

5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

5.1. Функции нескольких переменных

Величина u называется функцией переменных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принадлежащей некоторому множеству X , поставлено в соответствие одно определенное значение величины u . Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются аргументами или независимыми переменными. Множество X называется областью определения функции. Если u функция переменных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, то пишут:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В основном мы будем рассматривать функции двух и трех переменных:

$z = f(x, y)$ – функция двух переменных,

$u = f(x, y, z)$ – функция трех переменных.

Рассмотрим более подробно функцию $z = f(x, y)$ – двух переменных. Величина z называется функцией переменных величин x, y на множестве X , если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины z . Как и функции одной переменной, функции двух переменных могут быть заданы таблицей, аналитически (формулой) и графически.

Табличное задание функции двух переменных состоит в том, что для каждой пары значений независимых переменных (x, y) указывается соответствующее им значение функции.

При аналитическом способе задания функции двух переменных задается формула, при помощи которой по заданным значениям независимых переменных x, y , можно найти значение функции.

Если функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области X на плоскости $ХОУ$, тогда каждой точке (x, y) , принадлежащей области X , будет отвечать точка $(x, y, f(x, y))$ трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$.

Множество всех таких точек $(x, y, f(x, y))$ называется графиком функции $z = f(x, y)$. Иными словами графиком функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y называется множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y , а аппликаты – соответствующими значениями z . Графиком функции непрерывных аргументов обычно служит некоторая поверхность. Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является эллиптический параболоид, графиком функции $z = x + y$ является плоскость.

В аналитической геометрии при изучении поверхностей второго порядка пользуются методом сечений, который заключается в том, что вид поверхности определяется с помощью исследования кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Этот же метод применяется и при исследовании функций двух переменных. Для изучения характера изменения функции пользуются линиями уровня. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется линия в плоскости $ХОУ$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение. Для того чтобы получить линию уровня необходимо пересечь график функции плоскостью $z = c$, параллельной плоскости $ХОУ$, а затем, спроектировать линию пересечения плоскости $z = c$ и данной поверхности на плоскость $ХОУ$. Например, линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности с центром в начале координат.

Точно так же, при изучении функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ используют поверхности уровня. Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u=c$.

5.2. Предел и непрерывность функции двух переменных.

δ - окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ называется множество $U_\delta(P_0)$ точек (x, y) плоскости $ХОУ$ таких, что $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$, то есть δ - окрестность точки

$P_0(x_0, y_0)$ - это внутренность круга с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ радиуса δ . Проколотой δ - окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ называется множество

$$\overset{\circ}{U}_\delta(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta\},$$

то есть проколотая δ - окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ - это внутренность круга с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ радиуса δ с выколотым центром.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(P_0)$ точки $P_0(x_0, y_0)$. Число a называется пределом функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $P(x, y) \in \overset{\circ}{U}(P_0)$ и удовлетворяющих условию $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$, имеет место неравенство:

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon.$$

Предполагается, что точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(x_0, y_0)$ по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу a .

$$\text{Обозначают: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a.$$

Аналогично определяется предел для функции нескольких переменных.

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $P_0(x_0, y_0)$, если функция определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в некоторой области D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывные функции двух переменных обладают теми же самыми свойствами, что и непрерывные функции одного переменного (см. раздел 3.7).

Пример 5.1. Вычислить предел:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad 4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(3 - \sqrt{xy + 9})(3 + \sqrt{xy + 9})}{xy(3 + \sqrt{xy + 9})} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{9 - xy - 9}{xy(3 + \sqrt{xy + 9})} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-1}{(3 + \sqrt{xy + 9})} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(1 + x + y - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}.$$

Так как при $x \rightarrow 1, y \rightarrow 0$ функция $x + y - 1 \rightarrow 0$, то можно заменить функцию $\alpha(x, y) = \ln^2(1 + x + y - 1)$ на эквивалентную ей бесконечно малую функцию $\alpha'(x, y) = x + y - 1$.

$$\text{Тогда } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(1 + x + y - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x + y - 1)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} =$$

|Сделаем замену $x - 1 = z$, где $z \rightarrow 0$ |

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(z + y)^2}{\sqrt{z^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{l} z = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \\ r \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r(1 + \sin 2\varphi) = 0. \end{aligned}$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Вычислим повторные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1} = 1.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1+y}{1} = -1.$$

Получили, что оба повторных предела существуют и конечны, но они не равны между собой. Следовательно, по теореме о единственности предела предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ не

существует.

Также можно показать, что данный предел не существует, рассмотрев изменение x и y вдоль прямых $y = kx$. Тогда данное выражение может стремиться к различным пределам в зависимости от выбранного k . Действительно, при $y = kx$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - (kx)^2 + x^3 + (kx)^3}{x^2 + (kx)^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2(1 - k^2 + x + k^3x)}{x^2(1 + k^2)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{(1 - k^2 + x + k^3x)}{(1 + k^2)} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}. \end{aligned}$$

Тогда при разных значениях k получаются различные предельные значения. Следовательно, данный предел не существует.

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Рассмотрим изменение x и y вдоль прямых $y = kx$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + (kx)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{kx^3}{x^2(x^2 + k^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0.$$

Рассмотрим изменение x и y вдоль параболы $y = x^2$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2}} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2}} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Получили, что предел вдоль прямых $y = kx$ существует и равен при любом значении k нулю, а предел вдоль параболы $y = x^2$ существует и равен $\frac{1}{2}$. Значит, по теореме об единственности

предела предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ не существует.

5.3. Дифференцируемость функции многих переменных.

Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости $ХОУ$. Пусть точка $P(x, y) \in D$, величина Δx - приращение аргумента x , величина $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ - приращение функции $f(x, y)$ по переменной x . Тогда частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x в точке $P(x, y)$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \text{если этот}$$

предел существует.

То есть частной производной функции $z = f(x, y)$ называется функция переменных x и y , которая получается при дифференцировании функции $z = f(x, y)$ по переменной x в предположении, что y - константа.

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x обозначается символами: $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $z'_x(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y в точке $P(x, y)$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Здесь мы функцию $z = f(x, y)$ дифференцируем по переменной y , считая, что x – константа.

Частная производная по переменной y обозначается символами: $\frac{\partial z}{\partial y}$ или $z'_y(x, y)$.

Так как частная производная является обыкновенной производной от данной функции, взятой в предположении, что изменяется только переменная, по которой производится дифференцирование, то фактическое отыскание частных производных элементарных функций осуществляется по известным правилам дифференцирования функции одного переменного.

Абсолютная величина частной производной $z'_x(x_0, y_0)$ или $z'_y(x_0, y_0)$ дает величину скорости, с которой происходит изменение функции $z = f(x, y)$ при изменении только x или только y , а знак частной производной указывает характер этого изменения (возрастание, убывание). Геометрический смысл частных производных функции двух переменных состоит в следующем: частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x равна тангенсу угла между осью OX и касательной в точке $P(x_0, y_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$; частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y равна тангенсу угла между осью OY и касательной в точке $P(x_0, y_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$.

Пусть $u = f(x, y, z)$ - функция трех переменных; $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные функции по x, y, z соответственно.

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Для нахождения частной производной функции $u = f(x, y, z)$ по какой-либо переменной дифференцируем $f(x, y, z)$ как функцию одной этой переменной, считая остальные переменные константами.

Дифференцируемость функции нескольких переменных и ее дифференциал

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D , точка $P(x, y) \in D$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x, y) \in D$, если существуют такие числа A и B , что полное приращение этой функции $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, отвечающее приращениям $\Delta x, \Delta y$ аргументов, можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$, то часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$ называется *главной частью* приращения Δz .

Полным дифференциалом функции двух независимых переменных называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных.

Полный дифференциал обозначается символом dz и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Геометрический смысл полного дифференциала заключается в следующем: полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$, отвечающий приращениям Δx и Δy переменных x, y , равен приращению аппликаты точки касательной плоскости, проведенной

к поверхности $z = f(x, y)$ в ее точке $P(x, y)$ при переходе от точки $P(x, y)$ к точке $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Полный дифференциал du функции $u = f(x, y, z)$ трех переменных вычисляется по формуле:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных

1) Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

2) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ определены в некоторой окрестности точки $P(x, y)$ и непрерывны в точке $P(x, y)$, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$.

Пример 5.2. Найти частные производные и дифференциал первого порядка функций в точке M :

1) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1, 3)$;

2) $z = \frac{1}{\arctg \frac{x}{y}}$ в точке $M(1, 1)$;

3) $u = e^{xy} + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z}$; в точке $M(2, 1, -1)$;

Решение:

$$1) z = \ln(x^2 + y^2), M(1,3).$$

Найдем частную производную функции z по переменной x , для этого продифференцируем функцию z по переменной x , считая переменную y константой:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Найдем частную производную функции z по переменной y , для этого продифференцируем функцию z по переменной y , считая переменную x константой:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(1,3)$. Тогда имеем:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 3^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = \frac{2 \cdot 3}{1^2 + 3^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Найдем дифференциал первого порядка по формуле:

$$dz|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M dy.$$

Тогда для нашей функции дифференциал первого порядка равен:

$$dz|_M = \frac{1}{5} dx + \frac{3}{5} dy.$$

$$2) z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{x}{y}}, M(1,1).$$

Найдем частную производную функции z по переменной x , для этого продифференцируем функцию z по переменной x , считая переменную y константой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)} \left(\frac{x}{y} \right)'_x = -\frac{y^2}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} (y^2 + x^2)} \cdot \frac{1}{y} = \\ &= -\frac{y}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} (y^2 + x^2)}. \end{aligned}$$

Найдем частную производную функции z по переменной y , для этого продифференцируем функцию z по переменной y , считая переменную x константой:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y = \\
&= -\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)} \left(\frac{x}{y} \right)'_y = -\frac{y^2}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} (y^2 + x^2)} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \\
&= \frac{x}{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} (y^2 + x^2)}.
\end{aligned}$$

Вычислим частные производные в точке $M(1,1)$. Тогда имеем:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 1 \cdot (1+1)} = -\frac{8}{\pi^2};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 1 \cdot (1+1)} = \frac{8}{\pi^2}.$$

Найдем дифференциал первого порядка по формуле:

$$dz|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M dy.$$

Тогда для нашей функции дифференциал первого порядка равен:

$$dz|_M = -\frac{8}{\pi^2} dx + \frac{8}{\pi^2} dy.$$

$$3) u = e^{xy} + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z}, \quad M(2,1,-1).$$

Найдем частную производную функции u по переменной x , для этого продифференцируем функцию u по переменной x , считая переменные y и z константами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{xy} (xy)'_x + 2z \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z-1} \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_x = \\ &= ye^{xy} + 2z \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z-1} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right).\end{aligned}$$

Найдем частную производную функции u по переменной y , для этого продифференцируем функцию u по переменной y , считая переменные x и z константами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= e^{xy} (xy)'_y + 2z \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z-1} \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_y = \\ &= xe^{xy} + 2z \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z-1} \left(-\frac{x}{2\sqrt{y}^3} \right) = xe^{xy} - \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z-1} \left(\frac{zx}{\sqrt{y}^3} \right).\end{aligned}$$

Найдем частную производную функции u по переменной z , для этого продифференцируем функцию u по переменной z , считая переменные x и y константами:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right) (2z)'_z = 2 \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{2z} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right).$$

Вычислим частные производные в точке $M(2,1,-1)$.

