^{-2} + 5xy^{-3} + 5x^6$, в точке $M(1, 1)$.

Решение

Найдем частные производные функции z по переменным x и y в точке M .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 1 + 5 + 30 = 36,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy^{-3} - 15xy^{-4}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -2 - 15 = -17.$$

Запишем формулу для нахождения дифференциала функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$$\text{Тогда } \left. dz \right|_M = 36dx - 17dy.$$

Найдем частные производные 2-го порядка функции z в точке M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5) = 150x^4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-2xy^{-3} - 15xy^{-4}) = -2x(-3y^{-4}) - 15x(-4y^{-5}) =$$

$$= 6xy^{-4} + 60xy^{-5}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5) = -2y^{-3} + 5(-3)y^{-4} = -2y^{-3} - 15y^{-4}.$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = 150, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = 6 + 60 = 64, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -2 - 15 = -17.$$

Запишем формулу для нахождения второго дифференциала для функций двух переменных:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy.$$

$$\text{Тогда } d^2 z|_M = 150dx^2 + 64dy^2 - 34dxdy.$$

$$2) z = \frac{-2x-5}{x-3y} = \frac{2x+5}{3y-x} \text{ в точке } M(0, 1).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y в точке M .

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(2x+5y)'_x (3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_x}{(3y-x)^2} = \frac{2(3y-x) - (2x+5y)(-1)}{(3y-x)^2} = \\ &= \frac{6y-2x+2x+5y}{(3y-x)^2} = \frac{11y}{(3y-x)^2}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = \frac{1}{9},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(2x+5y)'_y (3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_y}{(3y-x)^2} = \frac{5(3y-x) - (2x+5y) \cdot 3}{(3y-x)^2} = \\ &= \frac{15y-5x-6x-15y}{(3y-x)^2} = \frac{-11x}{(3y-x)^2}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 0.$$

Запишем формулу для нахождения дифференциала функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Тогда

$$dz|_M = \frac{1}{9} dx.$$

Найдем частные производные 2-го порядка функции z в точке M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{11y}{(3y-x)^2} \right) = \left(11y(3y-x)^{-2} \right)'_x = -22y(3y-x)^{-3}(-1) = \frac{22y}{(3y-x)^3},$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = \frac{22}{27},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-11x}{(3y-x)^2} \right) = \left(-11x(3y-x)^{-2} \right)'_y = 22x(3y-x)^{-3} \cdot 3 = \frac{66x}{(3y-x)^3},$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{11y}{(3y-x)^2} \right) = \frac{11(3y-x)^2 - 11y \cdot 2(3y-x) \cdot 3}{(3y-x)^4} = \frac{11(3y-x) - 66y}{(3y-x)^3} = \\ &= \frac{33y - 11x - 66y}{(3y-x)^3} = \frac{-33y - 11x}{(3y-x)^3}. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = \frac{-33}{27}.$$

Запишем формулу для нахождения второго дифференциала для функции двух переменных:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy;$$

Тогда:

$$d^2z = \frac{22}{27} dx^2 - \frac{66}{27} dx dy.$$

Задача 2. Найти частные производные 1-го порядка:

$$1) z = \sqrt[6]{-2x^2 - 5y^2 + 1} - 3\ln(x^{-2} + xy^{-8}).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{6}(-2x^2 - 5y^2 + 1)^{\frac{1}{6}-1}(-2x^2 - 5y^2 + 1)'_x - \frac{3}{x^{-2} + xy^{-8}}(x^{-2} + xy^{-8})'_x = \\ &= \frac{(-4x)}{6\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} - \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8}(-2x^{-3} + y^{-8}) = -\frac{2x}{3\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} - \\ &- \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} \frac{x^3 - 2y^8}{x^3 y^8} = -\frac{2x}{3\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} - \frac{3(x^3 - 2y^8)}{x(x^3 + y^8)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{6}(-2x^2 - 5y^2 + 1)^{\frac{1}{6}-1}(-2x^2 - 5y^2 + 1)'_y - \frac{3}{x^{-2} + xy^{-8}}(x^{-2} + xy^{-8})'_y = \\ &= \frac{(-10y)}{6\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} - \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8}(-8xy^{-9}) = -\frac{5y}{3\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} + \\ &+ \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} \frac{8x}{y^9} = -\frac{5y}{3\sqrt[6]{(-2x^2 - 5y^2 + 1)^5}} + \frac{24x^3}{y(x^3 + y^8)}. \end{aligned}$$

