ИНСТРУКЦИЯ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ №3

Для выполнения домашнего задания необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие вашему номеру варианта данные из табл. 1. Например, Вы учитесь в группе 5, Ваш номер в списке 14. Тогда по табл. 1 имеем:

5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициент						
	A	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
14	4	5	2	-6	-3	7	8

Таблица 1

Значения коэффициентов для разных групп

Группа	Коэффициент						
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*
2	*C*	*D*	*B*	*A*	*K*	*F*	*M*
3	*B*	*A*	*K*	*D*	*C*	*F*	*M*
4	*C*	*A*	*B*	*K*	*D*	*F*	*M*
5	*A*	*C*	*D*	*B*	*K*	*F*	*M*
6	*A*	*K*	*B*	*D*	*C*	*F*	*M*
7	*B*	*K*	*A*	*C*	*D*	*F*	*M*
8	*C*	*K*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*
9	*B*	*D*	*K*	*C*	*A*	*F*	*M*
10	*D*	*K*	*A*	*C*	*B*	*F*	*M*
11	*D*	*C*	*K*	*B*	*A*	*F*	*M*
12	*K*	*C*	*A*	*D*	*B*	*F*	*M*
13	*D*	*A*	*B*	*K*	*C*	*F*	*M*
14	*K*	*B*	*C*	*D*	*A*	*F*	*M*
15	*K*	*A*	*C*	*B*	*D*	*F*	*M*
16	*K*	*C*	*D*	*A*	*B*	*F*	*M*

Таблица 2.

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
1	2	3	–1	5	7	4	14
2	–5	–9	2	1	–4	3	8
3	6	4	1	2	–7	3	12
4	2	–1	6	–9	8	5	13
5	1	5	–4	–3	6	2	–8
6	4	3	11	–1	–4	3	9
7	2	5	1	4	10	3	24
8	5	–2	9	3	–1	4	7
9	–2	7	6	11	–1	4	8
10	–4	10	5	–3	7	2	13
11	–3	2	–4	7	1	4	12
12	–6	5	–1	8	11	2	–6
13	3	–2	9	–5	1	4	17
14	4	5	2	–6	–3	7	8
15	9	3	–5	7	4	3	–12
16	2	5	–1	–3	4	6	–10
17	1	–6	2	3	–5	4	14
18	10	–2	6	–4	3	5	21
19	–4	7	–3	9	6	2	–17
20	2	1	7	12	4	6	–8
21	8	5	–2	4	1	3	17
22	–3	2	–4	6	–7	5	14
23	–1	7	2	5	4	6	3
24	3	–5	6	–4	1	2	8
25	10	–2	4	7	5	3	–27
26	2	11	6	4	–3	5	16
27	1	4	–3	2	9	6	–17
28	4	5	–9	7	3	2	–12
29	3	2	–5	4	7	6	13
30	–2	10	–4	1	–3	4	37

Домашнее задание №3

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{Ax+B}{Cx+D}dx$;
2) $\int (Ax+B)^M dx$;
3) $\int \frac{C}{(Dx-B)^M}dx$;
4) $\int \frac{Fdx}{(x-A)(x-B)}$;
5) $\int \sqrt[F]{(Cx+D)^M}dx$;

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = Ax^2 + Bx + C \quad x = B, x = K, y = 0$;
2) $\begin{cases} x = A^2 \cos t, \\ y = B^2 \sin t, \end{cases} \; y \geq \frac{|B|}{2}$;

Задача 3. Найти дифференциал 1-го и 2-го порядка функций:

1) $z = xy^A - Bx^C y^D + 5x^F$ в точке $M(1, 1)$;
2) $z = \frac{Ax+By}{Cx+Dy}$ в точке $M(0, 1)$.

Задача 4. Найти частные производные 1-го порядка:

1) $z = \sqrt[F]{Ax^2 + By^2 + C^2} + D\ln(x^A + xy^M)$;
2) $U = (z + M)^{(Ax + Ky)} \quad z > -M$;
3) $z = B\operatorname{arctg}\frac{Ax}{y^F} + B\operatorname{tg}^2\left(x^F y + y^F x - 1\right)$.

