ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ № 1

Для выполнения домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, Вы учитесь в группе 3, Ваш номер в списке – 15. Тогда по табл. 1 имеем:

3	*b*	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую пятнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициенты						
	b	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*
15	–4	2	–2	7	4	3	–8

Таблица 2.1

Коэффициенты для разных групп

Группа	Коэффициенты						
1	*a*	*b*	*c*	*d*	*k*	*f*	*m*
2	*c*	*d*	*b*	*a*	*k*	*f*	*m*
3	*b*	*a*	*k*	*d*	*c*	*f*	*m*
4	*c*	*a*	*b*	*k*	*d*	*f*	*m*
5	*a*	*c*	*d*	*b*	*k*	*f*	*m*
6	*a*	*k*	*b*	*d*	*c*	*f*	*m*
7	*b*	*k*	*a*	*c*	*d*	*f*	*m*
8	*c*	*k*	*d*	*a*	*b*	*f*	*m*
9	*b*	*d*	*k*	*c*	*a*	*f*	*m*
10	*d*	*k*	*a*	*c*	*b*	*f*	*m*
11	*d*	*c*	*k*	*b*	*a*	*f*	*m*
12	*k*	*c*	*a*	*d*	*b*	*f*	*m*
13	*d*	*a*	*b*	*k*	*c*	*f*	*m*
14	*k*	*b*	*c*	*d*	*a*	*f*	*m*
15	*k*	*a*	*c*	*b*	*d*	*f*	*m*
16	*k*	*c*	*d*	*a*	*b*	*f*	*m*

Таблица 2.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
						f	m
1	1	2	–1	3	6	4	27
2	2	–1	4	–2	–1	3	8
3	-2	4	10	2	3	3	81
4	3	6	–3	–2	4	5	64
5	1	5	2	–3	–4	2	–8
6	4	3	11	–1	–4	3	–81
7	2	5	–2	4	10	3	–64
8	5	3	–1	4	9	3	27
9	–2	5	6	2	–3	4	8
10	–4	10	2	–1	4	2	–1
11	2	3	–2	3	1	3	8
12	–6	5	–1	4	1	2	–64
13	3	2	9	–2	–3	4	27
14	4	5	2	–4	3	6	81
15	–4	2	–2	7	4	3	–8
16	2	5	–1	–2	1	3	–1
17	1	–1	2	3	5	4	64
18	10	–2	6	–4	3	5	–64
19	4	5	–3	6	–4	2	8
20	2	1	3	5	4	6	–8
21	3	5	–2	4	1	4	27
22	–3	2	–2	3	4	5	–27
23	1	3	2	4	5	2	1
24	3	–5	6	1	2	2	–1
25	1	–2	4	2	5	3	–64
26	2	1	6	4	–3	5	81
27	1	4	–3	2	6	8	64
28	4	5	–9	7	3	2	–1
29	3	2	–3	9	5	6	–8
30	–2	3	4	1	–2	4	27

Домашнее задание №1

Задача 1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{cx+d}{bx+k}$;

б) $\lim\limits_{x\to f}\dfrac{x^2-f^2}{x^3-f^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+dx+b}{cx^2+kx+f}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+k}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^2-(1+bx)^2}{cx^2+dx}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+b}-\sqrt[3]{mx^6+bx^2}}{\sqrt{4x^4-c}-\sqrt[3]{ax}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b\sqrt[3]{ax}-\sqrt[4]{81x^8-c}}{(bx+k\sqrt{x})\sqrt{x^2-d}}$;

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+b}-\sqrt{x+c})$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-f})$;

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x+m}-\sqrt{x-m})$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+d}\right)^{dx+k}$;

м) $\lim\limits_{x\to f+0}\dfrac{\sqrt{x-f}}{\sqrt[3]{x^2-f^2}}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{f+x}-\sqrt[3]{f-x}}{c\sqrt[7]{x}}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$;

п) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(b(x-a))}{c(x-a)}$;

р) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} cx}{dx}$;

с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{cx}$;

т) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(fx)-\cos x}{1-\cos(dx)}$;

у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{x}-e^{3x}}{\operatorname{tg} dx}$;

ф) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(a\pi x)}{\sin(c\pi x)}$.