$$2) U = (z - 8)^{(-2x - 4y)}, z - 8 > 0, z - 8 \neq 1.$$

Найдем частные производные функции U по переменным x, y

и z :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (z-8)^{(-2x-4y)} \ln(z-8)(-2x-4y)'_x = (z-8)^{(-2x-4y)} \ln(z-8)(-2),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (z-8)^{(-2x-4y)} \ln(z-8)(-2x-4y)'_y = (z-8)^{(-2x-4y)} \ln(z-8)(-4),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = (-2x-4y)(z-8)^{(-2x-4y-1)}(z-8)'_z = (-2x-4y)(z-8)^{(-2x-4y-1)}.$$

$$3) z = -5 \operatorname{arctg} \frac{-2x}{y^6} - 5 \operatorname{tg}^2(x^6 y + y^6 x - 1).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-5}{1 + \left(\frac{-2x}{y^6}\right)^2} \left(\frac{-2x}{y^6}\right)'_x - 5 \cdot 2 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \frac{1}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)} \times \\ &\times (x^6 y + y^6 x - 1)'_x = \frac{-5}{1 + \frac{4x^2}{y^{12}}} \left(\frac{-2}{y^6}\right) - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \frac{1}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)} \times \\ &\times (6x^5 y + y^6) = \frac{10y^6}{y^{12} + 4x^2} - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \frac{6x^5 y + y^6}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-5}{1 + \left(\frac{-2x}{y^6}\right)^2} \left(\frac{-2x}{y^6}\right)'_y - 5 \cdot 2 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \frac{1}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)} \times \\ &\times (x^6 y + y^6 x - 1)'_y = \frac{-5}{1 + \frac{4x^2}{y^{12}}} \left(\frac{-2x(-6)}{y^7}\right) - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)} (x^6 + 6xy^5) = \\ & = -\frac{60xy^5}{y^{12} + 4x^2} - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \frac{x^6 + 6xy^5}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)}. \end{aligned}$$

Задача 3. Найти y'_x , если $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-2t^2 - 5}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{-5t + 1}}. \end{cases}$

Решение

Найдем частные производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t :

$$x'_t = \frac{1}{3}(-2t^2 - 5)^{\frac{1}{3}-1}(-4t) = -\frac{4t}{3}(-2t^2 - 5)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'_t = -\frac{1}{2}(-5t + 1)^{\frac{1}{2}-1}(-5) = \frac{5}{2}(-5t + 1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда производная функции y по переменной x :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{5}{2}(-5t + 1)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{4t}{3}(-2t^2 - 5)^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{5 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{(-2t^2 - 5)^2}}{2 \cdot 4 \cdot t \sqrt{(-5t + 1)^3}} = -\frac{15 \sqrt[3]{(-2t^2 - 5)^2}}{8t \sqrt{(-5t + 1)^3}}.$$

Задача 4. Найти y'_x, y''_{xx} , если $\begin{cases} x = -2 \cos 6t, \\ y = -5 \sin 6t. \end{cases}$

Решение

Найдем производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t .

$$x'_t = -2(-\sin 6t) \cdot 6 = 12 \sin 6t,$$

$$y'_t = -5(\cos 6t) \cdot 6 = -30 \cos 6t.$$

Тогда производная функции y по переменной x

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{30 \cos 6t}{12 \sin 6t} = -\frac{5}{2} \operatorname{ctg} 6t.$$

Найдем вторую производную функции y по переменной x :

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{5}{2} \operatorname{ctg} 6t \right)' \frac{1}{12 \sin 6t} = \frac{5 \cdot 6}{2 \sin^2 6t} \cdot \frac{1}{12 \sin 6t} = \frac{5}{4 \sin^3 6t}.$$

Задача 5. Найти производную функции $z = -2x^2 - 5xy + y^2$ в точке $M(-3, -4)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MO}$ (рис. 2.5).