Задача 5. Вычислить двойной интеграл:

1) $\iint\limits_D F^{Ax+By}dxdy,$ где $D: \begin{cases} C \leq x \leq C+2, \\ D \leq y \leq D+1; \end{cases}$
2) $\iint\limits_D (Fx+By)dxdy,$ где $D: \begin{cases} x = 0, y = 0, \\ Ax + Dy = M; \end{cases}$
3) $\iint\limits_D x(Cy+D)dxdy,$ где $D: \begin{cases} y = (Cx)^2, \\ x = Ky. \end{cases}$

Пример выполнения домашнего задания №3

Номер п/п	Коэффициенты						
	A	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*
*	–2	–5	1	–3	–4	6	–8

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл:

1) $$\int\frac{-2x-5}{x-3}dx=\int\frac{-2(x-3)-6-5}{x-3}dx=\int\left(-\frac{2(x-3)}{x-3}-\frac{11}{x-3}\right)dx=$$
$$=\int(-2)dx-\int\frac{11dx}{x-3}=-2\int dx-11\int\frac{dx}{x-3}=-2x-11\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$
$$=\mathbf{-2x-11\ln|x-3|+C};$$

2) $$\int(-2x-5)^{-8}dx=\left|\begin{array}{l} t=-2x-5\\ dt=-2dx\\ dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int t^{-8}\left(-\frac{1}{2}dt\right)=-\frac{1}{2}\int t^{-8}dt=$$
$$=-\frac{t^{-8+1}}{2(-8+1)}+C=\frac{1}{14t^7}+C=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14(-2x-5)^7}}+\boldsymbol{C};$$

3) $$\int\frac{dx}{(-3x+5)^{-8}}=\int(5-3x)^8dx=\left|\begin{array}{l} 5-3x=t\\ -3dx=dt\\ dx=-\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\int t^8\left(-\frac{1}{3}dt\right)=-\frac{1}{3}\int t^8dt=$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{t^{8+1}}{8+1}+C=-\frac{t^9}{27}+C=-\frac{\mathbf{(5-3x)^9}}{\mathbf{27}}+\boldsymbol{C};$$

4) $$\int\frac{6dx}{(x+2)(-4x+5)}=6\int\frac{dx}{(x+2)(-4x+5)}=$$
$$=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{(x+2)(-4x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{-4x+5}=\frac{A(-4x+5)+B(x+2)}{(x+2)(-4x+5)}\\ \text{Приравняем числители:}\\ 1=A(-4x+5)+B(x+2)\\ \begin{cases}-4A+B=0\\ 5A+2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=4A\\ 5A+8A=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{13},\ B=\frac{4}{13}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{6}{13}\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{-4x+5}\right)dx=\frac{6}{13}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{24}{13}\int\frac{dx}{-4x+5}=$$
$$=\frac{6}{13}\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{24}{13}\int\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)d(-4x+5)}{-4x+5}=$$
$$=\frac{6}{13}\ln|x+2|-\frac{6}{13}\ln|-4x+5|+C=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{13}}\mathbf{ln}\left|\frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{-4x+5}}\right|+\boldsymbol{C};$$

5) $$\int\sqrt[6]{(x-3)^{-8}}dx=\int(x-3)^{-4/3}dx=\int(x-3)^{-4/3}d(x-3)=\frac{(x-3)^{-4/3+1}}{-4/3+1}+C=$$
$$=\frac{(x-3)^{-1/3}}{-1/3}+C=-\frac{\mathbf{3}}{\sqrt[3]{\mathbf{x-3}}}+\boldsymbol{C};$$

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=-2x^2-5x+1$; $x=-5$, $x=-4$, $y=0$.

Решение

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 2.1).

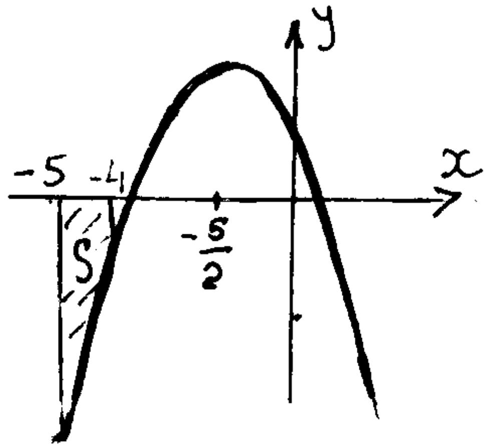

Рис. 2.1

$y = –2x^2 – 5x + 1$ – парабола, ветви которой направлены вниз.