Задача 2. Найти асимптоты и построить эскизы графиков функций:

а) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; б) $y=\dfrac{bx^2+cx+d}{kx+a}$;

в) $y=\dfrac{|bx+a|}{dx+c}$; г) $y=\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{c^2x^2-d^2}}$.

Задача 3. Найти точки разрыва следующих ниже функций, определить характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{|ax-b|}{ax-b}$;

б) $f(x)=\dfrac{cx+d}{(kx+f)^2(ax+b)}$.

Пример выполнения домашнего задания №1

Номер по п/п	Коэффициенты						
	b	*c*	*k*	*d*	*a*	*f*	*m*
*	1	2	–1	3	–1	2	8

Задача 1. Вычислить пределы функций:

Решение

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2(-1)+3}{-1-1}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^2}{x^3-2^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}=$

$=\dfrac{2+2}{4+4+4}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{2x^2-x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x+2}{3x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)=\infty$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)^2-(1+x)^2}{2x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x+x^2-(1+2x+x^2)}{2x^2+3x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x+x^2-1-2x-x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{x(2x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{2x+3}=\mathbf{\frac{4}{3}}\,.$$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{\sqrt{4x^2-2}-\sqrt[3]{-x}}=\left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x\\ \text{в наибольшей степени,}\\ \text{т.е.на } x^2\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}-\dfrac{\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{x^2}-\dfrac{\sqrt[3]{-x}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4}}-\dfrac{\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{\sqrt[3]{x^6}}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{x^4}-\dfrac{\sqrt[3]{-x}}{\sqrt[3]{x^6}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}-\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x^4}}}{\sqrt{4-\dfrac{2}{x^4}}-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{0-\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}-0}=\frac{-2}{2}=-\mathbf{1}\,.$$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{-x}-\sqrt[4]{81x^2-2}}{(x-\sqrt{x})\sqrt{x^2-3}}=\left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{-x}}{x^2}-\dfrac{\sqrt[4]{81x^2-2}}{x^2}}{\dfrac{(x-\sqrt{x})\sqrt{x^2-3}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x^5}}-\sqrt[4]{81-\dfrac{2}{x^8}}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x^5}}-\sqrt[4]{81-\dfrac{2}{x^2}}}{(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{0-\sqrt[4]{81}}{(1-0)\sqrt{1-0}}=\frac{-\sqrt[3]{81}}{1}=-\mathbf{3}\,.$$

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}) = (\infty-\infty) = \left|\begin{array}{l}\text{Домножим числитель и}\\ \text{знаменатель на}\\ \text{сопряженное к числителю}\\ \text{выражение } (\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})\end{array}\right| =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = \mathbf{0}.$$

и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) = (\infty-\infty) = \left|\begin{array}{l}\text{Домножим числитель и}\\ \text{знаменатель на сопряженное}\\ \text{к числителю выражение}\end{array}\right| =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(x+2-x+2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель и}\\ \text{знаменатель на } \sqrt{x}\end{array}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} =$$

$$= \frac{4}{1+1} = \mathbf{2}.$$

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}) = (\infty-\infty) = \left|\begin{array}{l}\text{Домножим числитель и}\\ \text{знаменатель на сопряженное}\\ \text{к числителю выражение}\end{array}\right| =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8})(\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8})}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+8-(x-8))}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+8-x+8)}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{16x}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-8}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{Разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x\end{array}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{16}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{8}{x^2}}} = \left(\frac{16}{0}\right) = +\infty.$$

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x+1}{-x+3}\right)^{3x-1}=(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x+3-2}{-x+3}\right)^{3x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3-x}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-3}\right)^{(3x-1)\left(\frac{2}{x-3}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(3x-1)2}{x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-1}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}}=\boldsymbol{e^{6}}.$$

м) $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{x+2}}=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x+2}}=$

$$=\lim_{x\to2+0}\frac{(x-2)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{x+2}}=\left(\frac{0}{\sqrt[3]{4}}\right)=\mathbf{0}.$$

н) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}}{2\sqrt[7]{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{домножим числитель и знаменатель на}\\ \text{сопряженное к числителю выражение}\\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}{2\sqrt[7]{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3}{2\sqrt[7]{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)-(2-x)}{2\sqrt[7]{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{2\sqrt[7]{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{1-\frac{1}{7}}}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}=\frac{0}{3\sqrt[3]{4}}=\mathbf{0}.$$