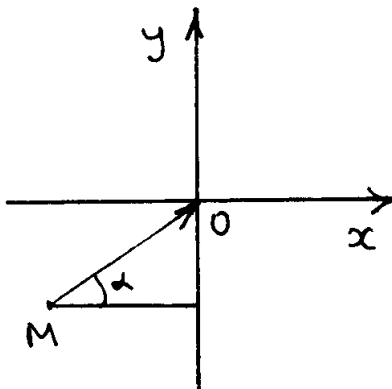


Рис. 2.5

Решение

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \bar{l}} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cos \beta \quad - \text{ формула для нахождения}$$

производной функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\bar{l}$, где $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

Найдем частные производные функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y в точке M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x - 5y,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -4(-3) - 5(-4) = 12 + 20 = 32,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x + 2y,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -5(-3) + 2(-4) = 15 - 8 = 7,$$

$\overline{MO}(3, 4)$ – координаты вектора $\overline{MO}$, $|\overline{MO}| = \sqrt{9+16} = 5$ –

длина вектора. Тогда направляющие косинусы вектора $\overline{MO}$:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{4}{5},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = 32 \cdot \frac{3}{5} + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{96+28}{5} = \frac{124}{5}.$$

Задача 6. Найти производные:

1) $\frac{dy}{dx}$, если $6^x = -2x - 5y^x$.

Решение

Запишем функцию $F(x, y)$:

$$F(x, y) = 6^x + 2x + 5y^x.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y)$ по переменным x и y :

$$F'_x = 6^x \ln 6 + 2 + 5y^x \ln y,$$

$$F'_y = 5xy^{x-1}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6^x \ln 6 + 2 + 5y^x \ln y}{5xy^{x-1}}.$$

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $(4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} = -5$.

Запишем функцию $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = (4z)^{6y} + 8xy^4z^{-3} + 5.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z :

$$F'_x = 8y^4z^{-3},$$

$$F'_z = 6y(4z)^{6y-1}(4z)'_z + 8xy^4(-3z^{-4}) = 24y(4z)^{6y-1} - 24xy^4z^{-4},$$

$$F'_y = (4z)^{6y}\ln(4z)(6y)'_y + 8(-4)xy^{-5}z^{-3} = 6(4z)^{6y}\ln(4z) - 32xy^{-5}z^{-3},$$

тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{8y^4z^{-3}}{24y(4z)^{6y-1} - 24xy^4z^{-4}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6(4z)^{6y}\ln(4z) - 32z^{-3}xy^{-5}}{24y(4z)^{6y-1} - 24xy^4z^{-4}}.$$

Задача 7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = -2x^3y^6 - 5y^3x + 3x^2 - 4y^6$ в точке $O(1, 1, z_0)$.

Решение

Найдем координату z_0 точки O :

$z_0 = z(1, 1) = -2 - 5 + 3 - 4 = -8$, тогда координаты точки $O(1, 1, -8)$.

$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ — уравнение касательной плоскости к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad \text{— уравнение нормали к}$$

поверхности $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Найдем частные производные функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y в точке $O(1, 1, -8)$:

$$z'_x = -6x^2y^6 - 5y^3 + 6x,$$

$$z'_x(1, 1) = -6 - 5 + 6 = -5,$$

$$z_y' = -12x^3y^5 - 15y^2x - 24y^5,$$

$$z_y'(1, 1) = -12 - 15 - 24 = -51,$$

$$z + 8 = -5(x - 1) - 51(y - 1),$$

$$z + 8 = -5x + 5 - 51y + 51,$$

$$5x + 51y + z - 48 = 0 \text{ — уравнение касательной плоскости.}$$

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{-51} = \frac{z+8}{-1},$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{51} = \frac{z+8}{1} \text{ — уравнение нормали.}$$

Задача 8. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 1$ параллельно плоскости $8x + 4y + 3z = -1$.