Тогда имеем:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = e^2 - 2 \cdot 2^{-3} = e^2 - \frac{1}{4};$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2e^2 - 2^{-3}(-2) = 2e^2 + \frac{1}{4};$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 2 \cdot 2^{-2} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$$

Найдем дифференциал первого порядка по формуле:

$$du|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M dy + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M dz.$$

Тогда для нашей функции дифференциал первого порядка равен:

$$du|_M = \left(e^2 - \frac{1}{4} \right) dx + \left(2e^2 + \frac{1}{4} \right) dy + \frac{\ln 2}{2} dz.$$

Пример 5.3. Найти частные производные первого порядка функций:

$$1) z = \sqrt[6]{2x^2 + 5y^2 - 1} - 3\ln(x^{-2} + xy^{-8});$$

$$2) u = (z - 8)^{2x-4y}, \text{ где } z - 8 > 0, z - 8 \neq 1;$$

$$3) z = 5\arcsin \frac{y}{x^6} - 5tg^2(x^6y + y^6x - 1).$$

Решение:

$$1) z = \sqrt[6]{2x^2 + 5y^2 - 1} - 3\ln(x^{-2} + xy^{-8});$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{6} (2x^2 + 5y^2 - 1)^{\frac{1}{6}-1} (2x^2 + 5y^2 - 1)'_x - \frac{3}{x^{-2} + xy^{-8}} (x^{-2} + xy^{-8})'_x = \\ &= \frac{4x}{6\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} - \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} (y^{-8} - 2x^{-3}) = \frac{2x}{3\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} - \\ &- \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} \frac{x^3 - 2y^8}{x^3 y^8} = \frac{2x}{3\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} - \frac{3(x^3 - 2y^8)}{x(x^3 + y^8)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{6} (2x^2 + 5y^2 - 1)^{\frac{1}{6}-1} (2x^2 + 5y^2 - 1)'_y - \frac{3}{x^{-2} + xy^{-8}} (x^{-2} + xy^{-8})'_y = \\ &= \frac{10y}{6\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} - \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} (-8xy^{-9}) = \frac{5y}{3\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} + \\ &+ \frac{3x^2 y^8}{x^3 + y^8} \frac{8x}{y^9} = \frac{5y}{3\sqrt[6]{(2x^2 + 5y^2 - 1)^5}} + \frac{24x^3}{y(x^3 + y^8)}.\end{aligned}$$

$$2) u = (z - 8)^{2x-4y}, \text{ где } z - 8 > 0, z - 8 \neq 1;$$

Найдем частные производные функции u по переменным x, y

и z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (z - 8)^{2x-4y} \ln(z - 8) \cdot (2x - 4y)'_x = 2(z - 8)^{2x-4y} \ln(z - 8);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (z - 8)^{2x-4y} \ln(z - 8) \cdot (2x - 4y)'_y = -4(z - 8)^{2x-4y} \ln(z - 8);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2x - 4y)(z - 8)^{2x-4y-1} (z - 8)'_z = (2x - 4y)(z - 8)^{2x-4y-1}.$$

$$3) z = 5 \arcsin \frac{y}{x^6} - 5 \operatorname{tg}^2(x^6 y + y^6 x - 1).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x^6}\right)^2}} (yx^{-6})'_x - 5 \cdot 2tg(x^6y + y^6x - 1) \left(tg(x^6y + y^6x - 1) \right)'_x = \\
 &= \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x^6}\right)^2}} (-6yx^{-7}) - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{(x^6y + y^6x - 1)'_x}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)} = \\
 &= -\frac{30y}{x^7 \sqrt{\frac{x^{12} - y^2}{x^{12}}}} - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{6x^5y + y^6}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)} = \\
 &= -\frac{30yx^6}{x^7 \sqrt{x^{12} - y^2}} - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{6x^5y + y^6}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)} = \\
 &= -\frac{30y}{x \sqrt{x^{12} - y^2}} - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{6x^5y + y^6}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)}; \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x^6}\right)^2}} \left(\frac{y}{x^6}\right)'_y - 5 \cdot 2tg(x^6y + y^6x - 1) \left(tg(x^6y + y^6x - 1) \right)'_y = \\
 &= \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x^6}\right)^2}} \left(\frac{1}{x^6}\right) - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{(x^6y + y^6x - 1)'_y}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)} = \\
 &= \frac{5}{x^6 \sqrt{\frac{x^{12} - y^2}{x^{12}}}} - 10tg(x^6y + y^6x - 1) \cdot \frac{x^6 + 6y^5x}{\cos^2(x^6y + y^6x - 1)} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{5x^6}{x^6 \sqrt{x^{12} - y^2}} - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \cdot \frac{x^6 + 6y^5 x}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{x^{12} - y^2}} - 10 \operatorname{tg}(x^6 y + y^6 x - 1) \cdot \frac{x^6 + 6y^5 x}{\cos^2(x^6 y + y^6 x - 1)}.$$

5.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$

и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в каждой точке области D . Эти производные также являются

функциями переменных x и y . Частные производные от этих функций называются *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* от данной функции $z = f(x, y)$.

Каждая производная первого порядка имеет две частные производные: по переменной x и по переменной y . Таким образом, мы получим четыре частных производных второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}.$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными*,

производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ получается дифференцированием функции $z = f(x, y)$ сначала по переменной x , а затем по y ; для нахождения

производной $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, наоборот, сначала функцию

$z = f(x, y)$ дифференцируем по переменной y , а затем по x .

Например, рассмотрим функцию $z = x^y$ ($x > 0, x \neq 1$).

Найдем ее частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \ln x) = x^y \ln^2 x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \ln x) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}.$$

Заметим, что в данном примере смешанные производные

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны между собой. Это не случайно.

Если смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ определены в

некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в этой точке, то тогда смешанные производные в этой точке равны между собой,

то есть $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Здесь условие непрерывности частных

производных является существенным условием, если оно не выполнено, то может оказаться, что смешанные производные будут не равны между собой.

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка, и т.д.

Пусть в области D задана функция $z = z(x, y)$ двух переменных x и y . Если эта функция дифференцируема в области D , то ее полный дифференциал в точке $M(x, y)$ равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Тогда, полным дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала первого порядка при условии, что dx и dy считаются постоянными. Формула для нахождения второго дифференциала:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Тогда в нашем примере, мы имеем:

$$d^2 z = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + x^y \ln^2 x dy^2 + 2(yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}) dx dy$$

Для функции $u = u(x, y, z)$ трех переменных x, y и z дифференциал второго порядка равен:

$$\begin{aligned} d^2 u = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right), & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Задача 5. 4. Найти дифференциал первого и второго порядка функции:

$$1) z = \frac{x}{y^2} + \frac{5y}{x^3} + 5x^6 \text{ в точке } M(1, 1);$$

$$2) z = \frac{2x + 5}{3y - x} \text{ в точке } M(0, 1);$$

$$3) z = \ln(e^{2x} + e^y) \text{ в точке } M(0, 0);$$

$$4) u = 2xy^5z + 4x^3y - 6xyz^2 + 2x + 3y - 5z \text{ в точке}$$

$$M(-2, 1, -1);$$

$$5) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy} \text{ в точке } M(1, 1, 1).$$

Решение

$$1) z = \frac{x}{y^2} + \frac{5y}{x^3} + 5x^6, \quad M(1, 1).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^{-2} + 5yx^{-3} + 5x^6)'_x = y^{-2} - 15x^{-4}y + 30x^5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xy^{-2} + 5yx^{-3} + 5x^6)'_y = -2y^{-3}x + 5x^{-3}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(1, 1)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 1 - 15 + 30 = 16, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -2 + 5 = 3.$$

Найдем дифференциал первого порядка функции z в точке M по формуле:

$$dz|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M dy$$

Тогда $dz|_M = 16dx + 3dy$.

Найдем частные производные второго порядка функции z :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (y^{-2} - 15x^{-4}y + 30x^5)'_x = 60x^{-5}y + 150x^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-2xy^{-3} + 5x^{-3})'_y = 6xy^{-4};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (y^{-2} - 15x^{-4}y + 30x^5)'_y = -2y^{-3} - 15x^{-4}.$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M :

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = 210, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = 6, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -2 - 15 = -17.$$

Найдем второй дифференциал функции z в точке M по формуле:

$$d^2 z|_M = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M dx^2 + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M dy^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M dx dy.$$

Тогда $d^2 z|_M = 210dx^2 + 6dy^2 - 34dxdy$.

$$2) z = \frac{2x+5}{3y-x}, \quad M(0, 1).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(2x+5)'_x(3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_x}{(3y-x)^2} = \frac{2(3y-x) - (2x+5y)(-1)}{(3y-x)^2} = \\ &= \frac{6y - 2x + 2x + 5y}{(3y-x)^2} = \frac{11y}{(3y-x)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(2x+5y)'_y(3y-x) - (2x+5y)(3y-x)'_y}{(3y-x)^2} = \frac{5(3y-x) - (2x+5y) \cdot 3}{(3y-x)^2} =$$

$$= \frac{15y - 5x - 6x - 15y}{(3y-x)^2} = \frac{-11x}{(3y-x)^2}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(0,1)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = \frac{1}{9}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 0.$$

Найдем дифференциал первого порядка функции z в точке M по формуле:

$$dz|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M dy.$$

Тогда

$$dz|_M = \frac{1}{9} dx.$$

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{11y}{(3y-x)^2} \right) = \left(11y(3y-x)^{-2} \right)'_x = -22y(3y-x)^{-3}(-1) = \frac{22y}{(3y-x)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-11x}{(3y-x)^2} \right) = \left(-11x(3y-x)^{-2} \right)'_y = 22x(3y-x)^{-3} \cdot 3 = \frac{66x}{(3y-x)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{11y}{(3y-x)^2} \right) = \frac{11(3y-x)^2 - 11y \cdot 2(3y-x) \cdot 3}{(3y-x)^4} = \frac{11(3y-x) - 66y}{(3y-x)^3} =$$

$$= \frac{33y - 11x - 66y}{(3y-x)^3} = \frac{-33y - 11x}{(3y-x)^3}.$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M :

.