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin(x)}{x}=\mathbf{-1}.$

п) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{2(x+1)}=\left|\begin{matrix}x+1=t\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(t)}{2t}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}.$

р) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{3x}=\left|\mathrm{tg}(2x)\approx 2x \text{ при } x\to 0\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}.$

с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{2x}=\left|e^{-x}-1\approx -x \text{ при } x\to 0\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x}=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}.$

т) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(8x)-\cos(x)}{1-\cos(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)-(1-\cos(8x))}{1-\cos(3x)}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(3x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(8x)}{1-\cos(3x)}=\left|\begin{matrix}1-\cos(8x)\approx\dfrac{(8x)^2}{2};1-\cos(x)\approx\dfrac{(x)^2}{2}\\ 1-\cos(3x)\approx\dfrac{(3x)^2}{2}\text{ при } x\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{64x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}}=\frac{1}{9}-\frac{64}{9}=\frac{1-64}{9}=-\mathbf{\frac{63}{9}}.$$

у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-e^{3x}}{\mathrm{tg}(3x)}=\left|\mathrm{tg}(3x)\approx 3x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-e^{3x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+1-e^{3x}}{3x}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}==\left|\begin{matrix}2^x-1\approx x\ln 2\\ e^{3x}-1\approx 3x\\ \text{при } x\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{3x}=$$

$$=\frac{\ln 2}{3}-1=\mathbf{\ln\sqrt[3]{2}-1}.$$

ф) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(-\pi x)}{\sin(2\pi x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-\operatorname{tg}(\pi x)}{\sin(2\pi x)}=$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Внимание! Заменить эквивалентной величиной}\\ \text{сейчас нельзя, так как при } x\to 2,\ \pi x\to 2\pi, \text{ а не к } 0.\\ \text{Сделаем замену } x-2=t,\ x=2+t,\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}(\pi(2+t))}{\sin(2\pi(2+t))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}(2\pi+\pi t)}{\sin(4\pi+2\pi t))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}(\pi t)}{\sin(2\pi t))}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}(\pi t)\approx \pi t\\ \sin(2\pi t)\approx 2\pi t\\ \text{при } t\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi t}{2\pi t}=-\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

Задача 2. Найти асимптоты и построить эскизы графиков функций:

а) $y=\dfrac{-x+1}{2x+3}$; б) $y=\dfrac{x^2+2x+3}{-x-1}$; в) $y=\dfrac{|x-1|}{3x+2}$;

г) $y=\dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}}$.

Решение

а) $y=\dfrac{-x+1}{2x+3}$.

1) ОД.З.: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2};\infty\right)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат:

при $x = 0$ $\quad y=\dfrac{1}{3}$;

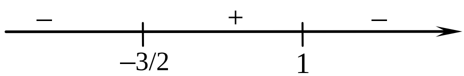
$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ – получили точку пересечения с осью OY.

При $y = 0$ $\quad x = 1$;

(1, 0) – получили точку пересечения с осью OX.

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{-x+1}{2x+3} = \infty$ => $\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2}}$ – **уравнение вертикальной асимптоты**.

Наклонную асимптоту находим по формуле

y = *kx* + *b*,

где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{x(2x+3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{2x^2+3x}=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{0}{2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{2x+3}=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x\end{matrix}\right|$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2};$$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}}$ **– уравнение горизонтальной асимптоты.**

5) Строим эскиз графика (рис. 2.9).

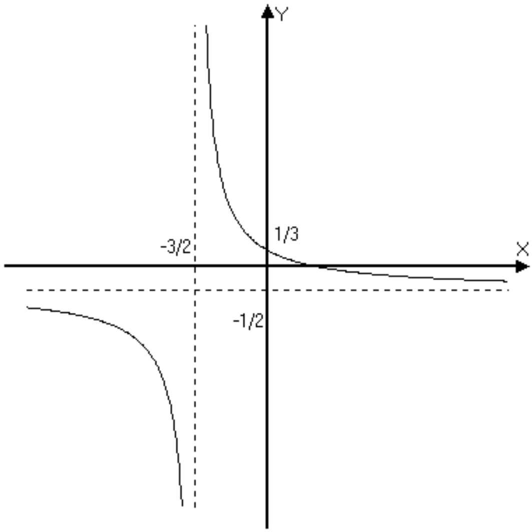


Рис. 2.9

б) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1}$.