Решение

$$F_x'|_M(x - x_0) + F_y'|_M(y - y_0) + F_z'|_M(z - z_0) = 0 \quad \text{— уравнение}$$

касательной плоскости к поверхности, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$, в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

Две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны, если их коэффициенты пропорциональны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Следовательно, касательная плоскость параллельна плоскости $8x + 4y + 3z = -1$, если $\frac{F_x'|_M}{8} = \frac{F_y'|_M}{4} = \frac{F_z'|_M}{3} = k$.

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$F_x' = 8x, \quad F_x'|_M = 8x_0,$$

$$F_y' = 50y, \quad F_y'|_M = 50y_0.$$

$$F_z' = 2z, \quad F_z'|_M = 2z_0.$$

$$\text{Тогда } \frac{8x_0}{8} = \frac{50y_0}{4} = \frac{2z_0}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} x_0 = k, \\ y_0 = \frac{2}{25}k. \\ z_0 = \frac{3}{2}k. \end{cases}$$

Точка M принадлежит поверхности $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ ее координаты должны удовлетворять этому уравнению, т.е.

$$4x_0^2 + 25y_0^2 + z_0^2 = 1 \Rightarrow$$

$$4k^2 + 25\left(\frac{2}{25}k\right)^2 + \frac{9}{4}k^2 = 1,$$

$$4k^2 + \frac{4}{25}k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 1, \text{ умножим на } 100,$$

$$400k^2 + 16k^2 + 225k^2 = 100,$$

$$641k^2 = 100,$$

$$k^2 = \frac{100}{641},$$

$$k = \pm \frac{10}{\sqrt{641}}.$$

Получим две касательные плоскости

$$M\left(k, \frac{2}{25}k, \frac{3}{2}k\right), \text{ где } k = \pm \frac{10}{\sqrt{641}},$$

$$M_1\left(\frac{10}{\sqrt{641}}, \frac{4}{5\sqrt{641}}, \frac{15}{\sqrt{641}}\right), \text{ для } k = \frac{10}{\sqrt{641}},$$

$$M_2\left(-\frac{10}{\sqrt{641}}, -\frac{4}{5\sqrt{641}}, -\frac{15}{\sqrt{641}}\right), \text{ для } k = -\frac{10}{\sqrt{641}},$$

$$8\left(x - \frac{10}{\sqrt{641}}\right) + 4\left(y - \frac{4}{5\sqrt{641}}\right) + 3\left(z - \frac{15}{\sqrt{641}}\right) = 0,$$

$$8x + 4y + 3z - \frac{80}{\sqrt{641}} - \frac{16}{5\sqrt{641}} - \frac{45}{\sqrt{641}} = 0,$$

$$8x + 4y + 3z = \frac{400 + 16 + 225}{5\sqrt{641}},$$

$$8x + 4y + 3z = \frac{641}{5\sqrt{641}},$$

$$8x + 4y + 3z = \frac{\sqrt{641}}{5} \quad - \quad \text{касательная плоскость в точке}$$

$$M_1 \left(\frac{10}{\sqrt{641}}, \frac{4}{5\sqrt{641}}, \frac{15}{\sqrt{641}} \right),$$

$$8 \left(x + \frac{10}{\sqrt{641}} \right) + 4 \left(y + \frac{4}{5\sqrt{641}} \right) + 3 \left(z + \frac{15}{\sqrt{641}} \right) = 0,$$

$$8x + 4y + 3z = -\frac{\sqrt{641}}{5} \quad - \quad \text{касательная плоскость в точке}$$

$$M_2 \left(-\frac{10}{\sqrt{641}}, -\frac{4}{5\sqrt{641}}, -\frac{15}{\sqrt{641}} \right).$$