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4},$$

$$y_b = -2\frac{25}{16} + \frac{25}{4} + 1 = \frac{33}{8}.$$

$A\left(\frac{-5}{4};\frac{33}{8}\right)$ – вершина параболы,

$y(–4) = –2·16 – 5(–4) + 1 = –32 + 20 + 1 = –12.$

$y(–5) = –2·(–5)^2 – 5(–5) + 1 = –50 + 25 + 1 = –25 + 1 = –24.$

Так как наша функция на [–5, –4] отрицательная, то $S = \int\limits_a^b \left(-f(x)\right)dx$.

Тогда $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{-5}^{-4} \left(2x^2 + 5x - 1\right)dx =$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-5}^{-4} = \left(\frac{2(-4)^3}{3} + \frac{5(-4)^2}{2} - (-4)\right) - \left(\frac{2(-5)^3}{3} + \frac{5(-5)^2}{2} - (-5)\right) =$$

$$= -\frac{128}{3} + 40 + 4 + \frac{250}{3} - \frac{125}{2} - 5 = 39 + \frac{122}{3} - \frac{125}{2} = 39 + \frac{244 - 375}{6} =$$

$$= 39 - \frac{131}{6} = \frac{234 - 131}{6} = \frac{103}{6};$$

2) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 25\sin t \end{cases}$ => $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{625} = 1$ – эллипс, $y \geq \frac{25}{2}$.

Изобразим фигуру на координатной плоскости (рис. 2.2)

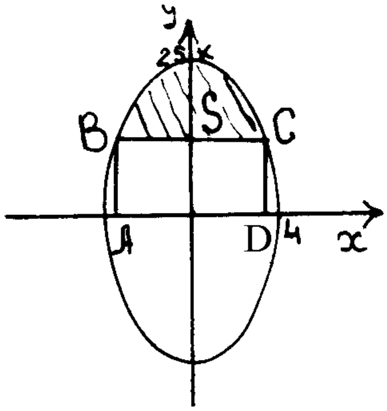

Рис. 2.2

Найдем значение параметра t, соответствующее координатам точек B и C:

$\frac{25}{2} = 25\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2}$. Так как $0 \le t \le \pi$, то

$t_c = \frac{\pi}{6}$, $t_b = \frac{5\pi}{6}$.

Тогда $x_c = 4\cos\frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $x_b = 4\cos\frac{5\pi}{6} = -2\sqrt{3}$.

$C\left(2\sqrt{3}, \frac{25}{2}\right)$, $B\left(-2\sqrt{3}, \frac{25}{2}\right)$,

$S_{BKC} = S_{ABKCD} - S_{ABCD}$,

$$S_{ABKCD} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (25\sin t)(-4\sin t)dt = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 100\sin^2 t dt =$$

$$= -100\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 t dt = 100\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 50\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 50\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 50\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 50\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{100\pi}{3} + \frac{50\sqrt{3}}{2} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3},$$

$$S_{ABCD} = |AD||AB| = 4\sqrt{3}\frac{25}{2} = 50\sqrt{3},$$

$$S_{BKC} = \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 50\sqrt{3} = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}.$$

Задача 3. Найти дифференциал 1-го и 2-го порядка:

1) $z = xy^{-2} + 5xy^{-3} + 5x^6$, в точке $M(1, 1)$.

Решение

Найдем частные производные функции z по переменным x и y в точке M.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 1 + 5 + 30 = 36,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy^{-3} - 15xy^{-4},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -2 - 15 = -17.$$

Запишем формулу для нахождения дифференциала функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Тогда $\left.dz\right|_M = 36dx - 17dy$.

Найдем частные производные 2-го порядка функции z в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5\right) = 150x^4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy^{-3} - 15xy^{-4}\right) = -2x(-3y^{-4}) - 15x(-4y^{-5}) =$$

$$= 6xy^{-4} + 60xy^{-5}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-2} + 5y^{-3} + 30x^5\right) = -2y^{-3} + 5(-3)y^{-4} = -2y^{-3} - 15y^{-4}.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M = 150,\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M = 6 + 60 = 64,\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M = -2 - 15 = -17.$$

Запишем формулу для нахождения второго дифференциала для функций двух переменных:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy.$$

Тогда $d^2z|_M = 150dx^2 + 64dy^2 - 34dxdy$.