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = \frac{22}{27}, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -\frac{33}{27} = -\frac{11}{9}.$$

Найдем второй дифференциал функции z в точке M по формуле:

$$d^2 z|_M = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M dx^2 + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M dy^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M dx dy.$$

Тогда:

$$d^2 z|_M = \frac{22}{27} dx^2 - \frac{22}{9} dx dy.$$

$$3) z = \ln(e^{2x} + e^y), \quad M(0,0).$$

Найдем частные производные функции z по переменным x и y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(e^{2x} + e^y))'_x = \frac{1}{e^{2x} + e^y} (e^{2x} + e^y)'_x = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(e^{2x} + e^y))'_y = \frac{1}{e^{2x} + e^y} (e^{2x} + e^y)'_y = \frac{e^y}{e^{2x} + e^y}.$$

Вычислим частные производные в точке M :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал первого порядка функции z в точке M по формуле:

$$dz|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M dy$$

$$\text{Тогда} \quad dz|_M = dx + \frac{1}{2} dy.$$

Найдем частные производные второго порядка функции z :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^y} \right)'_x = \\
&= 2 \cdot \frac{(e^{2x})'_x (e^{2x} + e^y) - e^{2x} \cdot (e^{2x} + e^y)'_x}{(e^{2x} + e^y)^2} = \\
&= 2 \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x} + e^y) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + e^y)^2} = \frac{4e^{2x} \cdot e^y}{(e^{2x} + e^y)^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{e^y}{e^{2x} + e^y} \right)'_y = \\
&= \frac{(e^y)'_y (e^{2x} + e^y) - e^y \cdot (e^{2x} + e^y)'_y}{(e^{2x} + e^y)^2} = \frac{e^y(e^{2x} + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^{2x} + e^y)^2} = \\
&= \frac{e^y \cdot e^{2x}}{(e^{2x} + e^y)^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^y} \right)'_y = 2 \cdot \frac{-e^{2x} \cdot (e^{2x} + e^y)'_y}{(e^{2x} + e^y)^2} = \\
&= -2 \cdot \frac{e^{2x} \cdot e^y}{(e^{2x} + e^y)^2}.
\end{aligned}$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M :

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = 1, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = \frac{1}{4}, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -\frac{1}{2}.$$

Найдем второй дифференциал функции z в точке M по формуле:

$$d^2 z|_M = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M dx^2 + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M dy^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M dx dy.$$

Тогда $d^2z|_M = dx^2 + \frac{1}{4}dy^2 - dx dy$.

$$4) u = 2xy^5z + 4x^3y - 6xyz^2 + 2x + 3y - 5z, \quad M(-2, 1, -1).$$

Найдем частные производные функции u по переменным x, y и z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2xy^5z + 4x^3y - 6xyz^2 + 2x + 3y - 5z)'_x =$$

$$= 2y^5z + 12x^2y - 6yz^2 + 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2xy^5z + 4x^3y - 6xyz^2 + 2x + 3y - 5z)'_y =$$

$$= 10xy^4z + 4x^3 - 6xz^2 + 3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2xy^5z + 4x^3y - 6xyz^2 + 2x + 3y - 5z)'_z =$$

$$= 2xy^5 - 12xyz - 5.$$

Вычислим частные производные в точке M :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 42, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -33.$$

Найдем дифференциал первого порядка функции u в точке M по формуле:

$$du|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M dy + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M dz$$

$$\text{Тогда } dz|_M = 42dx + 3dy - 33dz.$$

Найдем частные производные второго порядка функции u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = (2y^5z + 12x^2y - 6yz^2 + 2)'_x = 24xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = (10xy^4z + 4x^3 - 6xz^2 + 3)'_y = 40xy^3z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = (2xy^5 - 12xyz - 5)'_z = -12xy;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = (2y^5z + 12x^2y - 6yz^2 + 2)'_y = \\ &= 10y^4z + 12x^2 - 6z^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = (2y^5z + 12x^2y - 6yz^2 + 2)'_z = 2y^5 - 12yz;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = (10xy^4z + 4x^3 - 6xz^2 + 3)'_z = 10xy^4 - 12xz.$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_M = 24(-2) = -48; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_M = 40(-2)(-1) = 80;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_M = -12(-2) = 24; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_M = 10(-1) + 12 \cdot 4 - 6 = 32;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_M = 2 - 12(-1) = 14; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_M = 10(-2) - 12(-2)(-1) = -44.$$

Найдем второй дифференциал функций в точке M по формуле:

$$d^2u\Big|_M = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_M dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_M dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_M dz^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_M dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Big|_M dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\Big|_M dydz .$$

Тогда

$$d^2u\Big|_M = -48dx^2 + 80dy^2 + 24dz^2 + 64dxdy + 28dxdz - 88dydz .$$

$$5) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy} , M(2,1,1).$$

Найдем частные производные функции u по переменным x , y

и z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy})'_x = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy)'_x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} =$$

$$= \frac{2x - 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy})'_y = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy)'_y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} =$$

$$= \frac{2y - 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} = \frac{y - x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy})'_z = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy)'_z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} =$$

$$= \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} .$$

Вычислим частные производные в точке M :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем дифференциал первого порядка функции u в точке M по формуле:

$$du|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M dx + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M dy + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M dz$$

$$\text{Тогда } dz|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} (dx - dy + dz).$$

Найдем частные производные второго порядка функции u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}} \right)'_x = \\ &= \frac{(x-y)'_x \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (x-y)(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})'_x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (x-y) \cdot \frac{2x-2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}}}{x^2+y^2+z^2-2xy} = \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-2xy - (x-y) \cdot (x-y)}{\frac{3}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^2}} = \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-2xy - x^2 + 2xy - y^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}} \right)'_y = \\
&= \frac{(y-x)'_y \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (y-x)(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})'_y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})^2} = \\
&= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (y-x) \cdot \frac{2y-2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}}}{x^2+y^2+z^2-2xy} = \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2-2xy - (y-x) \cdot (y-x)}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2-2xy - y^2 + 2xy - x^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}} \right)'_z = \\
&= \frac{(z)'_z \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - z(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})'_z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})^2} = \\
&= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - z \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}}}{x^2+y^2+z^2-2xy} = \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2-2xy - z^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}} \right)'_y = \\
&= \frac{(x-y)'_y \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (x-y)(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})'_y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})^2} = \\
&= \frac{-\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy} - (x-y) \cdot \frac{2y-2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}}}{x^2+y^2+z^2-2xy} = \\
&= \frac{-x^2-y^2-z^2+2xy - (x-y) \cdot (y-x)}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{-x^2-y^2-z^2+2xy+x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-z^2}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}} \right)'_z = \\
&= \frac{-(x-y)(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})'_z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy})^2} = \\
&= \frac{-(x-y) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy}}}{x^2+y^2+z^2-2xy} = \frac{(y-x) \cdot z}{(x^2+y^2+z^2-2xy)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{y-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}} \right)'_z = \\
&= \frac{-(y-x)(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy})'_z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy})^2} = \\
&= \frac{-(y-x) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}}}{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy} = \frac{(x-y) \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_M &= \frac{1}{2\sqrt{2}}; & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_M &= \frac{1}{2\sqrt{2}}; & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_M &= \frac{1}{2\sqrt{2}}; \\
\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_M &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}; & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_M &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}; & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_M &= \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Найдем второй дифференциал функций в точке M по формуле:

$$\begin{aligned}
d^2 u|_M &= \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_M dx^2 + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_M dy^2 + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_M dz^2 + \\
&+ 2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_M dx dy + 2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_M dx dz + 2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_M dy dz.
\end{aligned}$$

Тогда

$$d^2 u|_M = \frac{1}{2\sqrt{2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dx dy - 2dx dz + 2dy dz).$$

5.5. Производная сложной функции и производная функции, заданной неявно

Дифференцирование сложной функции

Если зависимость функции от аргументов задана через некоторые промежуточные переменные, то есть, задана композиция функций, то в этом случае говорят, что задана сложная функция.

Пусть в некоторой области D задана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, причем каждая из переменных x, y в свою очередь является дифференцируемой функцией независимой переменной t , то есть $x = x(t), y = y(t)$ и существуют

производные $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ и $\frac{dy}{dt} = y'(t)$. Тогда производная сложной функции $z = f(x(t), y(t))$ может быть вычислена по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

В частном случае, если $z = f(x, y)$, а функция $y = y(x)$, то есть z является сложной функцией от переменной x , то полная производная функции z по x будет равна:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Сформулированное правило дифференцирования сложной функции остается справедливым и для функций любого числа независимых переменных и при любом числе промежуточных аргументов. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция n независимых переменных, которые являются функциями независимых переменных $t_1, t_2, \dots, t_m$, то есть $x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$, тогда частные

производные функции u по переменным $t_1, t_2, \dots, t_m$ находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}; \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.\end{aligned}$$

При этом выражение для дифференциала первого порядка имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

В частности, для функции $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v), y = y(u, v)$ имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

Дифференциал первого порядка в этом случае равен:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

То есть полный дифференциал для функции $z = f(x, y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли ее аргументы x и y независимыми переменными или функциями от независимых переменных (свойство инвариантности первого дифференциала).

Дифференцирование функции, заданной неявно

1. Напомним, что неявная функция одного переменного определяется уравнением $F(x, y) = 0$ (см п.4.6).

Если $F(x, y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y , определяет y как функцию от переменной x и $F'_y \neq 0$, то производная этой неявной функции может быть найдена по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

где F'_x, F'_y – частные производные функции $F(x, y)$.

Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием данной формулы.

2. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как некоторую функцию $z = \varphi(x, y)$ двух независимых переменных x и y .

Если $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция трех переменных x, y и z и $F'_z \neq 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

где F'_x, F'_y, F'_z – частные производные функции $F(x, y, z)$

3. Пусть уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ определяет y как некоторую функцию $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Если $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ – дифференцируемая функция $n + 1$ переменной $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ и $F'_y \neq 0$, то

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где F'_{x_i}, F'_y – частные производные функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$.

Пример 5.5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \ln \cos(xy^3)$, где $x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$.

Решение:

Найдем частные производные функции $z = \ln \cos(xy^3)$ по переменным x и y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(-\sin xy^3) \cdot (xy^3)'_x}{\cos(xy^3)} = \frac{(-\sin xy^3) \cdot y^3}{\cos(xy^3)} = -y^3 \operatorname{tg}(xy^3);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(-\sin xy^3) \cdot (xy^3)'_y}{\cos(xy^3)} = \frac{(-\sin xy^3) \cdot 3y^2x}{\cos(xy^3)} = \\ &= -3xy^2 \operatorname{tg}(xy^3). \end{aligned}$$

Тогда производную функции z вычислим по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = -y^3 \operatorname{tg}(xy^3) \cdot \varphi'(t) - 3xy^2 \operatorname{tg}(xy^3) \cdot \psi'(t).$$

Пример 5.6. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную

производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}}$, где $y = \varphi(x)$.

Решение:

Найдем частные производные функции $z = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}}$ по переменным x и y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x} \right)'_x = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}} \left(-\frac{\sqrt{y}}{x^2} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x} \right)'_y = e^{\frac{\sqrt{y}}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тогда полную производную функции z вычислим по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{y} \cdot e^{\frac{\sqrt{y}}{x}}}{x^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{y}}{x}}}{2x\sqrt{y}} \cdot \varphi'(x).$$

Пример 5.7. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = f(x, y)$, где

$$x = \arcsin(uv), \quad y = \ln \frac{u}{v}.$$

Решение

Найдем частные производные функций $x = \arcsin(uv)$ и

$y = \ln \frac{u}{v}$ по переменным u и v :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(uv)'_u}{\sqrt{1-(uv)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-(uv)^2}};$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(uv)'_v}{\sqrt{1-(uv)^2}} = \frac{u}{\sqrt{1-(uv)^2}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\ln \frac{u}{v} \right)'_u = (\ln u - \ln v)'_u = \frac{1}{u};$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\ln \frac{u}{v} \right)'_v = (\ln u - \ln v)'_v = -\frac{1}{v}.$$

$\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ найдем по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y) \cdot \frac{v}{\sqrt{1-(uv)^2}} + f'_y(x, y) \cdot \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y) \cdot \frac{u}{\sqrt{1-(uv)^2}} - f'_y(x, y) \cdot \frac{1}{v}.$$

Пример 5.8. Вычислить производные функций, заданных неявно :

- 1) $\frac{dy}{dx}$, если $\sin(xy) - e^{xy} - xy^3 = 0$;
- 2) $\frac{dy}{dx}$, если $6^x = -2x - 5y^x$;
- 3) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$;
- 4) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $(4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} = -5$.