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= 2xy(1 + 4x + 8y), \\ z &= -2xy - 8x^2y - 16y^2x. \end{aligned}$$

Решение

Найдем стационарные точки, т.е. точки, в которых может быть экстремум. Для этого найдем частные производные функции $z = z(x, y)$ и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2y - 16xy - 16y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 8x^2 - 32xy = 0.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2y + 16xy + 16y^2 = 0 \\ 2x + 8x^2 + 32xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(1 + 8x + 8y) = 0 \\ 2x(1 + 4x + 16y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(1 + 4x + 16y) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 + 8x + 8y = 0 \\ x(1 + 4x + 16y) = 0, \end{cases} \\
& \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 0 \\ 1 + 4x + 16y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 + 8x + 8y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 + 8x + 8y = 0 \\ 1 + 4x + 16y = 0, \end{cases} \\
& M_1(0, 0) \text{ или } \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 + 8x + 8y = 0 \\ 2 + 8x + 32y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& M_1(0, 0), \quad M_2\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad M_3\left(0, -\frac{1}{8}\right), \\
& \begin{cases} 1 + 8x + 8y = 0 \\ 1 + 24y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 8x - \frac{1}{3} = 0 \\ y = -\frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow M_4\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right).
\end{aligned}$$

Получим четыре стационарных точки. Исследуем каждую из них на экстремум при помощи частных производных 2-го порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16y; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -32x; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 - 16x - 32y;$$

$$D = A \cdot B - C^2.$$

Если $D > 0$ – то экстремум есть, а именно $A > 0$ – точка минимума, $A < 0$ – точка максимума. Если $D < 0$ – то экстремума нет:

а) $M_1(0, 0)$,

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = -2,$$

$$D = 0 - 4 < 0 \Rightarrow \text{в точке } M_1 \text{ экстремума нет;}$$

б) $M_2\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_2} = 8; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_2} = -2 + 4 = 2,$$

$D = 0 - 4 < 0 \Rightarrow$ в точке M_2 экстремума нет;

в) $M_3 \left(0, -\frac{1}{8} \right),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_3} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_3} = -2 + 4 = 2,$$

$D = 0 - 4 < 0 \Rightarrow$ в точке M_3 экстремума нет;

г) $M_4 \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24} \right),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_4} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_4} = \frac{32}{12}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_4} = -2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0 \Rightarrow \text{в точке } M_4 \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24} \right) \text{ есть экстремум}$$

$$A = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow M_4 \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24} \right) - \text{точка минимума функции,}$$

$$\begin{aligned} z \Big|_{M_4} &= z \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24} \right) = -2 \left(-\frac{1}{12} \right) \left(-\frac{1}{24} \right) \left(1 - \frac{4}{12} - \frac{8}{24} \right) = \\ &= -\frac{1}{24 \cdot 6} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{24 \cdot 18} = -\frac{1}{432}. \end{aligned}$$

Данная функция имеет минимум в точке $M_4 \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24} \right),$

$$z_{\min} = -\frac{1}{432}.$$

$$2) z = e^{-2x}(x - 3y^2 - 8y).$$

Найдем стационарные точки, т. е. точки, в которых может быть экстремум. Для этого найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{-2x}(-2)(x - 3y^2 - 8y) + e^{-2x} \cdot 1 = e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) = \\ &0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2x}(-6y - 8) = 0.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) = 0 \\ e^{-2x}(-6y - 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y^2 + 16y + 1 = 0 \\ 6y = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x + 6 \cdot \frac{16}{9} - \frac{16 \cdot 4}{3} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x + \frac{32}{3} - \frac{64}{3} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x = \frac{32}{3} - 1 \end{cases} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{29}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) - \text{стационарная точка.}$$