1) О.Д.З.: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $\quad y = -3$,

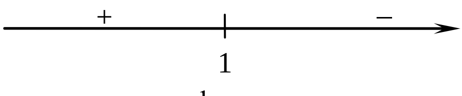
(0, –3) – получили точку пересечения с осью OY;

При $y = 0$ $\quad x^2 + 2x + 3 = 0$;

$D = 4 - 4 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$ – корней нет => график функции ось OX не пересекает

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и нули знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{-x - 1} = \infty$ => **x = –1 – уравнение вертикальной асимптоты**.

Наклонную асимптоту находим по формуле:

$y = kx + b$,

где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x(-x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{-x^2-x} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{array} \right|$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{-1-\frac{1}{x}} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{-x-1}-(-1)x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{-x-1}+x\right) == \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3+x(-x-1)}{-x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2-x}{-x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{-x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-1-\frac{1}{x}} = -1;$$

***y* = – *x* – 1 – уравнение наклонной асимптоты.**

5) Строим эскиз графика (рис. 2.10).

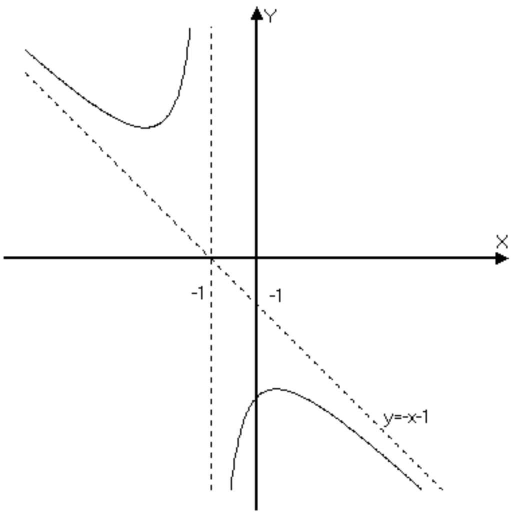


Рис. 2.10

в) $y = \dfrac{|x-1|}{3x+2}$.

1) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3x+2}, \text{если } x \geq 1, \\ \dfrac{1-x}{3x+2}, \text{если } x < 1, \end{cases}$

О.Д.З.: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \infty\right)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ $\quad y = \dfrac{1}{2}$,

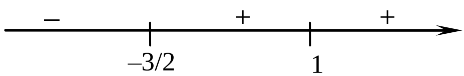
$\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ – точка пересечения с осью OY;

При $y = 0$ $\quad |x - 1| = 0$; $\quad x = 1$,

(1, 0) – точка пересечения с осью OX.

3) Промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты функции.

$\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} \dfrac{|x-1|}{3x+2} = \infty$ => $\boldsymbol{x = -\dfrac{2}{3}}$ – **уравнение вертикальной асимптоты**.

Правую наклонную асимптоту найдем по формулам:

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x(3x+2)} = \left| \begin{matrix} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2 \end{matrix} \right| =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{3 + \dfrac{2}{x}} = \dfrac{0}{3} = 0;$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{3x+2} = \left| \begin{matrix} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{matrix} \right| =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{1}{3};$$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}}$ **– уравнение правой горизонтальной асимптоты**;

левую наклонную асимптоту – по формулам:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x(3x+2)} = \left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{3x+2} = \left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{1}{3};$$

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}}$ **– уравнение левой горизонтальной асимптоты.**

5) Строим эскиз графика (рис. 2.11).

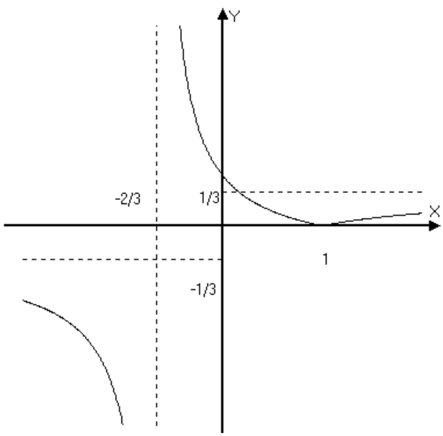
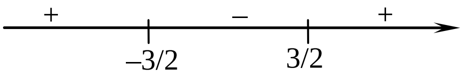


Рис. 2.11

г) $y = \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}}$.