Решение

$$1) \sin(xy) - e^{xy} - xy^3 = 0.$$

Запишем функцию $F(x, y) = \sin(xy) - e^{xy} - xy^3$.

Найдем частные производные функции $F(x, y)$ по переменным x и y :

$$F'_x = (\sin(xy) - e^{xy} - xy^3)'_x = y \cos(xy) - ye^{xy} - y^3.$$

$$F'_y = (\sin(xy) - e^{xy} - xy^3)'_y = x \cos(xy) - xe^{xy} - 3xy^2.$$

Вычислим $\frac{dy}{dx}$ по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cos(xy) - ye^{xy} - y^3}{x \cos(xy) - xe^{xy} - 3xy^2}.$$

$$2) 6^x = -2x - 5y^x.$$

Запишем функцию $F(x, y)$:

$$F(x, y) = 6^x + 2x + 5y^x.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y)$ по переменным x и y :

$$F'_x = (6^x + 2x + 5y^x)'_x = 6^x \ln 6 + 2 + 5y^x \ln y,$$

$$F'_y = (6^x + 2x + 5y^x)'_y = 5xy^{x-1}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6^x \ln 6 + 2 + 5y^x \ln y}{5xy^{x-1}}.$$

$$3) \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1.$$

Запишем функцию $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z :

$$F'_x = (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1)'_x = 2 \cos x (-\sin x) =, \\ = -\sin 2x$$

$$F'_y = (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1)'_y = 2 \cos y (-\sin y) = \\ = -\sin 2y;$$

$$F'_z = (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1)'_z = 2 \cos z (-\sin z) = \\ = -\sin 2z.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\sin 2x}{-\sin 2z} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-\sin 2y}{-\sin 2z} = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}.$$

$$4) (4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} = -5$$

Запишем функцию $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = (4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} + 5.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z :

$$F'_x = ((4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} + 5)'_x = 8y^{-4}z^{-3};$$

$$F'_y = ((4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} + 5)'_x = 6(4z)^{6y} \ln(4z) - 32xy^{-5}z^{-3};$$

$$\begin{aligned} F'_z &= ((4z)^{6y} + 8xy^{-4}z^{-3} + 5)'_z = 6y(4z)^{6y-1} \cdot 4 - 24xy^{-4}z^{-4} = \\ &= 24y(4z)^{6y-1} - 24xy^{-4}z^{-4}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{8y^{-4}z^{-3}}{24y(4z)^{6y-1} - 24z^{-4}xy^{-4}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6(4z)^{6y} \ln(4z) - 32z^{-3}xy^{-5}}{24y(4z)^{6y-1} - 24z^{-4}xy^{-4}}.$$

5.6. Производная функции в данном направлении и градиент функции

Производная по направлению

Производной функции $z = f(x, y)$ в данном направлении

$\bar{\ell} = \overline{M_0 M}$ называется $\frac{\partial z}{\partial \bar{\ell}} = \lim_{|\bar{\ell}| \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|\bar{\ell}|}$, где $f(M)$ и $f(M_0)$ - значения функции в точках M и M_0 .

Если $z = f(x, y)$ - дифференцируемая функция двух переменных, то производная функции z по направлению вектора $\bar{\ell} = \overline{M_0 M}$ находится по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

где α - угол, образованный вектором $\bar{\ell}$ с осью OX .

Заметим, что если направление $\bar{\ell}$ совпадает с положительным направлением оси OX или оси OY , то производная по направлению соответственно будет равна частной производной от функции $z = f(x, y)$ по переменной x или y .

Если $u = f(x, y, z)$ - дифференцируемая функция трех переменных, то производная функции $u = f(x, y, z)$ по направлению $\bar{\ell} = \overline{M_0 M}$ определяется аналогично и вычислить ее можно по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

где α, β, γ - углы между вектором $\bar{\ell}$ и положительным направлением осей OX, OY, OZ , соответственно.

Производная функции в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Из формул для нахождения производной функции по направлению, очевидно, что производная по направлению $-\bar{\ell}$ противоположному направлению $\bar{\ell}$ равна производной по направлению $\bar{\ell}$, взятой с обратным знаком. Это означает, что при перемене направления на противоположное абсолютная величина скорости изменения функции не меняется, а меняется только характер ее изменения если, например, в направлении $\bar{\ell}$ функция возрастает, то в противоположном направлении она убывает, и наоборот.

Градиент функции

1. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ называется вектор, координатами которого служат значения частных производных этой функции, то есть

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

где $\text{grad } z$ – градиент функции $z = f(x, y)$.

Градиент функции $z = f(x, y)$ в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, то есть при $\bar{\ell} = \text{grad } z$ производная по направлению принимает наибольшее значение, равное длине вектора $\text{grad } z$.

2. *Градиентом* функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор, координатами которого служат значения частных производных этой функции, то есть

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Пользуясь определением градиента, формулу для вычисления производной по направлению вектора $\bar{\ell}$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = (\text{grad} z, \bar{\ell}_0), \text{ где вектор } \bar{\ell}_0 (\cos \alpha; \cos \beta, \cos \gamma) - \text{орт}$$

вектора $\bar{\ell}$, координатами которого являются направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$.

Следовательно, производная по направлению вектора $\bar{\ell}$ равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления.

Свойства градиента функции:

1) направление градиента функции в каждой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку;

2) производная по направлению вектора $\bar{\ell}$ достигает наибольшего значения, если направление $\bar{\ell}$ совпадает с направлением градиента функции и этот максимум равен длине вектора $\text{grad } u$.

$$3) \text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad} u_1 + \text{grad} u_2;$$

$$\text{grad}(cu_1) = c \text{grad} u_1;$$

$$\text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \text{grad} u_1 + u_1 \text{grad} u_2;$$

$$\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u.$$

Пример 5.9. Найти производную функции

$z = y^2 - 2x^2 - 5xy$ в точке $M(-3, -4)$ в направлении вектора $\overline{MO}$ (рис. 5.1).

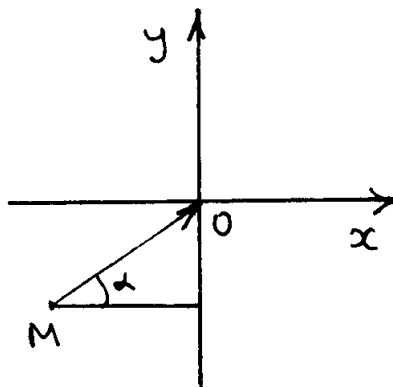


Рис. 5.1

Решение

Найдем частные производные функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y в точке M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x - 5y,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -4(-3) - 5(-4) = 12 + 20 = 32,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x + 2y,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -5(-3) + 2(-4) = 15 - 8 = 7,$$

Координаты вектора $\vec{\ell} = \overrightarrow{MO} (3, 4)$, тогда длина вектора $|\vec{\ell}| = |\overrightarrow{MO}| = \sqrt{9+16} = 5$. Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{4}{5}.$$

Вычислим производную по направлению вектора $\bar{\ell} = \overline{MO}$ по формуле:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \bar{\ell}} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cos \beta, \quad \text{где } \cos \alpha \text{ и } \cos \beta -$$

направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$.

Тогда

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \bar{\ell}} \right|_M = 32 \cdot \frac{3}{5} + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{96 + 28}{5} = \frac{124}{5}.$$

Пример 5.10. Найти производную функции $u = \frac{x\sqrt{y}}{z}$ в точке $M(5, 1, 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $P(7, -1, 3)$.

Решение:

Найдем частные производные функции $u = \frac{x\sqrt{y}}{z}$ по переменным x, y и z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x\sqrt{y}}{z^2}.$$

Тогда частные производные в точке $M(5, 1, 2)$ равны:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \frac{1}{2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = \frac{5}{4}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -\frac{5}{4}.$$

Координаты вектора $\vec{\ell} = \overline{MP} = (2, -2, 1)$, тогда длина вектора $|\vec{\ell}| = |\overline{MP}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}; \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Вычислим производную по направлению вектора $\vec{\ell} = \overline{MP}$ по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} \Big|_M = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_M \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_M \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_M \cos \gamma, \quad \text{где } \cos \alpha,$$

$\cos \beta$ и $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}} \Big|_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} - \frac{5}{12} = -\frac{11}{12}.$$

Пример 5.11. Найти угол между градиентами функций $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $g(x, y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $M(3, 4)$.

Решение:

Найдем частные производные функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(3, 4)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = \frac{3}{5}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M = \frac{4}{5}.$$

Тогда градиент функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке M :

$$\bar{u} = \text{grad } f|_M = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Найдем частные производные функции

$$g(x, y) = x - 3y + \sqrt{3xy}:$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + \frac{(3xy)'_x}{2\sqrt{3xy}} = 1 + \frac{3y}{2\sqrt{3xy}};$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -3 + \frac{(3xy)'_y}{2\sqrt{3xy}} = -3 + \frac{3x}{2\sqrt{3xy}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(3, 4)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = 1 + \frac{12}{12} = 2; \quad \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_M = -3 + \frac{9}{12} = -\frac{9}{4}.$$

Тогда градиент функции $g(x, y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке M :

$$\bar{v} = \text{grad } g|_M = \left(2, -\frac{9}{4} \right).$$

Найдем угол φ между градиентами функций f и g по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}.$$

Скалярное произведение векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ равно:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{5}.$$

Длина вектора $\bar{u}$ равна:

$$|\bar{u}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

Длина вектора $\bar{v}$ равна:

$$|\bar{v}| = \sqrt{4 + \frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{145}}{4}.$$

Тогда косинус угла φ между градиентами функций f и g :

$$\cos \varphi = \frac{-3/5}{\sqrt{145}/4} = -\frac{12}{5\sqrt{145}}.$$

Пример 5.12. Найти направление, в котором производная функции $u = x \sin z - y \cos z$ в точке $M(0,0,0)$ будет максимальной, и найти это максимальное значение.

Решение:

Производная функции u по направлению максимальна в направлении градиента этой функции и этот максимум равен длине вектора $\text{grad } u$.

Найдем частные производные функции $u = x \sin z - y \cos z$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x \cos z + y \sin z.$$

Тогда частные производные в точке $M(0,0,0)$ равны:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 0.$$

Запишем градиент функции u в точке M :

$$\operatorname{grad} u|_M = (0, -1, 0).$$

Длина вектора $\operatorname{grad} u|_M$ равна

$$|\operatorname{grad} u|_M| = 1.$$

Следовательно, производная функции $u = x \sin z - y \cos z$ в точке $M(0, 0, 0)$ будет максимальной по направлению вектора $(0, -1, 0)$ и равна 1.