Исследуем ее на экстремум.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) + e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(4x - 12y^2 - 32y - 4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2x}(-6) = -6e^{-2x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-2x}(12y + 16),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_M &= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{4 \cdot 29}{6} - 12 \left(-\frac{4}{3} \right)^2 - 32 \left(-\frac{4}{3} \right) - 4 \right) = \\ &= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{58}{3} - \frac{64}{3} + \frac{128}{3} - 4 \right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{128 - 64 - 58 - 12}{3} \right) = e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{6}{3} \right) = -2e^{\frac{29}{3}} \end{aligned}$$

,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_M = -6e^{\frac{29}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_M = e^{\frac{29}{3}} \left(12 \left(-\frac{4}{3} \right) + 16 \right) = e^{\frac{29}{3}} \cdot 0 = 0,$$

$$D = -2e^{\frac{29}{3}} \cdot \left(-6e^{\frac{29}{3}}\right) = 12e^{\frac{58}{3}} > 0 \Rightarrow \text{в точке } M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) \text{ есть}$$

экстремум,

$$A = -2e^{\frac{29}{3}} < 0 \Rightarrow M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) - \text{точка максимума}$$

функции,

$$\begin{aligned} z|_M &= z\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{29}{6} - 3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \\ &= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{29}{6} - \frac{16}{3} + \frac{32}{3}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{16}{3} - \frac{29}{6}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{32-29}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{29}{3}}. \end{aligned}$$

Точка $M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right)$ – точка максимума функции.

$$Z_{\max} = \frac{1}{2} e^{\frac{29}{3}}.$$

Задача 10. Найти условный экстремум функции $z = -2xy - 5$

$$\text{при условии } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = -2xy - 5 + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \right).$$

Найдем точки, в которых может быть экстремум. Для этого найдем частные производные и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2y + \frac{2}{9}\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + \frac{2}{16}\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2y + \frac{2}{9}\lambda x = 0 \\ -2x + \frac{1}{8}\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y - \lambda x = 0 \\ 16x - \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9y}{\lambda} \\ \frac{16 \cdot 9y}{\lambda} - \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{9y}{\lambda} \\ y \left(\frac{144}{\lambda} - \lambda \right) = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 1 \text{ (ложно)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{9y}{\lambda} \\ \frac{144}{\lambda} - \lambda = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1. \end{cases}$$

$$\frac{144}{\lambda} - \lambda = 0 \Rightarrow 144 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 144 \Rightarrow \lambda = \pm 12.$$

Тогда

$$\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \frac{3y}{4} \\ \frac{9y^2}{9 \cdot 16} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda = -12 \\ x = -\frac{3y}{4} \\ \frac{9y^2}{9 \cdot 16} + \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \frac{3y}{4} \\ y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda = -12 \\ x = -\frac{3y}{4} \\ y^2 = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda = 12 \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \lambda = -12 \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda = -12 \\ x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Получим следующие стационарные точки:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ и } M_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \quad \text{при } \lambda = 12;$$

$$M_3\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ и } M_4\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \quad \text{при } \lambda = -12.$$

$$\Phi(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \Rightarrow \Phi'_x = \frac{2x}{9}, \quad \Phi'_y = \frac{2y}{16} = \frac{y}{8},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{9}\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{1}{8}\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -2,$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \Phi'_x|_M & \Phi'_y|_M \\ \Phi'_x|_M & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}|_M & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}|_M \\ \Phi'_y|_M & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}|_M & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}|_M \end{vmatrix}.$$

Для каждой стационарной точки составим такой определитель

$$\text{а) } M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = 12,$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{8}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = - \left(-4 \cdot \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3} - \frac{2}{6} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) - \text{точка условного минимума};$$

$$\text{б) } M_2 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) \text{ при } \lambda = 12,$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{8}{3} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$M_2 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) - \text{точка условного минимума};$$

$$\text{в) } M_3 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) \text{ при } \lambda = -12.$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{8}{3} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_3 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) - \text{точка условного максимума.}$$

$$\text{г) } M_4 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) \text{ при } \lambda = -12$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{8}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_4 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) - \text{точка условного максимума.}$$

$$\text{Итак } M_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right), M_2 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) - \text{точки условного}$$

$$\text{минимума; } z|_{M_1} = z|_{M_2} = -17,$$

$$M_3 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right), M_4 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) - \text{точки условного}$$

$$\text{максимума; } z|_{M_3} = z|_{M_4} = 7.$$

Задача 11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной ограниченной области:

а) $z = -2x^2 - 5y^2 + 1$, $D: |x| + |y| \leq 6$.