2) $z = \dfrac{-2x-5}{x-3y} = \dfrac{2x+5}{3y-x}$ в точке $M(0, 1)$.

Найдем частные производные функции z по переменным x и y в точке M.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(2x+5y)'_x(3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_x}{(3y-x)^2} = \frac{2(3y-x) - (2x+5y)(-1)}{(3y-x)^2} =$$

$$= \frac{6y - 2x + 2x + 5y}{(3y-x)^2} = \frac{11y}{(3y-x)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \frac{1}{9},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(2x+5y)'_y(3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_y}{(3y-x)^2} = \frac{5(3y-x) - (2x+5y)\cdot 3}{(3y-x)^2} =$$

$$= \frac{15y - 5x - 6x - 15y}{(3y-x)^2} = \frac{-11x}{(3y-x)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 0.$$

Запишем формулу для нахождения дифференциала функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$dz|_M = \frac{1}{9}dx.$$

Найдем частные производные 2-го порядка функции z в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{11y}{(3y-x)^2}\right) = \left(11y(3y-x)^{-2}\right)'_x = -22y(3y-x)^{-3}(-1) = \frac{22y}{(3y-x)^3},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M = \frac{22}{27},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-11x}{(3y-x)^2}\right) = \left(-11x(3y-x)^{-2}\right)'_y = 22x(3y-x)^{-3}\cdot 3 = \frac{66x}{(3y-x)^3},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{11y}{(3y-x)^2}\right) = \frac{11(3y-x)^2 - 11y\cdot 2(3y-x)\cdot 3}{(3y-x)^4} = \frac{11(3y-x) - 66y}{(3y-x)^3} =$$

$$= \frac{33y - 11x - 66y}{(3y-x)^3} = \frac{-33y - 11x}{(3y-x)^3}.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M = \frac{-33}{27}.$$

Запишем формулу для нахождения второго дифференциала для функции двух переменных:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy;$$

Тогда:

$$d^2z = \frac{22}{27}dx^2 - \frac{66}{27}dxdy.$$

Задача 4. Найти частные производные 1-го порядка:

1) $z = \sqrt[6]{-2x^2 - 5y^2 + 1} - 3\ln(x^{-2} + xy^{-8})$.

Найдем частные производные функции z по переменным x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{6}\left(-2x^2 - 5y^2 + 1\right)^{\frac{1}{6}-1}\left(-2x^2 - 5y^2 + 1\right)'_x - \frac{3}{x^{-2} + xy^{-8}}\left(x^{-2} + xy^{-8}\right)'_x =$$

$$=\frac{(-4x)}{6\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}-\frac{3x^2y^8}{x^3+y^8}\left(-2x^{-3}+y^{-8}\right)=-\frac{2x}{3\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}-$$

$$-\frac{3x^2y^8}{x^3+y^8}\frac{x^3-2y^8}{x^3y^8}=-\frac{2x}{3\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}-\frac{3(x^3-2y^8)}{x(x^3+y^8)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{6}\left(-2x^2-5y^2+1\right)^{\frac{1}{6}-1}\left(-2x^2-5y^2+1\right)'_y-\frac{3}{x^{-2}+xy^{-8}}\left(x^{-2}+xy^{-8}\right)'_y=$$

$$=\frac{(-10y)}{6\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}-\frac{3x^2y^8}{x^3+y^8}\left(-8xy^{-9}\right)=-\frac{5y}{3\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}+$$

$$+\frac{3x^2y^8}{x^3+y^8}\frac{8x}{y^9}=-\frac{5y}{3\sqrt[6]{\left(-2x^2-5y^2+1\right)^5}}+\frac{24x^3}{y(x^3+y^8)}.$$

2) $U=(z-8)^{(-2x-4y)}$, $z-8>0$, $z-8\neq 1$.