5.7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке M_0 к различным кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Если $z = f(x, y)$ – уравнение гладкой поверхности в явном виде, то:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) -$$

уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} -$$

уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Если $F(x, y, z) = 0$ – уравнение гладкой поверхности, заданное в неявном виде, то

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 -$$

уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \text{ — уравнение}$$

нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример 5.13. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности

$$z = -2x^3y^6 - 5y^3x + 3x^2 - 4y^6 \text{ в точке } O(1, 1, z_0).$$

Решение

Найдем координату z_0 точки O :

$$z_0 = z(1, 1) = -2 - 5 + 3 - 4 = -8.$$

Тогда координаты точки $O(1, 1, -8)$.

Найдем частные производные функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y и их значения в точке $O(1, 1, -8)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6x^2y^6 - 5y^3 + 6x;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_O = -6 - 5 + 6 = -5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -12x^3y^5 - 15y^2x - 24y^5;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_O = -12 - 15 - 24 = -51.$$

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности $z = z(x, y)$ в точке O по формуле:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Тогда

$$z + 8 = -5(x - 1) - 51(y - 1),$$

$$z + 8 = -5x + 5 - 51y + 51,$$

$$5x + 51y + z - 48 = 0 \text{ — уравнение касательной плоскости.}$$

Напишем уравнение нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $O(1, 1, -8)$ по формуле:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Тогда

$$\frac{x - 1}{-5} = \frac{y - 1}{-51} = \frac{z + 8}{-1},$$

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y - 1}{51} = \frac{z + 8}{1} \text{ — уравнение нормали.}$$

Итак,

$5x + 51y + z - 48 = 0$ — уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y - 1}{51} = \frac{z + 8}{1} \text{ — уравнение нормали к поверхности}$$

$z = -2x^3y^6 - 5y^3x + 3x^2 - 4y^6$ в точке $O(1, 1, -8)$.

Пример 5.14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6 \text{ в точке } M(1, 2, -1).$$

Решение

Введем функцию $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$.

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x , y и z , а так же их значения в точке $M(1, 2, -1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + yz; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = 3 - 2 = 1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + xz; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = 12 - 1 = 11;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + xy; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = 3 + 2 = 5.$$

Напишем уравнение касательной плоскости к нашей поверхности в точке M по формуле:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Тогда

$$1 \cdot (x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0,$$

$x + 11y + 5z - 18 = 0$ – уравнение касательной плоскости.

Напишем уравнение нормали к поверхности в точке M по формуле:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Тогда

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5} \text{ – уравнение нормали.}$$

Итак,

$x + 11y + 5z - 18 = 0$ – уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5} \text{ – уравнение нормали к поверхности}$$

поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точке $M(1, 2, -1)$.

Задача 5.15. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 1$ параллельно плоскости $8x + 4y + 3z = -1$.

Решение

$$F'_x|_M(x - x_0) + F'_y|_M(y - y_0) + F'_z|_M(z - z_0) = 0 \quad - \quad \text{уравнение}$$

касательной плоскости к поверхности, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$, в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

Две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны, если их коэффициенты пропорциональны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k.$$

Следовательно, касательная плоскость параллельна плоскости $8x + 4y + 3z = -1$, если $\frac{F'_x|_M}{8} = \frac{F'_y|_M}{4} = \frac{F'_z|_M}{3} = k$.

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z и их значения в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x = 8x, \quad F'_x|_M = 8x_0,$$

$$F'_y = 50y, \quad F'_y|_M = 50y_0.$$

$$F'_z = 2z, \quad F'_z|_M = 2z_0.$$

$$\text{Тогда } \frac{8x_0}{8} = \frac{50y_0}{4} = \frac{2z_0}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} x_0 = k, \\ y_0 = \frac{2}{25}k, \\ z_0 = \frac{3}{2}k. \end{cases}$$

Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 1$, значит, ее координаты должны удовлетворять этому уравнению, т.е.

$$4x_0^2 + 25y_0^2 + z_0^2 = 1 \Rightarrow$$

$$4k^2 + 25\left(\frac{2}{25}k\right)^2 + \frac{9}{4}k^2 = 1,$$

$$4k^2 + \frac{4}{25}k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 1, \text{ умножим на } 100,$$

$$400k^2 + 16k^2 + 225k^2 = 100,$$

$$641k^2 = 100,$$

$$k^2 = \frac{100}{641},$$

$$k = \pm \frac{10}{\sqrt{641}}.$$

Следовательно, координаты точки $M\left(k, \frac{2}{25}k, \frac{3}{2}k\right)$, где

$$k = \pm \frac{10}{\sqrt{641}}.$$

Получим две точки:

точку $M_1\left(\frac{10}{\sqrt{641}}, \frac{4}{5\sqrt{641}}, \frac{15}{\sqrt{641}}\right)$, для $k = \frac{10}{\sqrt{641}}$, и точку

$M_2\left(-\frac{10}{\sqrt{641}}, -\frac{4}{5\sqrt{641}}, -\frac{15}{\sqrt{641}}\right)$, для $k = -\frac{10}{\sqrt{641}}$.

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности в

точке $M_1\left(\frac{10}{\sqrt{641}}, \frac{4}{5\sqrt{641}}, \frac{15}{\sqrt{641}}\right)$:

$$8\left(x - \frac{10}{\sqrt{641}}\right) + 4\left(y - \frac{4}{5\sqrt{641}}\right) + 3\left(z - \frac{15}{\sqrt{641}}\right) = 0,$$

$$8x + 4y + 3z - \frac{80}{\sqrt{641}} - \frac{16}{5\sqrt{641}} - \frac{45}{\sqrt{641}} = 0,$$

$$8x + 4y + 3z = \frac{400 + 16 + 225}{5\sqrt{641}},$$

$$8x + 4y + 3z = \frac{641}{5\sqrt{641}}.$$

Получили уравнение $8x + 4y + 3z = \frac{\sqrt{641}}{5}$ – уравнение

касательной плоскости к поверхности в точке M_1 .

Напишем уравнение касательной плоскости в точке

$$M_2\left(-\frac{10}{\sqrt{641}}, -\frac{4}{5\sqrt{641}}, -\frac{15}{\sqrt{641}}\right):$$

$$8\left(x + \frac{10}{\sqrt{641}}\right) + 4\left(y + \frac{4}{5\sqrt{641}}\right) + 3\left(z + \frac{15}{\sqrt{641}}\right) = 0,$$

Получили уравнение $8x + 4y + 3z = -\frac{\sqrt{641}}{5}$ – уравнение

касательной плоскости к поверхности в точке M_2 .

Итак, получили два уравнения касательных плоскостей к поверхности $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 1$ параллельно плоскости $8x + 4y + 3z$:

$$8x + 4y + 3z = \frac{\sqrt{641}}{5} \text{ и } 8x + 4y + 3z = -\frac{\sqrt{641}}{5}$$

5.8. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой области D . Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется точкой *локального максимума* функции, если существует такая проколота

δ – окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$ этой точки такая, что для любой точки $M \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$, верно неравенство: $f(M) < f(M_0)$.

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется точкой *локального минимума* функции, если существует такая проколотая

δ – окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$ этой точки такая, что для любой точки $M \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$, верно неравенство: $f(M) > f(M_0)$.

Локальные максимумы и минимумы функции называются ее *локальными экстремумами*.

Необходимое условие экстремума

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ является *критической* точкой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если частные производные в этой точке равны нулю, или не существуют.

Критическая точка функции обязательно есть внутренняя точка области ее определения. Точки, в которых частные производные равны нулю, то есть $\left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{M_0} = 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$,

называются *стационарными* точками.

Достаточное условие экстремума

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, которая является стационарной точкой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то есть

$\left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{M_0} = 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, если второй дифференциал

$d^2 f(M_0)$ есть положительно определенная квадратичная форма, то точка M_0 – есть точка минимума функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если второй дифференциал $d^2 f(M_0)$ – отрицательно определенная

квадратичная форма, то M_0 - есть точка максимума функции, если второй дифференциал $d^2 f(M_0)$ - знакопеременная квадратичная форма, то функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не имеет экстремума в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Второй дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычисляется по формуле:

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{M_0} dx_i dx_j \text{ и является квадратичной}$$

формой.

Напомним, что квадратичная форма $Q(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$

называется

положительно определенной, если для любого ненулевого элемента $\bar{x} \in V$ выполняется неравенство $Q(\bar{x}) > 0$.

отрицательно определенной, если для любого ненулевого элемента $\bar{x} \in V$ выполняется неравенство $Q(\bar{x}) < 0$.

знакопеременной, если существуют такие элементы $\bar{x}, \bar{y} \in V$, что $Q(\bar{x}) < 0$, $Q(\bar{y}) > 0$.

Для того, чтобы установить будет ли квадратичная форма положительно определенной можно привести квадратичную форму к каноническому виду или воспользоваться критерием Сильвестра.

Критерий Сильвестра

Для того, чтобы квадратичная форма

$Q(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ была положительно определенной необходимо и

достаточно, чтобы все миноры ее матрицы, расположенные в левом верхнем углу были положительными, то есть:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Заметим, что для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_k (-1)^k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то есть

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Также для того выяснить является ли точка точкой локального экстремума достаточно непосредственно исследовать знак второго дифференциала как квадратичной формы, используя метод выделения полного квадрата.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ двух переменных x и y .

$$\text{Тогда } d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка функции $z = f(x, y)$, то есть $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, и пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{M_0} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{M_0} \end{vmatrix}.$$

Тогда

а) точка $M_0(x_0, y_0)$ - точка минимума функции, если $\Delta > 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0;$$

б) точка $M_0(x_0, y_0)$ - точка максимума функции, если

$$\Delta > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0;$$

в) в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция не имеет экстремума, если $\Delta < 0$.

Если же $\Delta = 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум функции может быть, а может и не быть. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Приведенные выше условия эквивалентны следующим условиям:

1) если

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_M, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_M, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_M;$$

$$\text{то } \Delta = AB - C^2,$$

тогда:

если $\Delta > 0$, то в точке M есть экстремум, а именно максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;

если $\Delta < 0$ – экстремума в точке M нет;

если $\Delta = 0$ – требуются дополнительные исследования.

Выяснить является ли точка точкой локального экстремума можно также, непосредственно исследовав знак второго дифференциала

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy, \quad \text{как}$$

квадратичной формы, выделяя полный квадрат.

Задача 5.16. Найти экстремумы функции двух переменных:

1) $z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y$;

2) $z = 2xy(1 + 4x + 8y)$;

3) $z = e^{-2x}(x - 3y^2 - 8y)$;

4) $u = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z$;

5) $u = 2x^3 yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Решение

1) $z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y$.

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых может быть экстремум. Для отыскания стационарных точек необходимо приравнять к нулю обе ее частные производные и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 18 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 18 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ \frac{9}{y^2} + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ y^4 - 10y^2 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ (y^2 - 9)(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ y = 3; y = -3; y = 1; y = -1 \end{cases}.$$

Получили четыре стационарные точки:

$$M_1(1,3); M_2(-1,-3); M_3(3,1); M_4(-3,-1).$$

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x.$$

Исследуем знак второго дифференциала в каждой из получившихся стационарных точек:

1) В точке $M_1(1,3)$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 18; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 18; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 6.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = 18 > 0, \quad \text{следовательно,} \quad \text{квадратичная}$$

форма $d^2z|_{M_1}$ - положительно определенная, а значит, стационарная

точка $M_1(1,3)$ - точка минимума функции.