1) Найдем О.Д.З.: $4x^2 - 9 > 0$ $(2x-3)(2x+3) > 0$.



О.Д.З.: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

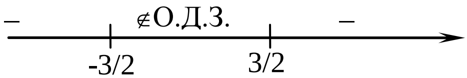
2) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $y = 0$ $1 - x^2 = 0$; $x_1 = 1$ и $x_2 = -1 \notin$ О.Д.З. $\Rightarrow$ график функции не пересекает ось OX;

При $x = 0 \notin$ О.Д.З. $\Rightarrow$ график ось OY не пересекает.

3) Найдем промежутки постоянства знака значений функции.

На числовой прямой отметим нули числителя и знаменателя и определим знаки получившихся интервалов:



4) Найдем асимптоты.

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}-0} \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}+0} \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}} = \infty \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{3}{2}, x = \frac{3}{2}}$ – **уравнения вертикальных асимптот**.

Правая и левая наклонные асимптоты различны.

Найдем правую наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{1-x^2}{x\sqrt{4x^2-9}} = \left|\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } x^2\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\sqrt{4-\frac{9}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\leftarrow\infty}\big(f(x)-kx\big) = \lim_{x\leftarrow\infty}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{4x^2-9}} - \left(-\frac{1}{2}x\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{4x^2-9}}+\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\leftarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} + \lim_{x\leftarrow\infty}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{\sqrt{4x^2-9}}\right) =$$

$$= 0 + \lim_{x\leftarrow\infty}\frac{x\sqrt{4x^2-9}-2x^2}{2\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{x\left(\sqrt{4x^2-9}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-9}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-9}\left(\sqrt{4x^2-9}+2x\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{x\left(4x^2-9-4x^2\right)}{\sqrt{4x^2-9}\left(\sqrt{4x^2-9}+2x\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{-9x}{4x^2-9+2x\sqrt{4x^2-9}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{-9}{4x-\frac{9}{x}+2\sqrt{4x^2-9}} = \frac{-9}{\infty} = 0;$$

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x}$ **– уравнение правой наклонной асимптоты.**

Функция $y = \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}}$ – четная, так как

$y(-x) = \dfrac{-(-x)^2+1}{\sqrt{4(-x)^2-9}} = \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^2-9}} = y(x)$, следовательно, график этой функции симметричен относительно оси OY.

Тогда $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$ **– уравнение левой наклонной асимптоты**.

5) Строим эскиз графика (рис. 2.12).

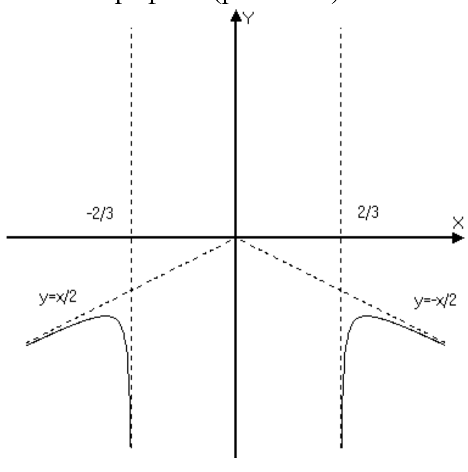


Рис. 2.12

Задача 3. Найти точки разрыва следующих функций, определить характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{|-x-1|}{-x-1}$;

б) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)}$.

Решение

а) $f(x)=\dfrac{|-x-1|}{-x-1}$.

В точке $x=-1$ функция не определена, следовательно, $x=-1$ – точка разрыва функции

Раскроем модуль:

$$|-x-1|=\begin{cases}-x-1, \text{если } -x-1\ge 0,\\ -(-x-1), \text{если } -x-1<0;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0}\frac{-(-x-1)}{-x-1} = -1;$$

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = \lim_{x\to-1-0}\frac{-x-1}{-x-1} = 1;$$

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) \ne \lim\limits_{x\to-1-0} f(x) \Rightarrow$ **$x=-1$ – точка разрыва I рода**.

б) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)}$.

$x=2$, $x=1$ – точки разрыва;

$$\lim_{x\to2+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0}\frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)} = \left(\frac{7}{0}\right)=\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0}\frac{2x+3}{(-x+2)^2(-x+1)} = \left(\frac{5}{0}\right)=\infty;$$

$x=1$ и $x=2$ – точки