Найдем частные производные функции U по переменным x, y и z:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(z-8)^{(-2x-4y)}\ln(z-8)(-2x-4y)'_x=(z-8)^{(-2x-4y)}\ln(z-8)(-2),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=(z-8)^{(-2x-4y)}\ln(z-8)(-2x-4y)'_y=(z-8)^{(-2x-4y)}\ln(z-8)(-4),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=(-2x-4y)(z-8)^{(-2x-4y-1)}(z-8)'_z=(-2x-4y)(z-8)^{(-2x-4y-1)}.$$

3) $z=-5\operatorname{arctg}\frac{-2x}{y^6}-5\operatorname{tg}^2\left(x^6y+y^6x-1\right).$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-5}{1+\left(\frac{-2x}{y^6}\right)^2}\left(\frac{-2x}{y^6}\right)'_x-5\cdot 2\operatorname{tg}\left(x^6y+y^6x-1\right)\frac{1}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)}\times\times\left(x^6y+y^6x-1\right)'_x=$$

$$\frac{-5}{1+\frac{4x^2}{y^{12}}}\left(\frac{-2}{y^6}\right)-10\operatorname{tg}\left(x^6y+y^6x-1\right)\frac{1}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)}\times$$

$$\times\left(6x^5y+y^6\right)=\frac{10y^6}{y^{12}+4x^2}-10tg\left(x^6y+y^6x-1\right)\frac{6x^5y+y^6}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-5}{1+\left(\frac{-2x}{y^6}\right)^2}\left(\frac{-2x}{y^6}\right)'_y-5\cdot 2\operatorname{tg}\left(x^6y+y^6x-1\right)\frac{1}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)}\times\times\left(x^6y+y^6x-1\right)'_y=$$

$$\frac{-5}{1+\frac{4x^2}{y^{12}}}\left(\frac{-2x(-6)}{y^7}\right)-10\operatorname{tg}\left(x^6y+y^6x-1\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)}\left(x^6+6xy^5\right)=$$

$$=-\frac{60xy^5}{y^{12}+4x^2}-10\,\mathrm{tg}\left(x^6y+y^6x-1\right)\frac{x^6+6xy^5}{\cos^2\left(x^6y+y^6x-1\right)}.$$

Задача 5. Вычислить:

1) $\iint\limits_D 6^{-2x-5y}\,dxdy$, D: $1\le x\le 3$; $-3\le y\le -2$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.8):

$$\iint\limits_D 6^{-2x-5y}\,dxdy=\int_1^3 dx\int_{-3}^{-2}6^{-2x-5y}\,dy=\int_1^3 dx\int_{-3}^{-2}6^{-2x-5y}\left(\frac{d(-2x-5y)}{-5}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\int_1^3\left(\frac{6^{-2x-5y}}{\ln 6}\Big|_{-3}^{-2}\right)dx=-\frac{1}{5\ln 6}\int_1^3\left(6^{-2x+10}-6^{-2x+15}\right)dx=-\frac{1}{5\ln 6}\left(\int_1^3 6^{-2x+10}\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_1^3 6^{-2x+15}\,dx\right)=-\frac{1}{5\ln 6}\left(\int_1^3 6^{-2x+10}\frac{d(-2x+10)}{-2}-\int_1^3 6^{-2x+15}\frac{d(-2x+15)}{-2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5\ln 6}\left(-\frac{1}{2}\frac{6^{-2x+10}}{\ln 6}\Big|_1^3+\frac{1}{2}\frac{6^{-2x+15}}{\ln 6}\Big|_1^3\right)=\frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^{-6+10}-6^{-2+10}-6^{-6+15}+6^{-2+15}\right)=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{10\ln^2 6}\left(6^4-6^8-6^9+6^{13}\right)}.$$

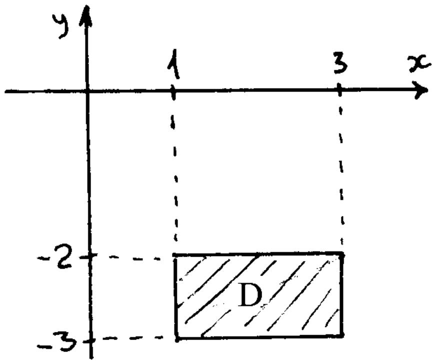

Рис. 2.8

2) $\iint\limits_D (6x-5y)\,dxdy$, D: $x=0$, $y=0$, $-2x-3y=-8$.