2) В точке $M_2(-1,-3)$ имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_2} = -18; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_2} = -18; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_2} = -6.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = -18 < 0, \quad \text{следовательно,} \quad \text{квадратичная}$$

форма $d^2z|_{M_2}$ - отрицательно определенная, а значит, стационарная

точка $M_2(-1,-3)$ - точка максимума функции.

3) В точке $M_3(3,1)$ имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_3} = 6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_3} = 6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_3} = 18.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} < 0; \quad \text{следовательно,} \quad \text{квадратичная форма } d^2z|_{M_3}$$

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_3(3,1)$ - не является точкой экстремума.

4) В точке $M_4(-3,-1)$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_4} = -6; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_4} = -6; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_4} = -18.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{vmatrix} < 0; \text{ следовательно, квадратичная форма } d^2 z \Big|_{M_4}$$

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_4(-3, -1)$ не является точкой экстремума.

Найдем значения функции в точках экстремума:

$$z(1, 3) = 9 + 27 - 18 - 90 = -72;$$

$$z(-1, -3) = -9 - 27 + 18 + 90 = 72$$

Итак, точка $M_1(1, 3)$ - точка минимума функции, $z_{\min} = z(1, 3) = -72$, а точка $M_2(-1, -3)$ - точка максимума функции, $z_{\max} = z(-1, -3) = 72$; точки $M_3(3, 1)$ и $M_4(-3, -1)$ не являются точками экстремума.

$$2) \quad z = 2xy(1 + 4x + 8y) = 2xy + 8x^2y + 16xy^2$$

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых может быть экстремум. Для отыскания стационарных точек необходимо приравнять к нулю обе ее частные производные и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 16xy + 16y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 8x^2 + 32xy = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y + 16xy + 16y^2 = 0 \\ 2x + 8x^2 + 32xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(1 + 8x + 8y) = 0 \\ 2x(1 + 4x + 16y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\begin{cases} y = 0 \\ x(1+4x+16y) = 0 \\ 1+8x+8y = 0 \\ x(1+4x+16y) = 0 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ 1+4x+16y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+8x+8y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+8x+8y = 0 \\ 1+4x+16y = 0 \end{cases} \end{cases} \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[\begin{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+8x+8y = 0 \\ 2+8x+32y = 0 \end{cases} \end{cases} \right] \Rightarrow M_1(0,0), \quad M_2\left(-\frac{1}{4},0\right), \quad M_3\left(0,-\frac{1}{8}\right),
\end{aligned}$$

Решим четвертую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1+8x+8y = 0 \\ 1+8x+32y = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое. Тогда

$$\begin{cases} 1+8x+8y = 0 \\ 1+24y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+8x-\frac{1}{3} = 0 \\ y = -\frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow M_4\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right).$$

Следовательно, получили четыре стационарные точки:

$$M_1(0,0), \quad M_2\left(-\frac{1}{4},0\right), \quad M_3\left(0,-\frac{1}{8}\right), \quad M_4\left(-\frac{1}{12},-\frac{1}{24}\right).$$

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 16y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 32x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 + 16x + 32y.$$

Исследуем знак второго дифференциала в каждой из получившихся стационарных точек:

1) В точке $M_1(0,0)$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 2.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} < 0; \text{ следовательно, квадратичная форма } d^2 z|_{M_1} -$$

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_1(0,0)$ - не является точкой экстремума.

2) В точке $M_2\left(-\frac{1}{4},0\right)$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_2} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_2} = -8; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_2} = -2.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} < 0; \text{ следовательно, квадратичная форма } d^2 z|_{M_2} -$$

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_2\left(-\frac{1}{4},0\right)$ - не является точкой экстремума.

3) В точке $M_3\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ имеем

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_3} = -2; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_3} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_3} = -2.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} < 0; \text{ следовательно, квадратичная форма } d^2 z|_{M_3}$$

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_3\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ - не является точкой экстремума.

4) В точке $M_4\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right)$ имеем

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_4} = -\frac{2}{3}; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_4} = -\frac{8}{3}; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_4} = -\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0; \quad \Delta_1 = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{следовательно,}$$

квадратичная форма $d^2 z|_{M_4}$ отрицательно определенная, а значит,

стационарная точка $M_4\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right)$ - точка максимума функции.

Найдем значение функции в точке экстремума:

$$z|_{M_4} = z\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right) = 2\left(-\frac{1}{12}\right)\left(-\frac{1}{24}\right)\left(1 - \frac{4}{12} - \frac{8}{24}\right) = \\ = \frac{1}{24 \cdot 6} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24 \cdot 18} = \frac{1}{432}.$$

Итак, точка $M_4\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}\right)$ - точка максимума функции,

$$z_{\min} = -\frac{1}{432}; \text{ остальные стационарные точки не являются точками}$$

экстремума.

$$3) z = e^{-2x}(x - 3y^2 - 8y).$$

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых может быть экстремум. Для отыскания стационарных точек необходимо приравнять к нулю обе ее частные производные и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2e^{-2x}(x - 3y^2 - 8y) + e^{-2x} = e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2x}(-6y - 8) = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) = 0 \\ e^{-2x}(-6y - 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y^2 + 16y + 1 = 0 \\ 6y = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x + 6 \cdot \frac{16}{9} - \frac{16 \cdot 4}{3} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x + \frac{32}{3} - \frac{64}{3} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ -2x = \frac{32}{3} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{29}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) - \text{стационарная}$$

точка.

Найдем вторые частные производные в точке M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2e^{-2x}(-2x + 6y^2 + 16y + 1) + e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(4x - 12y^2 - 32y - 4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2x}(-6) = -6e^{-2x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-2x}(12y + 16),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_M &= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{4 \cdot 29}{6} - 12 \left(-\frac{4}{3} \right)^2 - 32 \left(-\frac{4}{3} \right) - 4 \right) = \\ &= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{58}{3} - \frac{64}{3} + \frac{128}{3} - 4 \right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{128 - 64 - 58 - 12}{3} \right) = e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{6}{3} \right) = -2e^{\frac{29}{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_M = -6e^{\frac{29}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_M = e^{\frac{29}{3}} \left(12 \left(-\frac{4}{3} \right) + 16 \right) = e^{\frac{29}{3}} \cdot 0 = 0$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке $M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right)$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2e^{\frac{29}{3}} & 0 \\ 0 & -6e^{\frac{29}{3}} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = -2e^{\frac{29}{3}} < 0, \quad \text{следовательно,}$$

квадратичная форма $d^2z \Big|_M$ - отрицательно определенная, а значит,

стационарная точка $M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right)$ - точка максимума функции.

Найдем значение функции в точке максимума:

$$z|_M = z\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{29}{6} - 3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right)\right) =$$

$$= e^{\frac{29}{3}} \left(-\frac{29}{6} - \frac{16}{3} + \frac{32}{3}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{16}{3} - \frac{29}{6}\right) = e^{\frac{29}{3}} \left(\frac{32-29}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{29}{3}}.$$

Итак, точка $M\left(-\frac{29}{6}, -\frac{4}{3}\right)$ – точка максимума функции,

$$Z_{\max} = \frac{1}{2} e^{\frac{29}{3}}.$$

4) $u = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z$;

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых может быть экстремум. Для отыскания стационарных точек необходимо приравнять к нулю ее частные производные и решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x + 8y + 6z = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 12z + 6y - 6 = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 8y + 6z = 0 \\ 12z + 6y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 4y - 3z = 0 \\ 2z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ -3y - 3z = 0 \\ 2z + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \\ -2y + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$M(-1, -1, 1)$ - стационарная точка.

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 12;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6.$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке $M(-1, -1, 1)$:

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 2(96 - 36) + 2(-24) = 72 > 0;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$$

$A_1 = 2 > 0$, следовательно, квадратичная форма $d^2 z|_M$ - положительно определенная, а значит, стационарная точка $M(-1, -1, 1)$ - точка минимума функции.

Найдем значения функции в точке минимума:

$$z(-1, -1, 1) = 1 - 2 + 4 + 6 - 6 - 6 = -3;$$

Итак, точка $M(-1, -1, 1)$ - точка минимума функции,

$$z_{\min} = z(M) = -3.$$

$$5) u = 2x^3 yz - x^2 - y^2 - z^2.$$

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых может быть экстремум. Для отыскания стационарных точек необходимо приравнять к нулю ее частные производные и решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 yz - 2x = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3z - 2y = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y - 2z = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2yz - 2x = 0 \\ 2x^3z - 2y = 0 \\ 2x^3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{или} & 3xyz = 1 \\ x^3z = y \\ x^3y = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 3xyz = 1 \\ x^3z = y \\ x^3 \cdot x^3z = z \end{cases} \Rightarrow M_1(0,0,0) \text{ или } \begin{cases} 3xyz = 1 \\ y = x^3z \quad (*); \\ z = zx^6 \end{cases} \right.$$

Рассмотрим систему (*). В данной системе $z \neq 0$, так как в этом случае первое уравнение системы не имеет смысла.

Следовательно,

$$\begin{cases} 3xyz = 1 \\ y = x^3z \\ x^6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ 3yz = 1 \\ x = -1 \\ y = -z \\ -3yz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ 3z^2 = 1 \\ x = -1 \\ y = -z \\ 3z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -1 \\ y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$$

Получили пять стационарных точек:

$$M_1(0,0,0); M_2(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}); M_3(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}});$$

$$M_4(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}); M_5(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12xyz - 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2 z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 6x^2 y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2x^3.$$

Исследуем знак второго дифференциала в каждой из получившихся стационарных точек:

1) В точке $M_1(0,0,0)$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = -2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = -2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{M_1} = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_{M_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_{M_1} = 0.$$

Запишем дифференциал второго порядка в точке M_1 :

$$d^2 u \Big|_M = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 = -2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Получили, что дифференциал второго порядка в точке M_1 является отрицательно определенной квадратичной формой, а значит, стационарная точка $M_1(0,0,0)$ - точка максимума функции.

2) В точке $M_2(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_2} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_2} = -2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{M_2} = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_2} = 2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_{M_2} = 2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_{M_2} = 2.$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке $M_2(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(4-4) - 2\sqrt{3}(-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 96 > 0;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 < 0;$$

$A_1 = 2 > 0$, следовательно, квадратичная форма $d^2z|_{M_2}$ -

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_2(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ не

является точкой экстремума.

3) В точке $M_3(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_3} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_3} = -2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{M_3} = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_3} = -2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_{M_3} = -2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_{M_3} = 2.$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке M_3 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ -2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(4-4) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}(-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = 96 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 < 0;$$

$\Delta_1 = 2 > 0$, следовательно, квадратичная форма $d^2z|_{M_3}$ -

знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_3(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

не является точкой экстремума.

4) В точке $M_4(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_4} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_4} = -2; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{M_4} = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_4} = -2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right|_{M_4} = 2\sqrt{3}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|_{M_4} = -2.$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке M_4 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 & -2 \\ 2\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(4-4) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 96 > 0;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 < 0;$$

$A_1 = 2 > 0$, следовательно, квадратичная форма $d^2z|_{M_4}$ - знакопеременная, а значит, стационарная точка $M_4(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ не является точкой экстремума.