Функция в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения в стационарных точках, лежащих внутри области или на границе области.

Найдем стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -10y = 0,$$

$$O(0,0) \in D$$

Данная точка принадлежит нашей области D .

Исследуем функцию на границах области D .

Изобразим область D на координатной плоскости (рис. 2.6):

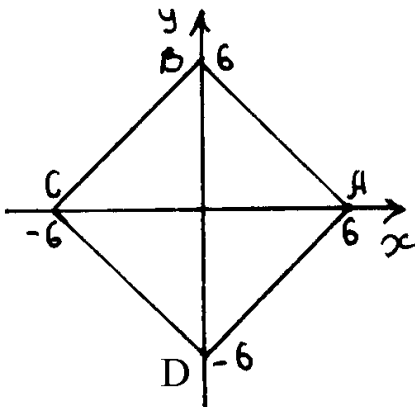


Рис. 2.6

Запишем уравнения прямых AB , BC , CD и AD .

$$AB: x + y = 6, \quad 0 \leq x \leq 6,$$

$$BC: -x + y = 6, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$CD: -x - y = 6, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$AD: x - y = 6, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

На каждом из этих отрезков задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной на отрезке:

$$AB: x + y = 6, \dots\dots\dots$$

$$z = -2x^2 - 5(6 - x)^2 + 1 = -2x^2 - 5(36 - 12x + x^2) + 1 = -2x^2 - 180 + 60x - 5x^2 + 1 = -7x^2 + 60x - 179,$$

$$z' = -14x + 60 = 0,$$

$$x = \frac{60}{14} = \frac{30}{7} \in [0, 6],$$

$$y = 6 - \frac{30}{7} = \frac{12}{7},$$

$$M_2\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) - \text{стационарная точка.}$$

Данная функция $z = z(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в стационарных точках, принадлежащих отрезку $[0, 6]$, или на концах этого отрезка.

$$M_2\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right), M_3(6, 0) \text{ и } M_4(0, 6) - \text{точки, в которых функция}$$

может принимать наибольшее (наименьшее) значение.

$$BC: y = 6 + x, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$z = -2x^2 - 5(6 + x)^2 + 1 = -2x^2 - 5(36 + 12x + x^2) + 1 = -2x^2 - 180 -$$

$$-60x - 5x^2 + 1 = -7x^2 - 60x - 179,$$

$$z' = -14x - 60 = 0,$$

$$x = -\frac{60}{14} = -\frac{30}{7} \in [-6, 0],$$

$$y = 6 - \frac{30}{7} = \frac{12}{7},$$

$$M_5\left(-\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) - \text{стационарная точка.}$$

$$M_4(0, 6) \text{ и } M_6(-6, 0) - \text{граничные точки.}$$

$$CD: y = -6 - x, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$z = -2x^2 - 5(-6 - x)^2 + 1 = -7x^2 - 60x - 179,$$

$$z' = -14x - 60 = 0,$$

$$x = -\frac{60}{14} = -\frac{30}{7} \in [-6, 0],$$

$$y = \frac{30}{7} - 6 = -\frac{12}{7},$$

$M_7\left(-\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка,

$M_8(0, -6)$ и $M_6(-6, 0)$ – граничные точки.

$AD: y = x - 6, \quad 0 \leq x \leq 6,$

$$z = -2x^2 - 5(x - 6)^2 + 1 = -7x^2 + 60x - 179,$$

$$z' = -14x + 60 = 0,$$

$$x = \frac{60}{14} = \frac{30}{7} \in [0, 6],$$

$$y = \frac{30}{7} - 6 = -\frac{12}{7},$$

$M_9\left(\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка,

$M_3(6, 0)$ и $M_8(0, -6)$ – граничные точки.