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.9)

$2x+3y=8$.

x	y
0	$\frac{8}{3}$
4	0

$y=\dfrac{8-2x}{3}$,

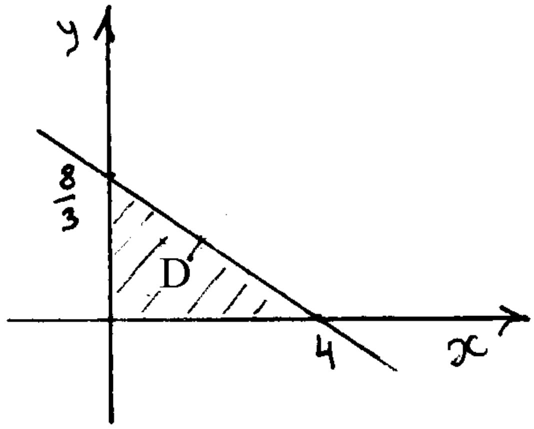

Рис. 2.9

$$\iint_D (6x-5y)dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{8-2x}{3}} (6x-5y)dy = \int_0^4 \left(6xy - 5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{8-2x}{3}} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(2x(8-2x) - \frac{5}{2}\left(\frac{8-2x}{3}\right)^2\right)dx = \int_0^4 \left(16x - 4x^2 - \frac{5}{18}(64 - 32x + 4x^2)\right)dx =$$

$$= \int_0^4 \left(16x - 4x^2 - \frac{160}{9} + \frac{80}{9}x - \frac{10}{9}x^2\right)dx = \int_0^4 \left(-\frac{160}{9} + \frac{224}{9}x - \frac{46}{9}x^2\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{160}{9}x + \frac{224}{9}\frac{x^2}{2} - \frac{46}{9}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \left(-\frac{160}{9}x + \frac{112}{9}x^2 - \frac{46}{27}x^3\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= -\frac{640}{9} + \frac{1792}{9} - \frac{2944}{27} = \frac{5376 - 1920 - 2944}{27} = \mathbf{\frac{512}{27}}.$$

3) $\iint_D x(y-3)dxdy,\ D\colon y = x^2, x = -4y.$

Изобразим область интегрирования на координатной плоскости (рис. 2.10).

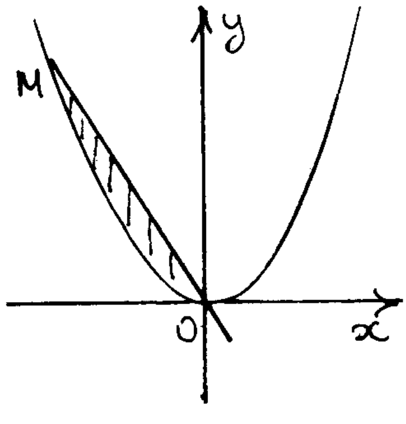

Рис. 2.10

Найдем точки пересечения кривых:

$y = x^2$ и $x = -4y \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x \Rightarrow -\frac{1}{4}x = x^2 \Rightarrow x = 0$ или $x = -\frac{1}{4}$.

Тогда $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, $O(0, 0)$,

$$\iint_D x(y-3)dxdy = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} x(y-3)dy = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} (xy-3x)dy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{xy^2}{2} - 3xy \right) \Bigg|_{x^2}^{-\frac{1}{4}x} dx = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}x\right)^2 - 3x\left(-\frac{1}{4}x\right) - \frac{x}{2}\left(x^2\right)^2 + 3x\left(x^2\right) \right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{x^3}{32} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^5}{2} + 3x^3 \right) dx = \left(\frac{x^4}{4\cdot 32} + \frac{3}{4\cdot 3}x^3 - \frac{x^6}{12} + \frac{3x^4}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{4^4\cdot 4\cdot 32} + \frac{3}{4^3\cdot 4\cdot 3} + \frac{1}{12\cdot 4^6} - \frac{3}{4\cdot 4^4} = \frac{1}{4^5}\left(-\frac{1}{32} + 4 + \frac{1}{48} - 3 \right) =$$

$$= \frac{1}{4^5}\cdot\frac{95}{96} = \mathbf{\frac{95}{98304}}.$$