5) В точке $M_5(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{M_5} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_5} = -2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{M_5} = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_5} = 2\sqrt{3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Big|_{M_5} = -2\sqrt{3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Big|_{M_5} = -2.$$

Исследуем знак второго дифференциала в точке M_5 :

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & -2 \\ -2\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(4 - 4) - 2\sqrt{3}(-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}(-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = 96 > 0;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 < 0;$$

$\Delta_1 = 2 > 0$, следовательно, квадратичная форма $d^2 z|_{M_5}$ -

знакопеременная, а значит, стационарная точка

$M_5(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ не является точкой экстремума.

Найдем значение функции в точке максимума:

$$z(0,0,0) = 0;$$

Итак, точка $M_1(0,0,0)$ - точка максимума функции, $z_{\max} = 0$,

точки $M_2(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; $M_3(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; $M_4(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$;

$M_5(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ не являются точками экстремума.

5.9. Условный экстремум функции двух переменных

Пусть переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ связаны системой уравнений

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (1)$$

.....

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad m < n,$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ определены на некотором

множестве $D \in \mathbb{R}^n$, а множество E - множество точек множества D , удовлетворяющих данной системе уравнений. Уравнения (1) называются *уравнениями связей*.

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$ называется *точкой условного минимума* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии связей (1), если

найдется такая окрестность $U_\delta(M_0) \in D$ точки M_0 , что для всех точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям (1), выполняется неравенство $f(M_0) < f(M)$

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$ называется точкой *условного максимума* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии связей (1),

если найдется такая окрестность $U_\delta(M_0) \in D$ точки M_0 , что для всех точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям (1), выполняется неравенство $f(M_0) > f(M)$.

Другими словами, сравниваются между собой значения функции, которые она принимает на множестве тех точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

Для нахождения точек условного экстремума можно использовать следующие методы:

1. Если из системы уравнений (1) можно выразить какие-нибудь m переменных через остальные переменные, тогда, подставив эти переменные вместо соответствующих переменных x_i в функцию $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, мы получим функцию $n - m$ переменных. В результате исследование условного экстремума функции n переменных сведется к уже разобранному исследованию обычного локального экстремума функции $n - m$ переменных.

2. Метод множителей Лагранжа

Пусть требуется найти условный экстремум функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, m, m < n$).

Рассмотрим функцию $n + m$ переменных

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*, а функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ - *функция Лагранжа*.

Точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ является стационарной точкой функции Лагранжа, если

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \varphi_m = 0.$$

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ может быть точкой условного экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях связи (1), только если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, что точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ является критической точкой функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Дальнейшее исследование поведения функции в стационарных точках проводится исследованием второго дифференциала функции Лагранжа с учетом условий связи.

Пусть требуется найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при выполнении дополнительного условия $\varphi(x, y) = 0$.

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достаточное условие

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} \\ \varphi'_y(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \Big|_{M_0} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то в точке M условный максимум, если $\Delta > 0$ – условный минимум.

Задача 5.17. Найти условный экстремум функции $z = -2xy - 5$ при условии $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = -2xy - 5 + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \right).$$

Найдем стационарные точки. Для этого найдем частные производные и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2y + \frac{2}{9}\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + \frac{2}{16}\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} -2y + \frac{2}{9}\lambda x = 0 \\ -2x + \frac{1}{8}\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y - \lambda x = 0 \\ 16x - \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9y}{\lambda} \\ \frac{16 \cdot 9y}{\lambda} - \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9y}{\lambda} \\ y \left(\frac{144}{\lambda} - \lambda \right) = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы следует, что $y = 0$ или $\frac{144}{\lambda} - \lambda = 0$. Если $y = 0$, то из первого уравнения системы следует, что $x = 0$. Но тогда третье уравнение данной системы не имеет смысла. Следовательно,

$$\frac{144}{\lambda} - \lambda = 0 \Rightarrow 144 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 144 \Rightarrow \lambda = \pm 12.$$

Тогда

$$\left[\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \frac{3y}{4} \\ \frac{9y^2}{9 \cdot 16} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \frac{3y}{4} \\ y^2 = 8 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \right] \\ \left[\begin{cases} \lambda = -12 \\ x = -\frac{3y}{4} \\ \frac{9y^2}{9 \cdot 16} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} \lambda = -12 \\ x = -\frac{3y}{4} \\ y^2 = 8 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} \lambda = -12 \\ x = \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \right].$$

Получим следующие стационарные точки:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ и } M_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \quad \text{при } \lambda = 12;$$

$$M_3\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ и } M_4\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \quad \text{при } \lambda = -12.$$

Определим знак второго дифференциала функции Лагранжа в каждой из получившихся точек. Для этого составим определитель матрицы квадратичной формы:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} \\ \varphi'_y(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \Big|_{M_0} \end{vmatrix}.$$

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \Rightarrow \varphi'_x = \frac{2x}{9}, \quad \varphi'_y = \frac{2y}{16} = \frac{y}{8},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{9}\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{1}{8}\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -2,$$

Для каждой стационарной точки вычислим такой определитель

$$\text{а) } M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \quad \text{при } \lambda = 12,$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{8}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = - \left(-4 \cdot \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3} - \frac{2}{6} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) - \text{точка условного минимума};$$

$$\text{б) } M_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = 12,$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{8}{3} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$M_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) - \text{точка условного минимума};$$

$$\text{в) } M_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = -12.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{8}{3} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) - \text{точка условного максимума}.$$

$$\text{г) } M_4\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = -12$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{8}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_4 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) - \text{точка условного максимума.}$$

Итак $M_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right), M_2 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right) - \text{точки условного минимума; } z|_{M_1} = z|_{M_2} = -17,$

$$M_3 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right), M_4 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right) - \text{точки условного максимума; } z|_{M_3} = z|_{M_4} = 7.$$

5.10. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области

Функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в замкнутой ограниченной области D в стационарных точках, лежащих внутри этой области или на ее границе.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции в области D необходимо:

- 1) найти стационарные точки функции;
- 2) найти значение функции в стационарных точках, лежащих внутри области D ;
- 3) исследовать функцию на границе области D ;

- 4) сравнивая все значения, выбрать среди них наибольшее (наименьшее).

Пример 5.18. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = -2x^2 - 5y^2 + 1$ в области $D: |x| + |y| \leq 6$.

Решение

Функция в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения в стационарных точках, лежащих внутри области, или на границе области.

1. Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри области D .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -10y = 0,$$

$$M_1(0,0) \in D$$

Точка M_1 принадлежит нашей области D , найдем значение функции в этой точке $z(0,0) = 1$.

2. Исследуем функцию на границе области D .

Изобразим область D на координатной плоскости (рис. 5.3):

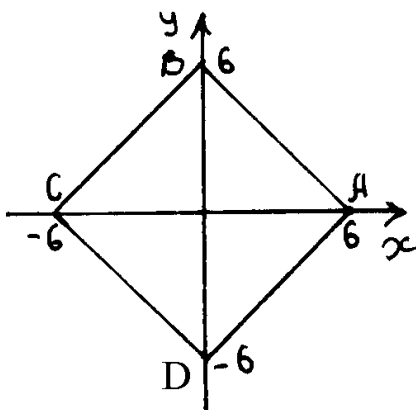


Рис. 5.3

Запишем уравнения прямых AB , BC , CD и AD .

$$AB: x + y = 6, \quad 0 \leq x \leq 6,$$

$$BC: -x + y = 6, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$CD: -x - y = 6, \quad -6 \leq x \leq 0,$$

$$AD: x - y = 6, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

На каждом из этих отрезков задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной на отрезке.

а) Рассмотрим отрезок AB . На данном отрезке $y = 6 - x$, где $0 \leq x \leq 6$. Тогда

$$z = -2x^2 - 5(6 - x)^2 + 1 = -2x^2 - 180 + 60x - 5x^2 + 1 =$$

$$= -7x^2 + 60x - 179$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$z = -7x^2 + 60x - 179$ на отрезке $0 \leq x \leq 6$.

Найдем стационарные точки:

$$z' = -14x + 60 = 0$$

$$x = \frac{60}{14} = \frac{30}{7} \in [0, 6],$$

$$y = 6 - \frac{30}{7} = \frac{12}{7},$$

Тогда $M_2\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка.

Итак, точки $M_2\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right)$, $A(6, 0)$ и $B(0, 6)$ – точки, в которых

функция может принимать наибольшее (наименьшее) значение. Найдем значения функции в этих точках:

$$\begin{aligned} z\left(\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) &= -2\left(\frac{30}{7}\right)^2 - 5\left(\frac{12}{7}\right)^2 + 1 = -2 \cdot \frac{900}{49} - 5 \cdot \frac{144}{49} + 1 = \\ &= \frac{-1800 - 720 + 49}{49} = -\frac{2471}{49} = -\frac{353}{7} \approx -50,4, \end{aligned}$$

$$z(6, 0) = -2 \cdot 36 + 1 = -71,$$

$$z(0, 6) = -5 \cdot 36 + 1 = -179.$$

б) Рассмотрим отрезок BC . На данном отрезке $y = 6 + x$, где $-6 \leq x \leq 0$. Тогда

$$z = -2x^2 - 5(6 + x)^2 + 1 = -7x^2 - 60x - 179$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = -7x^2 - 60x - 179$ на отрезке $-6 \leq x \leq 0$.

Найдем стационарные точки:

$$z' = -14x - 60 = 0$$

$$x = -\frac{30}{7} \in [-6, 0],$$

$$y = 6 - \frac{30}{7} = \frac{12}{7},$$

Тогда $M_3\left(-\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка.

Итак, точки $M_3\left(-\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right)$, $C(-6, 0)$ и $B(0, 6)$ – точки, в которых функция может принимать наибольшее (наименьшее) значение. Найдем значения функции в этих точках:

$$z\left(-\frac{30}{7}, \frac{12}{7}\right) = -\frac{353}{7} \approx -50,4,$$

$$z(-6, 0) = -71,$$

$$z(0, 6) = -179.$$

в) Рассмотрим отрезок CD . На данном отрезке $y = -6 - x$, где $-6 \leq x \leq 0$. Тогда

$$z = -2x^2 - 5(-6 - x)^2 + 1 = -7x^2 - 60x - 179.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = -7x^2 - 60x - 179$ на отрезке $-6 \leq x \leq 0$.

Найдем стационарные точки:

$$z' = -14x - 60 = 0$$

$$x = -\frac{30}{7} \in [-6, 0],$$

$$y = -6 - \frac{30}{7} = -\frac{12}{7},$$

Тогда $M_4\left(-\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка.

Итак, точки $M_4\left(-\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$, $C(-6, 0)$ и $D(0, -6)$ – точки, в которых функция может принимать наибольшее (наименьшее) значение. Найдем значения функции в этих точках:

$$z\left(-\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right) = -\frac{353}{7} \approx -50,4,$$

$$z(-6, 0) = -71,$$

$$z(0, -6) = -179.$$

г) Рассмотрим отрезок AD . На данном отрезке $y = x - 6$, где $0 \leq x \leq 6$. Тогда

$$z = -2x^2 - 5(x - 6)^2 + 1 = -7x^2 + 60x - 179$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = -7x^2 + 60x - 179$ на отрезке $0 \leq x \leq 6$

Найдем стационарные точки:

$$z' = -14x + 60 = 0$$

$$x = \frac{30}{7} \in [0, 6],$$

$$y = \frac{30}{7} - 6 = -\frac{12}{7},$$

Тогда $M_5\left(\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$ – стационарная точка.