Найдем значения функции во всех найденных точках:

$$z(0, 0) = 1,$$

$$\begin{aligned} z\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) &= -2\left(\frac{30}{7}\right)^2 - 5\left(\frac{12}{7}\right)^2 + 1 = -2 \cdot \frac{200}{49} - 5 \cdot \frac{144}{49} + 1 = \\ &= \frac{-1800 - 720 + 49}{49} = -\frac{2471}{49} \approx -50,4, \end{aligned}$$

$$z\left(-\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right) = z\left(\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right) = z\left(-\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) = -\frac{2471}{49},$$

$$z(6, 0) = -2 \cdot 36 + 1 = -71,$$

$$z(-6, 0) = -71,$$

$$z(0, 6) = z(0, -6) = -5 \cdot 36 + 1 = -179.$$

Среди всех найденных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$\max_D z(x, y) = 1,$$

$$\min_D z(x, y) = -179.$$

$$2) z = x - 8y - 4, \quad D: x^2 + y^2 \leq 36, \quad y \geq x - 6.$$

Функция в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения в стационарных точках внутри области или на границе области.

Найдем стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{стационарных точек нет.}$$

Изобразим область D на координатной плоскости (рис. 2.7).

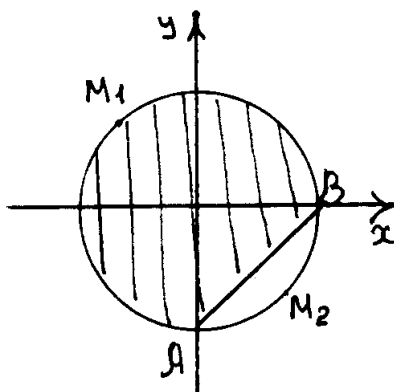


Рис. 2.7

Разобьем границу области D на две части: часть окружности и отрезок AB и будем искать точки, в которых функция может принимать наибольшее и наименьшее значение на φ_1 и φ_2 .

а) φ_1 : $x^2 + y^2 = 36$, $(x, y) \in \text{I, II и III четверти}$

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения воспользуемся функцией Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - 8y - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 36),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -8 + 2\lambda y.$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -8 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{16}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \frac{65}{4\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{65}{36 \cdot 4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{65}}{12} \\ x = -\frac{6}{\sqrt{65}} \\ y = \frac{48}{\sqrt{65}} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{65}}{12} \\ x = \frac{6}{\sqrt{65}} \\ y = -\frac{48}{\sqrt{65}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M_1\left(-\frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{48}{\sqrt{65}}\right) - \text{стационарная точка,} \\ M_2\left(\frac{6}{\sqrt{65}}, -\frac{48}{\sqrt{65}}\right) \notin \Phi_1, \end{matrix}$$

$A(0, 6), B(6, 0)$ – граничные точки.

б) Φ_2 : $y = x - 6$.

Задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной на отрезке $[0, 6]$.

$$z = x - 8(x - 6) - 4 = x - 8x + 48 - 4 = -7x + 44,$$

$$z' = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{стационарных точек на границе } \Phi_2 \text{ нет,}$$

$A(0, -6), B(6, 0)$ – граничные точки.

Найдем значения функции в стационарной точке M_1 и в граничных точках A и B .

$$z\left(-\frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{48}{\sqrt{65}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{65}} \frac{48}{\sqrt{65}} - 4 = -\frac{390}{\sqrt{65}} - 4 \approx -52,4,$$

$$z(0, -6) = -8 \cdot (-6) - 4 = 44,$$

$$z(6, 0) = 6 - 4 = 2.$$

Среди найденных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$\min_D z(x, y) = -\frac{390}{\sqrt{65}} - 4, \quad \max_D z(x, y) = 44.$$