Итак, точки $M_5\left(\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right)$, $A(6, 0)$ и $D(0, -6)$ – точки, в которых функция может принимать наибольшее (наименьшее) значение. Найдем значения функции в этих точках:

$$z\left(\frac{30}{7}, -\frac{12}{7}\right) = -\frac{353}{7} \approx -50,4,$$

$$z(6, 0) = -71,$$

$$z(0, -6) = -179.$$

Среди всех найденных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$\max_D z(x, y) = 1,$$

$$\min_D z(x, y) = -179.$$

Пример 5.19. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x - 8y - 4$ в области $D: x^2 + y^2 \leq 36, y \geq x - 6$.

Решение

Функция в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения в стационарных точках внутри области или на границе области.

1) Найдем стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{стационарных точек нет.}$$

2) Исследуем функцию на границах области D .

Изобразим область D на координатной плоскости (рис. 5.4).

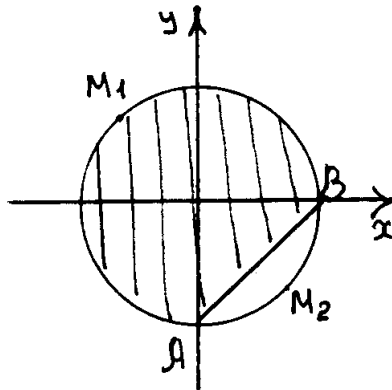


Рис. 5.4

Разобьем границу области D на две части: часть окружности и отрезок AB и будем искать точки, в которых функция может принимать наибольшее и наименьшее значение на границах G_1 и G_2 .

а) Рассмотрим часть окружности $x^2 + y^2 = 36$, где точки $(x, y) \in I, II$ или III четверти.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения на

границе G_1 составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - 8y - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 36).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -8 + 2\lambda y.$$

Координаты стационарных точек должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -8 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{16}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \frac{65}{4\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{65}{36 \cdot 4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \pm \frac{\sqrt{65}}{12} \\ x = \mp \frac{6}{\sqrt{65}} \\ y = \pm \frac{48}{\sqrt{65}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{точки } M_1\left(-\frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{48}{\sqrt{65}}\right) M_2\left(\frac{6}{\sqrt{65}}, -\frac{48}{\sqrt{65}}\right) - \text{стационарные}$$

точки.

Точка M_2 не принадлежит границе G_1 , следовательно, находить значение функции в этой точке не надо.

Найдем значение функции в стационарной точке M_1 и в граничных точках $A(0, -6)$ и $B(6, 0)$:

$$z\left(-\frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{48}{\sqrt{65}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{65}} - \frac{8 \cdot 48}{\sqrt{65}} - 4 = -\frac{390}{\sqrt{65}} - 4 \approx -52,4;$$

$$z(6, 0) = 6 - 4 = 2;$$

$$z(0, -6) = -8 \cdot (-6) - 4 = 44.$$

б) Рассмотрим отрезок АВ. На данном отрезке $y = x - 6$, где $0 \leq x \leq 6$.

Задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной на отрезке $[0, 6]$.

$$z = x - 8(x - 6) - 4 = x - 8x + 48 - 4 = -7x + 44,$$

$z' = -7 \neq 0 \Rightarrow$ стационарных точек на границе G_2 нет.

Точки $A(0, -6)$, $B(6, 0)$ – граничные точки. Значение функции в граничных точках $A(0, -6)$ и $B(6, 0)$ было найдено ранее.

Среди найденных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$\min_D z(x, y) = -\frac{390}{\sqrt{65}} - 4, \quad \max_D z(x, y) = 44.$$

5.11. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Для получения варианта домашнего задания Вам необходимо, пользуясь табл. 5.1, заполнить первую строку табл. 5.2, затем выписать соответствующие Вашему номеру варианта данные из табл. 5.1. Например, Ваш вариант 5.14. Тогда по табл. 5.1 имеем:

5	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 5.1 и выбираем строку, соответствующую четырнадцатому варианту:

Номер по п/п	Коэффициент						
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
14	4	5	2	-6	-3	7	8

Таблица 5.1

Порядок следования коэффициентов

№	Коэффициенты						
1	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
2	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
3	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
4	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
5	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
6	<i>A</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
7	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
8	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
9	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
10	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
11	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
12	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
13	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
14	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
15	<i>K</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>M</i>
16	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>M</i>

Таблица 5.2

Данные для выполнения домашнего задания

Номер по п/п	Коэффициенты						
1	2	3	-1	5	7	4	14
2	-5	-9	2	1	-4	3	8
3	6	4	1	2	-7	3	12
4	2	-1	6	-9	8	5	13
5	1	5	-4	-3	6	2	-8
6	4	3	11	-1	-4	3	9
7	2	5	1	4	10	3	24
8	5	-2	9	3	-1	4	7
9	-2	7	6	11	-1	4	8
10	-4	10	5	-3	7	2	13
11	-3	2	-4	7	1	4	12
12	-6	5	-1	8	11	2	-6
13	3	-2	9	-5	1	4	17
14	4	5	2	-6	-3	7	8
15	9	3	-5	7	4	3	-12
16	2	5	-1	-3	4	6	-10
17	1	-6	2	3	-5	4	14
18	10	-2	6	-4	3	5	21
19	-4	7	-3	9	6	2	-17
20	2	1	7	12	4	6	-8
21	8	5	-2	4	1	3	17
22	-3	2	-4	6	-7	5	14
23	-1	7	2	5	4	6	3
24	3	-5	6	-4	1	2	8
25	10	-2	4	7	5	3	-27
26	2	11	6	4	-3	5	16
27	1	4	-3	2	9	6	-17
28	4	5	-9	7	3	2	-12
29	3	2	-5	4	7	6	13
30	-2	10	-4	1	-3	4	37

Условие домашнего задания

Задача 1. Найти дифференциал 1-го и 2-го порядка функций:

1) $z = xy^A - Bx^C y^D + 5x^F$ в точке $M(1, 1)$;

2) $z = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}$ в точке $M(0, 1)$.

Задача 2. Найти частные производные 1-го порядка функций:

1) $z = \sqrt[A]{Ax^2 + By^2 + C^2 + D \ln(x^A + xy^M)}$;

2) $u = (z + M)^{(Ax + Ky)}$, где $z > -M$;

3) $z = \text{Barctg} \frac{Ax}{y^F} + Btg^2(x^F y + y^F x - 1)$.

Задача 3. Найти производную функции $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ в точке $M(D, K)$ в направлении вектора $\overline{MO}$, где $O(0, 0)$.

Задача 4.

1) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $(F)^x = Ax + By^{Cx}$;

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $(A^2 z)^{Fy} - Mx^C y^K z^D = B$.

Задача 5. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности

$$z = Ax^3 y^F + By^3 x - Dx^2 - Ky^F \text{ в точке } O(1, 1, z_0).$$

Задача 6. Написать уравнение плоскости, касательной к поверхности $A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 1$ и параллельной плоскости $Mx + Ky + Dz = 1$.

Задача 7. Найти локальные экстремумы функций:

1) $z = Axy(C - Kx - My)$;

2) $z = e^{Ax}(Cx + Dy^2 + My)$.

Задача 8. Найти условный экстремум функции $z = Axy + B$ при

$$\text{условии } \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{K^2} = C^2.$$

Задача 9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$ в замкнутой ограниченной области D :

1) $z = Ax^2 + By^2 - C \quad D: |x| + |y| \leq F$;

2) $z = Cx + My + K \quad D: x^2 + y^2 \leq F^2, y \geq x - F$.

5.12. Вопросы для самопроверки

- 1) Дать определение функции двух переменных.
- 2) Дать определения линии и поверхности уровня.
- 3) Дать определение функции, дифференцируемой в точке, а также частных производных и дифференциала.

4) Найти частные производные функции $z(x, y) = -\frac{4y}{x^2}$.

5) Найти дифференциал первого порядка для функции $z(x, y) = x^3y - \frac{y^3}{x-1} + 5$.

- 6) Дать определение вторых частных производных и второго дифференциала функции двух переменных.

7) Найти частные производные второго порядка для функции $z(x, y) = x^y$.

8) Найти дифференциал второго порядка для функции $z(x, y) = (2x - y)/(3x + 4y)$ в точке $M(-1, 1)$.

9) Вычислить $\frac{dy}{dx}$, если $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

10) Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $\sin(xyz) - xy = z^y$.

11) Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $M(2, 1, 4)$.

12) Написать уравнения касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = \ln(4xy - 7x^3)/y$ в точке $M(1, 2, 0)$.

13) Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ в точке $M(1, 2, -5)$.

14) Дать определение градиента функции. Сформулировать его основные свойства.

15) Дать определение производной функции $f = f(x, y)$ в точке M по направлению вектора $\vec{l}$. Записать формулу для вычисления производной по направлению.

16) Найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(2, -1, 2)$.

17) Найти производную функции $z = (\sin x)^y$ в точке $M(\pi/6; 2)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = (3, -4)$.

18) Найти вектор, в направлении которого производная по направлению функции $z = (2x + y)e^{xy}$ в точке $(0, -1)$ будет максимальной

19) Сформулировать правило дифференцирования сложной функции.

20) Дать определение точки локального экстремума функции двух переменных. Сформулировать необходимое условие существования локального экстремума функции двух переменных в точке.

21) Сформулировать достаточное условие существования локального экстремума функции двух переменных.

22) Дать определение точки условного экстремума функции двух переменных. Сформулировать необходимое условие существования условного экстремума функции двух переменных в точке.

23) Сформулировать достаточное условие существования условного экстремума функции двух переменных.

24) Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^2 - 4y^2 - 2x - 8.$$

25) Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y - 1$$

26) Найти точки условного экстремума функции $z = xy^2 - 12$ при условии, что $x^2 + y^2 = 12$.

27) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy \text{ в области } D : x + y = 1, \quad x = 0, y = 0.$$

28) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 5$ в области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 \leq 2y$.

29) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2$ в области, определяемой неравенством $|x| + |y| \leq 1$.

30) На плоскости $x + y - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x + 3z = 6$ и $y + 3z = 2$ была бы наименьшей.

Типовой вариант контрольной работы

По теме “Функции многих переменных”.

1. Найти частные производные первого порядка для функции

$$u = \arctg(x - y)^z.$$

2. Найти дифференциал второго порядка для функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

3. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение

нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $(3, 4, -7)$;

или

Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $(1, 2, -1)$; или

Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy$ перпендикулярной прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

4. Найти производную функции $u = \frac{\sqrt{x}}{yz}$ по направлению вектора $\vec{a} = (-3, 4, 0)$ в точке $M(4; -1, 3)$; или

Найти производную функции $u = xy + \frac{z}{y}$ в точке $M(2, 1, 2)$ по направлению градиента функции $g(x, y, z) = xyz$ в этой точке; или

Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $ye^z = x^2yz - 2$.

6. Найти локальные экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

7. Найти точки условного экстремума функции $z = x^2 - y^2$ при условии $x^2 + y^2 = 4$

8. Найти наибольшее, наименьшее значение функции $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

